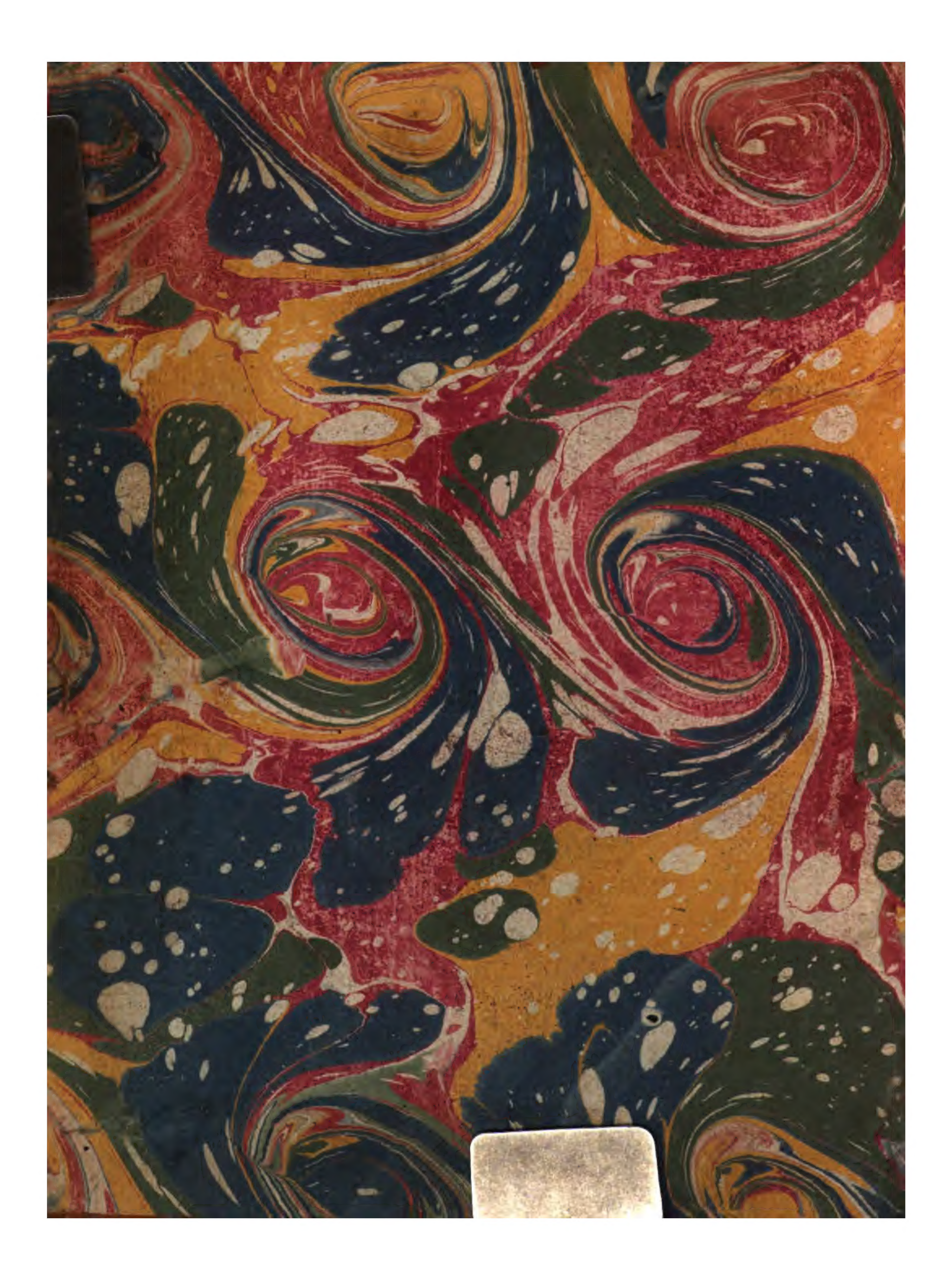

Google











HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCLXXIX.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année,

Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXXII.


BIBLIOTHECA · BODLEIANA

TABLE POUR L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

ANATOMIE.

MINÉRALOGIE.

CHIMIE.

TABLE.

ARITHMÉTIQUE POLITIQUE.

ANALYSE.

ASTRONOMIE.



TABLE POUR LES MÉMOIRES.

ERRATA pour les Mémoires de l'année 1776.

Page 48, art. 9, ligne 24, le 30 Octobre on ressentit à Paris, &c. *lisez* le 30 Décembre.

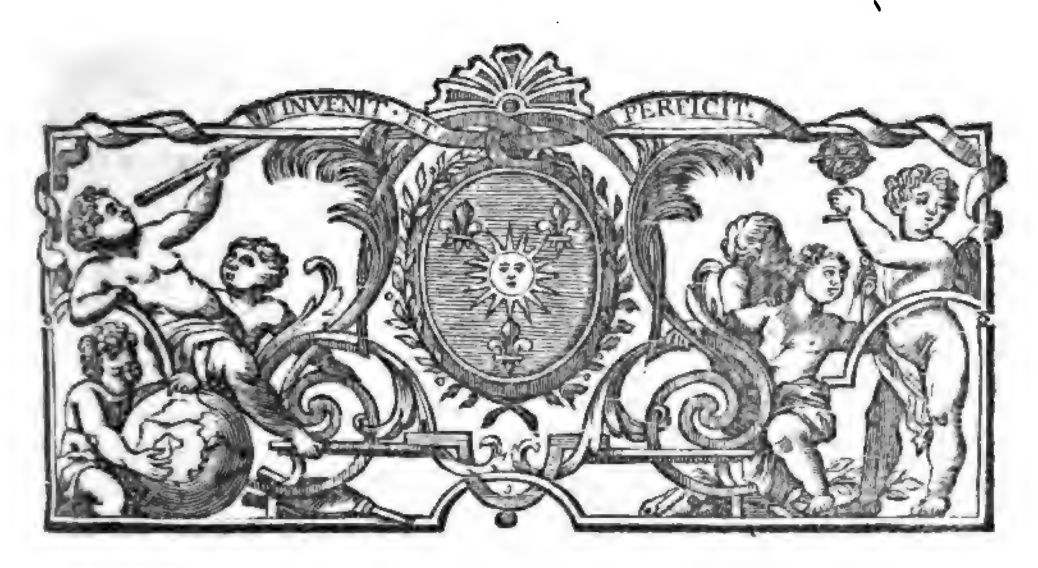
Page 131, ligne 24, l'île aux Centres; *lisez* l'île aux Cèdres.

FAUTE à corriger dans ce Volume.

Histoire. Page 21, ligne 27, dissolution; *lisez* distillation.



HISTOIRE



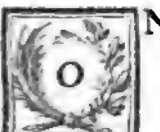
HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES SCIENCES.

Année M. DCCLXXIX.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

SUR UN

MOYEN DE CONNOÎTRE LA FINESSE DES LAINES.



ON doit compter pour un des premiers bienfaits des Sciences, l'avantage qu'elles ont de porter dans les Arts & dans le Commerce la précision qui les caractérisent, de changer en méthodes les routines des Arts, & de transformer en caractères précis & V. les Mém. page 1.

faciles à saisir, les indications vagues, d'après lesquelles le Négociant reconnoît les objets de son commerce & leurs différens degrés de bonté. Quelque sûr que puisse paroître le jugement de l'intérêt & l'habitude, il n'est jamais que le supplément imparfait des véritables connoissances: à la vérité cette utilité des Sciences n'est sensible qu'après que leurs différentes parties ont acquis une certaine étendue, & que leurs méthodes se sont perfectionnées: les premières méthodes sont rarement assez faciles pour devenir d'un usage commun, & il n'est pas moins rare qu'une méthode-pratique n'exige point le concours de connoissances dans différens genres.

M. Daubenton s'est occupé depuis long-temps des moyens de perfectionner les Laines de France, & d'en augmenter les récoltes, & il a embrassé cet objet dans toute son étendue, la nourriture, le logement, le régime, les maladies des moutons, la manière de recueillir leurs laines, les effets des mélanges avec les races étrangères.

Pour apprécier l'influence des différentes méthodes de nourrir, de traiter les moutons, & celle des mélanges des races sur les laines, il falloit avoir un moyen précis de juger du degré de leur finesse: elles sont classées dans le Commerce, mais ces classes, d'ailleurs trop peu nombreuses, ne sont point distinguées par des caractères certains: des laines très-différentes sont souvent placées dans la même classe par différens Manufacturiers, & quelquefois par le même, suivant son intérêt ou son caprice.

M. Daubenton a cherché un moyen plus sûr, & il l'a trouvé en faisant un examen suivi des différentes laines qu'il a pu observer; il a remarqué d'abord, que dans tous les flocons de laines il se trouve des fils de la plus grande finesse, & qu'ainsi, ce n'est point d'après les fils les plus fins d'une laine, mais d'après l'épaisseur des plus gros qu'il faut en déterminer la finesse.

Ensuite il a fait construire un micromètre qui mesure la cent quarantième partie d'une ligne, c'est-là le terme de la finesse des fils les plus gros d'un flocon de laine de la première

qualité; ce terme une fois connu, M. Daubenton se borne à diviser les laines en cinq classes; les superfines, dont le diamètre s'étend depuis $\frac{1}{140}$.^{e} de ligne jusqu'à $\frac{1}{70}$.^{e}, les fines depuis $\frac{1}{70}$.^{e} jusqu'à $\frac{3}{140}$.^{e} & ainsi de suite: la différence de diamètre d'une classe à l'autre étant ainsi de $\frac{1}{140}$.^{e} de ligne, elle est assez sensible pour que dans chaque classe on puisse distinguer des laines de première & deuxième qualité.

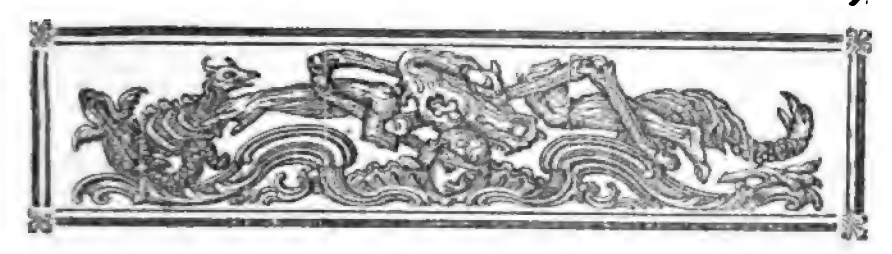
L'usage de cet instrument a été très-utile à M. Daubenton, il lui a servi à s'assurer, avec exactitude, de l'effet que les différens moyens qu'il a employés peuvent produire sur les laines; par exemple, il a trouvé que les métis des béliers à laine très-fine, & des brebis à laine de l'Auxois, peuvent, dès la première génération (grâce à la manière dont il les élève) acquérir une laine supérieure à celle du bélier, qui a été la tige de leur race.

Ce même instrument peut être utile dans de grandes Manufactures en laine, où il est important d'en connoître exactement la qualité, & où de légères erreurs entre des laines très-fines peuvent faire perdre à un ouvrage une partie de son prix. Mais on sent que ni les Bergers, ni les Fermiers, ni même la plupart des Propriétaires & des Manufacturiers, ne se fourniront point de micromètre: M. Daubenton a donc cherché pour eux une méthode plus simple; il propose d'attacher sur un fond noir des échantillons de laines de chaque classe, de les placer à des distances égales; on mettra entre deux l'échantillon de la laine qu'on veut leur comparer, & en observant avec une loupe, on connoîtra, d'une manière plus précise que le tâtonnement ordinaire, à quelle classe on doit rapporter la laine que l'on examine.

Cette méthode est susceptible d'une exactitude très-grande, parce qu'il s'agit seulement de comparer l'objet qu'on veut classer avec des échantillons déterminés, par une méthode très-précise, & dont les différences sont très-sensibles à la loupe. Non-seulement cette seconde méthode proposée par M. Daubenton, peut être utile aux Manufacturiers qui sont intéressés à bien connoître leurs laines, mais elle le sera

beaucoup en général à cette partie du Commerce, en mettant les hommes les plus ſimples en état de ſe défendre contre les ruſes de ceux qui ont plus de connoiſſances & plus d'adreſſe; c'eſt-là un des plus grands avantages des bonnes méthodes, ſi elles augmentent l'inégalité entre les hommes dans les objets de ſpéculation, elles la font preſque diſparoître dans tout ce qui tient à l'uſage commun, c'eſt-à-dire dans toutes les circonſtances où cette inégalité peut être un mal.





ANATOMIE.

SUR L'ORGANE DE LA VOIX.

M. Vicq-d'Azir a inféré dans le volume précédent un Mémoire fur l'Ouïe, où d'après un examen comparé des parties qui conftituent cet organe dans les différentes claffes d'animaux pourvues de ce fens, il a diftingué celles qui font effentielles, des parties qui n'ont qu'une utilité fecondaire, & dont quelques-unes même, femblent plutôt nuire à la perfection de l'ouïe. En effet il paroît avoir le plus de fineffe & de jufteffe dans les efpèces d'oifeaux qui apprennent fi facilement à moduler des airs, & dans ces efpèces l'organe eft très-fimple. V. les Mém. p. 178.

Le Mémoire que M. Vicq-d'Azir donne ici fur l'Organe de la voix, a précifément le même objet, & l'Auteur fuit la même marche. Il décrit cet organe dans l'homme, dans un grand nombre de finges, dans les quadrupèdes des différens genres, dans les oifeaux, dans quelques reptiles, & il lui préfente une foule de variétés.

On voit dans plufieurs efpèces de finges, des poches membraneufes qui communiquent avec le larynx, & qui fe rempliffant & fe vidant d'air alternativement, fervent à former les cris de ces animaux. Le finge-hurleur, à qui la force de la voix a fait donner ce nom, a une poche offeufe; l'appareil fingulier de cet organe eft ici décrit pour la première fois. Les quadrupèdes digités approchent beaucoup plus de l'homme que la plupart des finges; car cet animal, qui au premier coup-

d'œil paroît si près de nous, s'en éloigne à mesure qu'un examen plus approfondi apprend à le mieux connoître. On distingue dans le larynx du chat deux membranes qui forment des vibrations lorsque l'on souffle dans la trachée-artère, & produisent alors un ronflement semblable à celui que les chats font entendre. Ainsi des membranes particulières au chat, deviennent l'organe de ce son aussi particulier à son espèce.

Dans le cochon, les ventricules de la glotte sont remplacées par plusieurs cavités recouvertes par un muscle. Dans l'âne & dans le mulet, le cartilage thyroïde a une cavité recouverte par une membrane. L'air qui est alternativement poussé dans ces cavités, & forcé d'en sortir, augmente la voix de ces animaux, & sert à la production des sons qui les caractérisent.

L'organe de la voix du phoque ressemble à celui des animaux à quatre pieds; à cet égard la chauve-souris, au contraire, semble se rapprocher des oiseaux; observation singulière, parce que le reste de sa conformation place cet animal dans la classe des quadrupèdes.

L'organe de la voix des oiseaux a une construction différente de celle du même organe dans les quadrupèdes: les oiseaux n'ont point d'épiglotte, mais leur glotte a la faculté de s'ouvrir & de se fermer. C'est la seule partie de l'organe qui soit à la partie supérieure du cou, le reste se trouve à la partie inférieure, au-dessus de la bifurcation des bronches; la pièce qui les divise, leurs membranes sont susceptibles de vibrations, & tiennent lieu des membranes auxquelles dans l'homme on a donné le nom de *cordes vocales*. Dans quelques espèces, la trachée-artère s'enfonce dans le sternum; dans d'autres elle s'étend en-dehors des deux côtés de cette partie. Cette disposition semble être analogue à celle des poches osseuses, des grandes cavités qu'on observe dans certains quadrupèdes, & elle est vraisemblablement destinée aussi à donner plus de force à la voix de ces oiseaux. Mais ceux dont le chant est varié, agréable, ont un organe très-simple, tout cet appareil n'existe point chez eux. Il sert à la

force de l'organe, mais non à sa variété ou à son agrément. Il est utile aux espèces, qui par leur manière de vivre, ont besoin de s'avertir de loin, & dont la langue se borne à un petit nombre de cris. En général, l'organe de la voix, comme celui de l'ouïe, est d'autant plus parfait qu'il est plus simple.

On retrouve les cordes vocales dans la grenouille & les animaux de ce genre, mais ils n'ont pas d'épiglotte.

La glotte dans les reptiles paroît être la seule partie de l'organe sonore qu'ils aient conservée, & leur voix se borne à un sifflement sourd,

M. Vicq-d'Azir conclut de cette longue suite d'observations:

1.° Que la glotte paroît inutile à la formation des sons:

2.° Que ce sont les membranes inférieures du larynx dans l'homme & dans les quadrupèdes, remplacées dans les oiseaux par les membranes élastiques des bronches, qui sont le véritable organe de la voix, puisqu'elles sont les seules parties susceptibles de vibration :

3.° Enfin, que les poches osseuses, les cavités, les sinuosités monstrueuses de la trachée-artère, observées dans un si grand nombre d'espèces, ne servent qu'à donner au son une intensité *plus* grande encore, sans influer sur l'intonation.

Cependant il ne donne ces conclusions que comme de simples vues, & il se propose de les vérifier par une suite d'expériences sur les organes de la voix de différentes espèces d'animaux.

En effet, il a ici un avantage qui manque à ses recherches sur l'ouïe, celui de pouvoir s'assurer, par l'expérience, de l'usage de chaque partie, & il n'est jamais permis dans les Sciences physiques de s'en rapporter à l'analogie, que lorsqu'on ne peut constater les faits par des observations directes, comme on ne doit employer le calcul des probabilités, & chercher la vraisemblance de ce qui peut être que dans les cas où il ne nous est pas donné de savoir ce qui est.

L'analogie est utile pour nous indiquer les faits qu'il faut chercher à vérifier, pour abréger les recherches, pour marquer la route qui doit nous conduire avec plus de vraisemblance ;

elle nous éclaire ſur le choix des méthodes; mais ſi on la prend pour la méthode même, ſi on veut la regarder comme une preuve, lorſqu'elle ne doit ſervir qu'à indiquer les vérités qui reſtent à prouver, on riſque de s'égarer, de ſubſtituer des ſonges aux véritables loix de la Nature, & de créer un monde imaginaire, au lieu de perfectionner la connoiſſance de celui qui exiſte.

C'eſt ce que M. Vicq-d'Azir a ſenti, & ce qui le rend ſi réſervé dans ſes concluſions, lors même que l'analogie la plus forte ſemble ne pas permettre le doute; & cette réſerve eſt, dans les Sciences naturelles, le caractère le plus certain du véritable talent.

SUR UN

ÉTRANGLEMENT DES INTESTINS.

V. les Mém. p. 314.

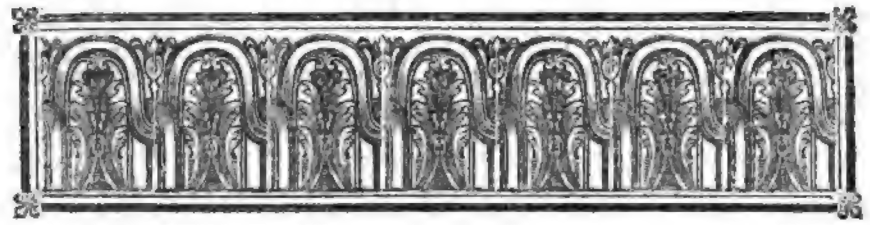
PARMI cette foule de maux ſans nombre, à laquelle notre organiſation nous expoſe, il en eſt qui, inacceſſibles aux ſecours ou même aux obſervations de l'Art, nous condamnent à une mort lente, dont il n'eſt poſſible ni de retarder l'époque, ni de prévoir la cauſe. Telle eſt une maladie ſingulière, dont M. Bordenave rend compte dans ce Mémoire: le malade mourut après dix-huit jours de coliques continuelles & douloureuſes. L'ouverture du cadavre fit voir l'épiploon roulé, reſſerré ſur lui-même, adhérent au péritoine; au-deſſus de l'os pubis l'ileon adhéroit à une poche qui s'étoit formée dans le péritoine; il s'y étoit introduit, & il étoit étranglé à ſon entrée dans cette poche. M. Bordenave conjecture que quelque effort, auxquels les travaux habituels du malade l'expoſoient, ou quelque coup qu'il avoit reçu, avoit diſtendu le péritoine, & cauſé la formation de cette poche; cette formation pouvoit être ancienne, & le malade éprouvoit depuis long-temps des douleurs lorſqu'il ſe couchoit ſur le côté gauche: une cauſe d'inflammation aura produit l'étranglement que la diſpoſition particulière des inteſtins favoriſoit,

&

& les accidens qui ont terminé la vie du malade en ont été les ſuites néceſſaires.

De telles obſervations ſont utiles, quoiqu'elles n'apprennent ni les moyens de remédier au mal, ni même ceux d'en reconnoître la nature : c'eſt en raſſemblant ces faits iſolés, que préſente l'hiſtoire des ouvertures de cadavres, que l'on peut ſeulement eſpérer de connoître un jour les ſymptômes extérieurs de ces vices accidentels de l'intérieur. Eh, qui peut répondre que l'on ne trouvera pas même, ou le moyen de réparer ces déſordres, ou ceux de prévenir les ſuites funeſtes qu'ils peuvent produire ? Ceux qui cultivent les Sciences d'obſervations, ceux ſur-tout qui veulent les juger, ne doivent jamais perdre de vue, que ſi nos connoiſſances ſont encore peu étendues, un ſiècle & demi, ſeul eſpace des temps connu, où les Sciences ont été cultivées de ſuite & dans un grand eſpace, n'eſt auſſi qu'un inſtant par rapport à la durée de notre eſpèce ; qu'ainſi, tout ce que nous ſavons, n'eſt rien en comparaiſon de ce que l'eſprit humain peut embraſſer, & que les choſes qui nous paroiſſent aujourd'hui poſſibles, ne ſont qu'une foible partie de ce que le temps & le génie peuvent nous mettre en état de tenter un jour avec ſuccès.





MINÉRALOGIE.

SUR LA TERRE JAUNE DU BERRI.

V. les Mém. p. 310.

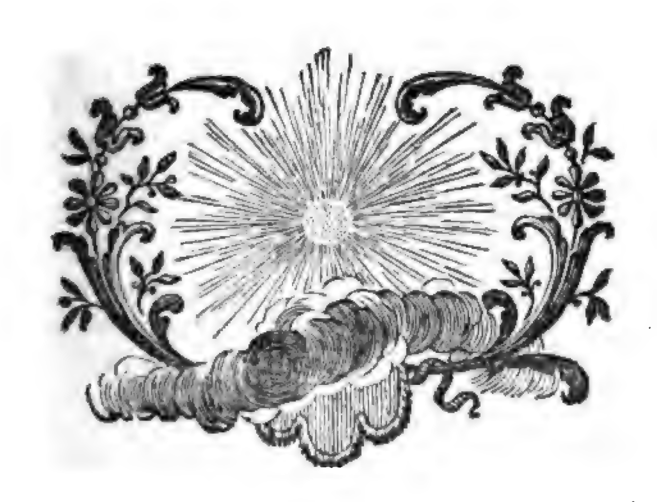
LA Terre bolaire jaune du Berri se trouve principalement dans la paroisse de Saint-George; les couches de cette terre, leur disposition, la nature de celles qui les recouvrent, ont été décrites par M. le Monnier. M. Sage l'a soumise à l'Analyse chimique; & il a trouvé qu'elle contenoit par quintal dix livres d'eau acidule, quarante de chaux de fer, & cinquante de terre argileuse non colorée.

C'est de cette terre jaune que l'on tire le rouge connu dans le Commerce, sous le nom de *rouge de Prusse* ou d'*Angleterre*, & que l'on emploie principalement à mettre en couleur les carreaux des appartemens, à polir les verres, à peindre des papiers. Les Hollandois achettent cette terre en Berri trente-huit à quarante sous le quintal, & après qu'ils lui ont fait prendre la couleur rouge, ils la mettent dans le Commerce où elle vaut, suivant l'intensité du rouge qu'elle donne, de vingt-cinq à quarante-huit livres. On connoissoit depuis long-temps le profit que les Hollandois font sur cette terre, mais on ignoroit la préparation qu'ils lui faisoient subir; M. Sage n'a pas eu de peine à la deviner, & l'expérience lui a confirmé qu'il suffisoit de la calciner. Il entre dans son Mémoire, dans le détail des moyens de faire cette opération d'une manière sûre & assez simple pour être employée dans un travail en grand par des Ouvriers ordinaires.

Il faut espérer que d'après la publication de ce Mémoire,

on établira quelques Manufactures de ce genre, qui diminueront le prix de cette terre, & qui éviteront la dépenſe abſolument en pure perte de ſon tranſport en Hollande & de ſon retour en France.

L'ignorance du commun des hommes a été depuis long-temps, pour ceux qui ne la partageoient qu'en partie, une mine plus féconde que celles du Pérou & de Golconde; elle eſt encore, elle ſera long-temps bien riche; mais ceux dont les vues & les ſentimens embraſſent toute l'eſpèce humaine, voient avec conſolation que pluſieurs branches de cette mine, qui, peut-être, n'étoient pas les moins abondantes, commencent à *s'épuiſer*.



OBSERVATION D'HISTOIRE NATURELLE.

ON a obſervé dans pluſieurs parties de la France, comme à Saint-Maur en Touraine, à Fleuri-la-rivière, & à Courtagnon en Champagne, à Chaumont dans le Vexin françois, à Stors près l'île Adam, de vaſtes amas de coquilles; ceux de Touraine ſont les plus anciennement connus, on les nomme *falunières*, & les coquilles étant devenues très-friables, ſont employées comme la marne, & à peu-près dans les mêmes vues. Il ne faut pas confondre ces amas de coquilles avec les moules, les empreintes de coquillages qu'on rencontre dans les pierres calcaires, & dont elles paroiſſent quelquefois compoſées preſque en entier.

Dans les pierres calcaires les coquilles ont été détruites, & il ne reſte d'autres veſtiges de leur exiſtence, qu'une terre qui s'eſt moulée dans leur intérieur, & qui en a conſervé l'empreinte: ici au contraire, la coquille même eſt plus ou moins conſervée, ce qui ſemble indiquer que ces dépôts ſont moins anciens, ou qu'ils n'ont pas éprouvé la même action de la part des eaux. Il eſt important de multiplier les obſervations de ce genre; ce n'eſt que par une connoiſſance exacte & détaillée du Globe, qu'on peut parvenir à ſe former une idée des révolutions qu'il a éprouvées, des cauſes des changemens qu'on y obſerve, & des loix ſuivant leſquelles ces cauſes ont agi.

M. Morand a découvert, il y a quelques années, un de ces bancs au-deſſus de Louvres en Pariſis, à droite du grand chemin de Paris à Compiegne, près d'une Commanderie de Saint-Lazare, nommée *Guépel:* ce banc forme une butte qui a été coupée pour aplanir le grand chemin: les coquilles y ſont très-abondantes, & des mêmes familles que celles qui forment la montagne de Courtagnon. Il n'eſt peut-être pas inutile de remarquer que ces deux endroits ſont également placés dans le baſſin de la Seine.



CHIMIE.

SUR LA PLATINE.

LE ſuccès avec lequel M. le comte de Sickingen eſt parvenu à rendre la Platine ductile, & à en former des lingots, a rappelé vers cette ſubſtance métallique les regards des Chimiſtes, qui ſembloient l'avoir négligée depuis quelque temps.

V. les Mém. pages 337, 385 & 545.

M. Tillet, qui s'eſt occupé de l'art des Eſſais, avec plus de ſuite & de ſuccès qu'aucun des Chimiſtes dont il a été précédé ou ſuivi dans cette carrière, a voulu conſidérer cette ſubſtance ſous ce même point de vue. Comme la coupellation qui ſépare les autres métaux de l'or & de l'argent laiſſe la platine mêlée avec eux, il y avoit trois eſpèces d'alliages à examiner, celui d'or & de platine, celui d'argent & de platine, celui des trois métaux réunis.

On ſavoit ſéparer l'or de la platine, & ce ſont par conſéquent les deux autres alliages qui ſont devenus l'objet des travaux de M. Tillet.

Si on ſoumet à l'opération du départ un cornet d'une partie de platine, de 11 parties d'or, & de 36 grains d'argent, elle ſe fait préciſément comme s'il n'y avoit point de platine, c'eſt-à-dire que l'on trouve un cornet d'or pur, que la liqueur du matras eſt tranſparente, & qu'ainſi, l'acide nitreux tient en même temps en diſſolution l'argent & la platine: on obſerve ſeulement preſque toujours une petite ſurcharge dans le cornet d'or, ſurcharge qui cependant n'équivaut pas à beaucoup

près à la quantité de platine employée. M. Tillet a obſervé que cette ſurcharge étoit dûe non à ce qu'une partie de la platine combinée avec l'or, échappoit à l'action de l'acide, mais ſeulement à ce que quelques portions de platine, au lieu de s'unir avec l'or dans la fuſion, étoient demeurées intactes, & parce que l'acide nitreux n'a point d'action ſur la platine ſeule: une ſeconde opération débarraſſeroit complètement l'or de cette ſurcharge.

Si la platine eſt alliée avec de l'argent ſeulement, alors elle n'eſt plus diſſoluble dans l'acide nitreux, du moins la liqueur prend une couleur brune, opaque, & il ſe précipite, mais avec une grande lenteur, une poudre noire très-fine & très-légère; la diſſolution même après ce dépôt, eſt encore trouble, & contient une petite quantité de platine, plutôt ſuſpendue que diſſoute.

Lorſqu'en expoſant à l'action de l'acide nitreux, un cornet d'or, d'argent & de platine, on s'eſt procuré cette diſſolution dans un état de limpidité parfaite, ſi on emploie, pour en précipiter l'argent & la platine, une plaque de cuivre, comme dans les travaux en grand des Affinages, cette plaque de cuivre ſe couvre alors d'une criſtalliſation feuilletée & brillante: ces feuillets triangulaires ſont d'une extrême fineſſe & d'une grande légèreté; peu-à-peu il ſe dépoſe une poudre brune qui les ternit & qui les affaiſſe: en formant de tout ce précipité un lingot par la fuſion, & cherchant à le diſſoudre dans l'acide nitreux, il reſte un précipité beaucoup plus petit qu'il le devroit être, ſi l'on ſuppoſoit que toute la platine de la diſſolution qu'on a précipitée eût exiſté dans le lingot. En effet, M. Tillet, en diſſolvant dans de l'acide nitreux le précipité, tel qu'il l'avoit obtenu, chargé d'une poudre brune a eu un réſidu beaucoup plus fort: cette poudre brune, qui doit ſon origine à la platine, a donc diſparu par la fuſion, ce n'étoit donc point de la platine pure, mais une ſubſtance qui devoit ſon origine à ce métal. L'acide nitreux peut donc en quelque ſorte décompoſer, altérer ce métal, ſur lequel il n'a aucune action quand ces

deux ſubſtances ſont préſentées l'une à l'autre ſans mélange, tandis que le cuivre ſur lequel l'acide nitreux a une action ſi vive, peut reprendre, preſque tout entier, ſa forme métallique.

La criſtalliſation du précipité d'argent, lorſque l'acide nitreux contient en même-temps de la platine en diſſolution, eſt un phénomène bien remarquable, & il n'a pas lieu ſeulement dans ce cas; M. Tillet a obſervé encore que les boutons, les lingots d'argent, alliés d'un dixième de platine, ont, en ſe refroidiſſant, à leur ſurface, des eſpèces d'herboriſations formées par des criſtaux pyramidaux, qui ont beaucoup de rapport avec les criſtaux d'argent qu'il a obtenus par la méthode employée par M. Rouelle, pour avoir des criſtaux de ſoufre. Mais cette même criſtalliſation n'eſt ſenſible ni ſur les lingots ni ſur les boutons d'argent pur: comment ce mélange d'une petite quantité de platine produit-il cet effet? C'eſt une de ces queſtions ſur leſquelles il n'eſt point même permis encore de former des conjectures.

Il étoit poſſible que ces précipités d'une poudre noire & légère, ſéparés de la platine, & réunis avec ce qui pouvoit être reſté dans les ſcories, reſtituaſſent la quantité de platine qui étoit perdue, & qu'il ne reſtât plus rien de remarquable que l'exiſtence d'un précipité ſi léger, produit par un métal ſi peſant. M. Tillet a tenté cette expérience, & il n'a pu retirer des ſcories que cette même poudre noire, & point de platine.

Toute la platine diſſoute par l'acide nitreux n'eſt pas détruite; ſi on précipite l'argent par l'acide marin, qu'on ait par ce moyen une diſſolution de platine par l'eau régale, & qu'on retire cette platine du réſidu de cette diſſolution, en l'alliant avec du cuivre, le culot de cuivre, ſoumis à l'action de l'eau-forte, laiſſe de la platine dans l'état métallique; mais dans cette opération, l'eau-forte en diſſout encore une partie, qui ne ſe retrouve plus que ſous la forme de poudre noire.

Cette même opération préſente encore un phénomène bien ſingulier; ſi on ſoumet à l'action de l'acide nitreux une

petite lame de cuivre & de platine, où ces métaux soient dans la proportion de 1 à 28, il reste une petite lame de platine semblable à la lame de cuivre & de platine, mais seulement diminuée dans les deux dimensions, & cette petite lame ne prend aucune retraite par le recuit. On sait qu'au contraire, les cornets d'or, dans l'opération du départ, ne subsistent entiers qu'avec une proportion d'argent beaucoup moindre que ne l'est celle de cuivre dans ces expériences, ne diminuent pas de grandeur pendant cette opération, ce qui est vraisemblablement la raison pour laquelle ils ne peuvent subsister lorsque la proportion d'argent est trop foible; qu'enfin ils prennent au contraire de la consistance, & éprouvent une retraite considérable par le recuit. Ce phénomène étoit donc s éloigné de ceux que présentent toutes les opérations semblables, connues jusqu'ici, qu'il méritoit d'être constaté par de expériences très-précises, & c'est ce qu'a fait M. Tillet; il trouvé qu'une lame de quatre-vingt-douze parties de longuei sur quarante-cinq de largeur, en avoit perdu cinquante-dei sur la longueur, & dix-huit sur la largeur, & il s'est assur par l'inspection de la petite lame, que ses bords avoie conservé les mêmes tranchans, les mêmes bavures que lame de cuivre coupée avec des ciseaux; c'est donc à retraite de la platine, lorsque le cuivre l'abandonne, & n à la destruction d'une partie de la lame, qu'il faut attrib ce phénomène.

Il résulte de ces expériences de M. Tillet, faites sur la platine déjà purifiée & rendue ductile, que ce métal, c par sa pesanteur spécifique, son inaltérabilité, à quelq égards, approche beaucoup de l'or, est bien éloigné cep dant de pouvoir être regardé comme un métal parf puisque l'acide nitreux en sépare une poudre noire, qui aucune propriété métallique, & qui paroît irréductible qu'ici. La platine, dont on a séparé cette poudre noire. fournit encore, & à peu-près dans la même proportion on lui fait subir une seconde fois les mêmes épreuves: donc une véritable décomposition du métal même.

expéri

fém.
5.

Quelques Chimiſtes célèbres ont avancé que, dans ces expériences, un ſeul des acides étoit vraiment diſſolvant, que celui qu'on mêloit avec le premier, ne ſervoit qu'à donner à ce premier le degré de pureté & de force néceſſaire à ſon action; cependant, le ſel formé par la combinaiſon de l'eau régale & de l'or, contient les deux acides intimément unis tous deux avec l'or, & cette obſervation eſt une objection très-forte contre cette opinion qui n'eſt fondée juſqu'ici, que ſur une théorie très-bien combinée, mais qui ne peut être prouvée que par des expériences directes.

SUR LES
SELS DES CENDRES DE TAMARIS.

V. les Mém. p. 497.

ON a obſervé, il y a long-temps, que les cendres de Tamaris ne donnent point d'alkali fixe développé, & ſeulement des ſels vitrioliques; mais ce qu'on n'avoit pas encore remarqué, c'eſt que ce ſel vitriolique eſt preſque entièrement du ſel de Glauber, ſi la plante a crû ſur le bord de la mer, qu'en s'éloignant de ſes bords, la quantité de ſel de tartre vitriolé devient de plus en plus grande, que ſi enfin le tamaris a été pris dans un terrein éloigné de la mer, il ne préſente plus aucun veſtige de ſel de Glauber.

Cette obſervation de M. Cornette eſt analogue à celle qu'a faite M. Cadet, ſur les cendres du kali recueilli à Denainvilliers, qui, après quelques années, n'ont plus donné que de l'alkali végétal.

Nous croyons devoir annoncer ici, que ce réſultat eſt abſolument conforme à ce qu'a obſervé M. Deſlandes, Directeur de la manufacture des Glaces de Saint-Gobin, qui, depuis pluſieurs années, a ſuivi ces expériences avec beaucoup de ſoin, & les a faites très en grand.

Ce phénomène eſt ſans doute bien digne de remarque, & il ſeroit intéreſſant d'examiner, ſi c'eſt à l'air des bords de la mer, ou aux parties de ſel marin, répandues dans

les terres voisines, que l'on doit l'existence de l'alkali minéral dans les cendres des plantes? jusqu'ici il paroîtroit que l'air devroit en être l'origine; en effet, la terre des pays éloignés de la mer, ne paroît pas contenir d'alkali; les cendres des plantes venues dans l'eau, en contiennent, du moins n'a-t-on pas observé le contraire, & l'eau ne renferme point d'alkali: ce sel se forme donc dans la végétation. Mais, si c'est à la différence de l'air, qu'est dûe celle des alkalis, quelle est l'espèce de fluide aëriforme, qui distingue l'air des bords de la mer, de celui de l'intérieur des terres, & qui produit ce changement d'alkali végétal, en alkali marin?

Il est facile de s'assurer de ce fait, par des expériences directes; mais si le végétal, produit par des graines recueillies sur les bords de la mer, donne encore de l'alkali marin, quoique semé dans l'intérieur des terres, s'il faut plusieurs générations de plantes, pour produire cette métamorphose, combien le phénomène devient-il plus difficile à analyser? Les changemens produits par la végétation, dans les élémens des corps, doivent sans doute devenir un jour, une branche de l'analyse chimique, & ce ne sera point une des moins utiles, ni des moins propres à nous faire pénétrer un peu plus avant, dans les secrets de la Nature.

On emploie les cendres de tamaris, pour décomposer l'eau-mère du salpêtre, & en retirer du nitre. Il est aisé de voir que le choix du lieu où croît cette plante, n'est pas indifférent. Le tamaris des bords de la mer, donneroit beaucoup plus de nitre quadrangulaire, celui des terres ne donneroit au contraire que du véritable salpêtre.

SUR LE VITRIOL DE MERCURE.

QUELQUES Chimistes avoient annoncé que le vitriol de Mercure se décomposoit, au lieu de se sublimer, & que le métal passoit dans la distillation, séparé de l'acide, & sous V. les Mém. p. 485.

la forme de mercure coulant: M. Cornette a trouvé, en répétant cette expérience, un résultat différent; il s'est sublimé une grande quantité du vitriol mercuriel, & très-peu de mercure séparé de l'acide.

Ce mercure étoit sous la forme d'une poudre grise, & l'acide qui s'en étoit séparé, étoit décomposé de manière qu'il passoit séparément de l'air acide sulfureux, & une certaine quantité d'air vital: le premier de ces airs est miscible à l'eau & produit alors avec l'alkali fixe, le sel sulfureux de Stalh. Il faut remarquer que, lorsqu'on emploie pour faire le vitriol de mercure, non le mercure coulant, mais une chaux de mercure qui, comme on sait, contient elle-même une certaine quantité d'air vital; alors le vitriol de mercure se sublime en entier: cette différence paroît donc tenir à la présence de cet air, qui peut empêcher la décomposition de l'acide vitriolique, soit pendant la distillation, soit dans la formation du vitriol de mercure.

Ainsi, les phénomènes que présente la sublimation du vitriol de mercure, paroissent dépendre de l'action des substances aëriformes qui sont devenues un des élémens les plus importans des Analyses chimiques, & ont ajouté à cette Science un si grand degré de précision & d'étendue.

SUR LA DÉCOMPOSITION DES SELS VITRIOLIQUES ET NITREUX, PAR L'ACIDE MARIN.

V. les Mém. p. 487.

L'OBJET de ce Mémoire est d'examiner l'action de l'acide marin sur les sels vitrioliques & nitreux, à base métallique: M. Cornette a déjà montré dans d'autres Mémoires *(année 1778)* que cet acide décompose les Sels vitrioliques & nitreux à base d'alkali fixe & volatil, & il prouve ici qu'il a la même action sur ces sels, lorsque leur base est métallique.

Cette propriété étoit déjà connue pour les métaux blancs, tels que l'argent, le plomb, le mercure, le régule d'antimoine,

M. Cornette l'étend ici au cuivre, au fer, au zinc, au cobalt. Ces expériences deviennent très-difficiles, lorſque l'on opère ſur des ſubſtances, dont l'eau régale eſt le diſſolvant, parce qu'alors il eſt beaucoup plus difficile de ſéparer l'acide nitreux du métal, & qu'il en reſte une partie qui ſe mêle à l'acide marin.

L'acide marin dans ce cas ſemble non-ſeulement décompoſer tout le ſel nitreux, mais s'unir même avec une partie de l'eſprit de nitre, & attaquer le métal dans cet état de combinaiſon; car, en général, dans cette circonſtance, les criſtaux que l'on obtient paroiſſent homogènes, & renfermer dans chacun de leurs élémens les deux acides & leurs baſes, & non être formés par l'agrégation des criſtaux de deux ſels, l'un nitreux & l'autre marin. Cependant, même dans ce cas, M. Cornette eſt parvenu à retirer du nitre de cobalt des criſtaux, où l'acide marin ſe trouvoit ſeul; & il eſt en droit d'en conclure que l'acide marin décompoſe ces ſels nitreux. D'ailleurs, un grand nombre d'expériences ſemblent indiquer que dans l'action de l'eau régale, c'eſt l'acide marin qui eſt vraiment le principe actif; ainſi, quand même on ne pourroit ſéparer l'acide nitreux en entier de ſa baſe, la ſupériorité de l'action de l'acide marin paroîtroit encore avoir en ſa faveur une très-grande probabilité.

SUR

L'HUILE DE VITRIOL GLACIALE.

SI l'on diſtille ſur du charbon un mélange d'acide vitriolique & d'acide nitreux, il monte à la fin de la diſſolution un ſel concret qui eſt l'acide vitriolique ſous forme ſolide, l'huile de vitriol glaciale. L'acide vitriolique pur diſtillé ſur du charbon, ne produit point le même effet, non plus que la diſtillation d'un mélange d'acide nitreux & d'acide vitriolique. V. les Mém. p. 479.

Ce phénomène obſervé par M. Cornette, a une grande analogie avec pluſieurs faits découverts par les Chimiſtes

modernes, on ſait que c'eſt en diſtillant de l'acide nitreux ſur du ſucre, ſur des gommes, ſur de la ſoie, qu'on parvient à ſéparer de ces ſubſtances un acide concret. Toutes ces matières contiennent du phlogiſtique comme le charbon, toutes agiſſent ſur l'acide nitreux & le décompoſent en partie; ainſi le fait que contient ce Mémoire, n'eſt pas un fait iſolé : il ſe lie avec ceux qu'ont obſervés les autres Chimiſtes, & on doit le regarder comme une obſervation bien propre à nous éclairer ſur la formation de ces acides concrets, inconnus il y a quelques années; mais qui placés dans un très-grand nombre de ſubſtances végétales & animales, deviennent un des objets les plus importans de l'analyſe chimique. En effet, l'obſervation de M. Cornette ſemble indiquer que ces acides concrets n'exiſtent point tout formés dans les ſubſtances qui les produiſent, mais qu'ils doivent leur formation, ou du moins leur forme concrète, à la décompoſition de l'acide nitreux & d'une partie du phlogiſtique de ces ſubſtances.





ARITHMÉTIQUE POLITIQUE.

SUR LA POPULATION DE LA FRANCE.

L'EUROPE est-elle plus peuplée aujourd'hui qu'elle ne l'étoit du temps de la République Romaine, ou sous les Empereurs? Sa population est-elle augmentée ou diminuée depuis un demi-siècle? Ces deux questions ont été agitées de nos jours par des Philosophes, par des Politiques, par des Calculateurs. V. les Mém. p. 459.

Montesquieu & Wallace ont soutenu que l'espèce humaine avoit diminué depuis les temps que nous nommons *anciens*. Hume & Voltaire ont soutenu le contraire; & l'on trouve, pour ou contre l'augmentation de la population en Europe, depuis le commencement de ce siècle, des autorités presque égales en poids & en nombre. L'objet qu'embrasse M. Morand, n'est pas si vaste; il n'examine que la population de la France, & en cela il a raison; tout ce qui dépend des connoissances de détail ne peut être ni bien exact ni bien certain, que lorsqu'il est l'ouvrage d'un habitant du pays même qu'on cherche à faire connoître; & il échappe souvent des erreurs grossières aux hommes les plus éclairés, lorsqu'ils parlent d'un autre pays que le leur.

M. Morand, d'après un examen critique des différens Auteurs qui se sont occupés de la population de la France, croit pouvoir conclure qu'elle a considérablement augmenté depuis quarante ans, qu'en général la fécondité y est plus grande & la mortalité moindre; & après avoir lû son ouvrage il est difficile de ne point avoir la même opinion.

Mais, dira-t-on, comment ce résultat peut-il s'accorder

avec les progrès du luxe, la corruption des mœurs dans la capitale, l'augmentation de la misère dans les provinces?

On pourroit répondre que la population s'accroît ou diminue en même temps que la quantité des subsistances; qu'il est plus aisé de comparer avec quelque précision l'état de la culture d'un pays, ou sa population dans deux époques, que le plus ou le moins d'aisance de ses habitans. Or, on ne peut nier que l'agriculture n'ait fait des progrès, les prairies artificielles se sont multipliées, la culture des pommes de terre s'est répandue de nos jours dans plusieurs provinces, ainsi le raisonnement est ici d'accord avec l'observation; & l'on voit que la population s'est accrue & qu'elle a dû s'accroître. D'ailleurs, la classe du peuple qui vit de son travail, a plus d'aisance; il suffit, pour s'en assurer, d'observer l'augmentation de la consommation de viande dans les bourgs & dans les villages, de comparer les logemens des habitans des campagnes, leurs habillemens, avec ce qu'ils étoient il y a un demi-siècle; on peut observer aussi, que le commerce & l'industrie ont fait de grands progrès, qu'ils jouissent en général d'une plus grande liberté; que les loix fiscales sont exécutées avec moins de rigueur, quoique les revenus du fisc soient augmentés. Tous ces changemens n'auroient pu se faire si la misère n'étoit pas diminuée, & la diminution de la misère en est à la fois la cause & l'effet.

Il est difficile d'avoir une mesure bien juste de la corruption des mœurs dans chaque siècle, & particulièrement de celle dont il s'agit ici, de la débauche, qui n'est point, peut-être, la corruption de mœurs la plus nuisible, mais celle qui a un effet le plus direct sur la population. Si cependant on veut comparer ce que nous connoissons de nos mœurs, avec ce que les Mémoires particuliers, les Lettres, la tradition nous apprennent des mœurs des générations qui nous ont précédés, cette comparaison sera à notre avantage. On observera sur-tout deux points, dont la réunion nous paroît décisive; 1.° que les mauvaises mœurs sont moins grossières & moins scandaleuses; 2.° que l'hypocrisie de mœurs est plus rare. Or, si nous montrons moins de corruption, & si

& si nous cachons moins celle que nous avons, comment pourra-t-elle être augmentée? cette franchise dans nos mœurs, qui a souvent déterminé à prononcer contre nous, devoit au contraire être une raison en notre faveur; on affichoit jadis des principes plus austères & on ne les suivoit pas; nous en annonçons de plus faciles, mais nous nous en écartons moins; notre indulgence tient plus à l'humanité qu'à la corruption.

Le seul fait qui semble prouver quelque chose contre nous, est l'augmentation du nombre des Enfans-trouvés; mais qu'on daigne examiner si cette augmentation n'est pas l'effet des vues d'humanité, de sagesse, qui ont facilité l'accès de ces asiles, supprimé toutes les recherches, tous les obstacles qui en écartoient autrefois; qui les ont ouverts aux victimes de la misère comme à celles de la honte; qui ont procuré à des cantons éloignés les moyens de profiter de ces secours. Le temps où plus de foiblesses sont dévoilées, ne vaut-il pas mieux que celui où l'austérité, en effrayant les coupables, multiplioit les crimes secrets.

On a cité aussi comme une preuve des progrès de la misère & de ceux de la débauche, la diminution de la taille des hommes, diminution très-réelle, du moins dans quelques cantons; mais cette diminution n'a-t-elle pas une autre cause? l'énorme perte d'hommes d'une grande taille, que la guerre enlève, perte qui loin de se réparer, s'accroît même pendant la paix, parce que les Soldats sont presque tous célibataires. Leur nombre n'est pas assez grand pour nuire à la population générale, pour l'empêcher de se proportionner à la quantité des subsistances, ou pour diminuer cette quantité; mais le rapport de leur nombre à celui des hommes d'une taille élevée, est assez grand pour avoir une influence très-sensible. Les Soldats mariés cependant déserteroient moins, seroient plus sages, plus honnêtes, & moins livrés à l'ivrognerie, à la débauche, à l'oisiveté, mais il faut avouer aussi qu'ils seroient moins lestes.

L'augmentation du luxe ne peut être regardée comme nuisible à la population, que dans le cas où elle diminueroit

le nombre des mariages, ou seroit un obstacle à leur fécondité; en effet, le luxe en général est la suite nécessaire de l'inégalité des fortunes, celui de nos jours, plus utile à l'industrie, est moins funeste que le faste auquel il a succédé, & l'inégalité des fortunes a sûrement diminué. Or il est assez difficile de savoir si le nombre des hommes que la crainte d'avoir à diminuer leur dépense, retient dans le célibat, ou empêche d'augmenter leur famille, est plus grand qu'il ne l'a été; mais cette différence, sûrement beaucoup plus petite qu'on ne le croit, ne peut regarder que des classes très-peu nombreuses, & n'est qu'un objet insensible dans la population d'un grand État; l'effet en disparoît nécessairement, en comparaison de l'augmentation de population que celui de la culture & des subsistances a dû produire.

C'est dans des vues sans doute très-respectables, qu'on cherche à nous faire croire que nos mœurs sont dégénérées de celles de nos pères, afin de nous inspirer une plus grande envie de nous corriger; qu'on déclame contre les progrès du luxe, dans l'espérance d'effrayer par la crainte de ses suites funestes; qu'on exagère la misère des peuples, pour empêcher tout ce qui pourroit l'augmenter; mais nous osons croire que la vérité seroit plus respectable encore & plus utile. Nous sommes si loin de cette égalité de fortune qui peut détruire le luxe, de cette bonté de mœurs qui fait régner dans les familles de tous les états, la paix, la confiance, l'amour des devoirs; la misère présente encore dans la capitale & dans les campagnes, un tableau trop déchirant pour que personne puisse croire qu'il n'y a rien à corriger: mais celui qui nous dit que nous avons déjà fait des progrès, que nous en ferons encore, n'est-il pas plus encourageant que le moraliste, qui en nous présentant nos maux comme aggravés sans cesse par le temps, semble nous ôter tout espoir? Nous sommes dans la décadence, voilà ce qu'un zèle outré nous répète. Nous devons faire nos efforts pour n'y point tomber, & malgré nos progrès, peut-être en sommes-nous menacés, si nous ne sommes attentifs à la

prévenir, voilà ce qu'il ſemble qu'un zèle plus éclairé doive nous faire entendre.

Les obſervations ſur la population de Paris en particulier, paroiſſent prouver que le nombre des naiſſances y ſurpaſſe conſtamment celui des morts; mais il n'en faudroit pas conclure une augmentation de population. On ne trouve point dans le nombre de ces morts, les enfans envoyés en nourrice & ſevrés dans les provinces, & le nombre eſt très-grand. D'un autre côté, plus de perſonnes viennent des provinces s'établir à Paris, qu'il ne retourne de Pariſiens dans les provinces; & par conſéquent la population pourroit être croiſſante quand même le nombre des morts ſurpaſſeroit celui des naiſſances. Pour bien juger cette queſtion, pour ſavoir ſi dans un lieu la mortalité augmente ou diminue, il faudroit ne faire ſes obſervations que ſur des Tables qui contiendroient les individus nés & morts dans le même lieu; cette précaution eſt néceſſaire toutes les fois qu'on veut tirer des Tables de mortalité, des conſéquences relatives à la ſalubrité de l'air, à la vie moyenne des habitans d'un pays, aux effets que la nourriture, les habitudes, la manière de vivre, les progrès de l'art de la Médecine, peuvent produire ſur la durée de la vie.





ANALYSE.

SUR LA THÉORIE DES SUITES.

V. les Mém. p. 207.

LES Géomètres ne considérèrent d'abord la théorie des Suites, que comme un moyen d'obtenir une valeur approchée des quantités dont la valeur exacte, ou ne peut être assignée par les méthodes connues, ou se présente sous une forme trop compliquée: mais ils aperçurent bientôt, en examinant ces séries, que la considération de leur forme, celle de la loi que suivent leurs coëfficiens successifs, conduisoient à un grand nombre de vérités nouvelles, souvent utiles, ou du moins piquantes, par les espèces de paradoxes qu'elles sembloient offrir; en sorte que, depuis le siècle dernier, cette théorie est devenue une des branches les plus cultivées & les plus fécondes de l'analyse.

On sait qu'il existe nécessairement un rapport entre la somme d'une série, c'est-à-dire la fonction dont le développement a produit cette série, & son terme général, c'est-à-dire le coëfficient d'un terme qu'on suppose occuper dans la série, un rang quelconque: souvent il est difficile de trouver la somme d'une série dont on connoît le terme général, quelquefois il l'est même de trouver le terme général lorsque la somme de la série est connue, & sur-tout d'avoir l'expression de ce même terme, en supposant le rang qu'on lui suppose dans la série exprimée par un nombre quelconque, qui puisse n'être pas un entier. On a donné à cette dernière recherche le nom d'*interpolation*.

Si on considère plusieurs séries, & qu'il y aît une équation entre leurs termes généraux, il en existe une autre

entre leurs ſommes, & réciproquement; il eſt aiſé de voir que ces équations ne ſont pas du même genre, que les unes peuvent être faciles à réſoudre, tandis que les autres offriront des difficultés inſurmontables, & qu'ainſi, par exemple, on peut réduire la ſolution d'une équation entre les termes généraux de pluſieurs ſéries, à celle de l'équation entre les ſommes, & à la détermination du terme général d'une ſérie dont on connoît la ſomme; ce qui peut rendre le Problème beaucoup plus ſimple, ou donner, pour ſa ſolution, des méthodes qu'une analyſe plus directe eût difficilement fait découvrir.

L'objet du Mémoire de M. de la Place, eſt de conſidérer les rapports de ces deux équations, l'une entre les termes généraux de différentes ſéries, l'autre entre les ſommes de ces mêmes ſéries, & de conſidérer les différens cas où la ſolution d'une de ces équations, donnant celle de l'autre, la fait dépendre de méthodes qu'il n'eût point été poſſible d'y employer immédiatement.

Il applique cette méthode générale à l'interpolation des ſuites, dans pluſieurs cas qui n'avoient point encore été conſidérés, à leur transformation, à l'examen de certains rapports ſinguliers entre différentes opérations de l'analyſe, comme entre la différentiation, l'extraction des racines, l'intégration & l'élévation aux puiſſances, à la théorie des différences partielles, pour pluſieurs deſquelles il trouve, par cette méthode, les intégrales exprimées par des fonctions qui renferment des intégrales définies, à l'examen de la loi de continuité, à laquelle les fonctions arbitraires de ces intégrales ſont aſſujetties, enfin à des équations ſingulières qui renferment des différences partielles, finies pour une variable, & infiniment petites pour l'autre.

Nous ſommes obligés de renvoyer au Mémoire même, pour le détail de ces diverſes recherches; il nous ſuffit d'avoir montré le principe de cette méthode, dont cette grande variété d'applications fait voir, en même temps, la fécondité & l'étendue.





ASTRONOMIE.

SUITE DES MÉTHODES ANALYTIQUES Pour résoudre les Problèmes Astronomiques.

V. les Mém. p. 51.

UNE méthode analytique de calculer le mouvement des Comètes, devoit faire partie du grand travail de M. du Séjour, sur l'application de l'analyse à l'Astronomie, travail dont il s'occupe depuis long-temps, & dont les volumes de nos Mémoires, depuis 1764, ont tous renfermé quelque partie importante.

M. du Séjour a senti combien sa méthode deviendroit plus simple, s'il pouvoit séparer les équations qui servent à déterminer le plan de l'orbite de celles qui donnent la trajectoire, & il y est parvenu. Les trois distances de la Terre à la Comète, qu'on emploie alors, & dont on suppose que l'on connoît le rapport, doivent être prises à la vérité pour des points peu éloignés, ce qui est un désavantage; mais, pourvu que l'on ait une suite d'observations voisines entr'elles, l'auteur trouve le moyen d'avoir la position de l'orbite qui satisfait à trois observations, telles qu'on voudra les choisir dans le nombre de celles qu'on peut employer.

Le plan de l'orbite une fois connu, la détermination de la trajectoire, soit parabolique, soit elliptique, si les observations obligent ou plutôt permettent de la supposer telle, devient beaucoup plus facile.

Enfin, si la première méthode n'a point donné la position

de l'orbite avec assez de précision, M. du Séjour donne le moyen de réparer cette inexactitude, en même temps que l'on cherche à déterminer la trajectoire.

SUR LA PLANÈTE DE M. HERSCHEL.

DEPUIS la découverte des deux satellites de Saturne, par Dominique Cassini, en 1684, l'Astronomie avoit cessé d'enrichir notre Ciel de nouveaux astres; car les Comètes, visibles seulement dans une petite partie de leur cours, & cessant d'avoir par leur distance, aucune influence sensible sur notre système, semblent bien moins nous appartenir que les Planètes; ainsi les astres éclairés par le Soleil, & circulant autour de lui dans des ellipses, étoient partagés en deux classes très-distinctes, l'une où la distance du foyer au centre est très-petite, l'autre où cette même distance est fort grande, par rapport à la distance du foyer, à l'extrémité de l'axe; c'est-à-dire à celle du Soleil à l'astre dans le périhélie. V. les Mém. p. 526.

Le 13 Mars 1781, M. Herschel, en observant à Bath avec un Télescope de sept pieds construit par lui-même, les étoiles des pieds des Gémeaux, en distingua une, que ses apparences lui firent regarder comme une Comète; il mit à son télescope un oculaire qui augmentoit le grossissement, & le diamètre de l'étoile parut augmenté; il ne douta plus que sa conjecture ne fût fondée, il eut soin de déterminer, avec précision, le lieu du nouvel astre, & deux jours après, il eut le plaisir de voir qu'il avoit changé de place. On regarda d'abord cet astre comme une Comète; mais bientôt, M. Lexell, célèbre Astronome de Péterſbourg, qui alors étoit à Londres, annonça qu'il avoit trouvé moyen de satisfaire à toutes les observations de cet astre, en supposant que son orbite est un cercle dont le rayon est dix-huit fois plus grand que celui de l'orbite terrestre; ce qui donne par conséquent à cet astre, une révolution d'environ quatre-vingt-deux ans: alors, des paraboles qui avoient depuis

quatorze jusqu'à quinze fois cette distance, pour distance de leur foyer au sommet de l'axe, représentoient également bien les observations.

M. de la Lande, en cherchant à déterminer par trois observations cette orbite supposée circulaire, a trouvé un résultat très-approchant de celui de M. Lexell. M.rs Prosperin & Klinkenberg ont eu des résultats à peu-près semblables. Le temps qu'on a pu observer cette Planète, ne suffit point encore pour oser décider si son orbite est réellement à très-peu-près circulaire: dans l'espace qu'elle a parcouru, & qui ne peut être que d'environ 6 degrés, on a découvert déjà quelques irrégularités. M. de la Lande, en comparant sa théorie avec l'observation, a dressé une table des différences qui s'y trouvent; les différences sont très-petites en elles-mêmes, mais elles sont dans le même sens. Nous devons donc nous borner à croire que l'hypothèse circulaire doit représenter assez exactement, pendant quelque temps encore, le cours de cet astre, que son orbite a une excentricité sensible, & qu'il est encore impossible de la déterminer.

Nous n'avions jusqu'ici aucune Planète de notre système, aussi peu visible, qui pût être confondue avec une Étoile de la septième grandeur, & celle-ci n'est pas sans doute la seule; il existe peut-être un grand nombre de corps célestes que nous découvrirons successivement, à mesure que des observations, faites avec des instrumens plus parfaits, se multiplieront davantage.

Combien M. Herschel, en portant les yeux des Astronomes vers les observations de ce genre, en leur montrant, par un examen assidu & scrupuleux du Ciel, un moyen de multiplier les découvertes, ne contribuera-t-il point à nous faire voir de nouveaux phénomènes, qu'il nous est impossible de prévoir? L'observation des petites Étoiles, que les Astronomes n'avoient jusqu'ici presque jamais examinées, que relativement à l'utilité dont elles peuvent être, pour déterminer la position des Planètes, va devenir une des branches les plus curieuses de l'Astronomie; & il est impossible que les

les travaux néceſſaires, pour nous aſſurer du nombre des petites Planètes viſibles aux téleſcopes, & comparables en grandeur aux petites Étoiles, ou pour en déterminer le cours, ne nous conduiſent pas à des connoiſſances ſur une foule de phénomènes céleſtes, à peine ſoupçonnés, ou encore abſolument inconnus.

SUR L'INCLINAISON DU TROISIÈME SATELLITE DE JUPITER, ET SUR LES ÉLÉMENS DE L'ORBITE DE VÉNUS.

DANS les temps où les Sciences ſont peu cultivées, elles s'arrêtent long-temps au même point, & un Traité complet ſur une Science particulière, peut ſervir pendant pluſieurs ſiècles, & devenir un dépôt où tous ceux qui veulent s'inſtruire, trouveront toutes les connoiſſances réunies. Il n'en eſt pas de même parmi nous, quelques années ſuffiſent pour qu'il ſoit néceſſaire d'ajouter de nouvelles théories à l'ouvrage le plus complet, pour qu'on ſoit obligé d'en perfectionner, d'en corriger quelques parties.

V. les Mém. pages 438 & 447.

M. de la Lande a publié en 1771, la ſeconde édition de ſon Traité d'Aſtronomie, & les deux Mémoires qu'il donne dans ce volume, ont pour objet d'ajouter à l'exactitude de ſon Ouvrage, en déterminant des élémens de la théorie de Vénus & du troiſième ſatellite de Jupiter, qu'il n'étoit pas poſſible de donner alors avec la même préciſion.

On ſavoit que l'inclinaiſon du troiſième ſatellite de Jupiter, n'eſt pas conſtante, mais on ignoroit ſi l'augmentation obſervée dans cette inclinaiſon, devoit produire une équation ſéculaire, ou ſi elle étoit renfermée entre certaines limites.

L'opinion de M. de la Lande en 1771, étoit que cette inclinaiſon avoit été dans ſon *maximum* en 1763, où elle étoit de $3^d\ 26'$, tandis qu'elle n'avoit été que de 3^d en

1697, & qu'elle ſe retrouveroit à ce point de *minimum* en 1729.

De nouvelles obſervations des ſatellites de Jupiter, l'ont mis en état d'appuyer cette opinion ſur des fondemens plus ſolides, il ne reſte plus aucun doute que l'inclinaiſon du troiſième Satellite n'ait commencé à diminuer. Ces mêmes obſervations lui ont montré que les équations empiriques de M. Wargentin, ne donnoient pas les variations de l'inclinaiſon du troiſième Satellite, avec la même exactitude que l'hypothèſe de M. Maraldi, qui conſiſte à ſuppoſer que la révolution des nœuds de l'orbite du troiſième Satellite, rapportée à celle du ſecond, eſt de cent trente-deux ans.

Dans le ſecond Mémoire, M. de la Lande corrige les élémens de la théorie de Vénus, d'après de nouvelles obſervations des conjonctions inférieures de cette Planète, qu'il regarde comme les plus propres à donner des réſultats certains & précis.

SUR LA CONSTELLATION DES PLÉÏADES, ET SUR L'OPPOSITION DE JUPITER, du 12 Mars 1779.

V. les Mém. p. 505.

M. Jeaurat donne ici, d'après des obſervations faites en 1779, la poſition de ſoixante-quatre Étoiles des Pléïades. Il compare avec les poſitions déterminées par M. Caſſini, & M. l'abbé de la Caille, celles de ſix des ſept principales Étoiles de cette Conſtellation, car la ſeptième, connue ſous le nom de *Pléïone*, paroît avoir un mouvement propre qui n'eſt point encore bien connu. Cette comparaiſon lui donne 24′ 25″ pour le mouvement des Étoiles en longitude en vingt-neuf ans, ce qui fait environ 5″ de plus en trente ans qu'on ne le ſuppoſe communément.

L'obſervation de l'oppoſition de Jupiter en 1779, a été faite dans des circonſtances favorables, & avec beaucoup

d'exactitude. En la comparant aux Tables, M. Jeaurat trouve que celles de M. Caſſini s'accordent le mieux avec l'obſervation, enſuite celles de M. Wargentin & de M. Jeaurat lui-même, qui à peine diffèrent entr'elles; celles de Halley ſont les plus éloignées. Mais une obſervation iſolée ne ſuffit pas pour juger du degré d'exactitude des différentes Tables, & M. Jeaurat remarque que pour d'autres obſervations de l'oppoſition de Jupiter, ſes Tables & celles de M. Wargentin ont été plus conformes aux obſervations que celles de M. Caſſini.

SUR LA COMÈTE de 1779.

CETTE Comète a été obſervée par M. Meſſier, depuis le 18 Janvier qu'il l'a découverte, juſqu'au 17 Mai; c'eſt la vingt-deuxième dont il ait ſuivi le cours, & la ſoixante-quatrième dont l'orbite ait été calculée. V. les Mém. p. 318.

Les élémens de l'orbite de celle-ci ont été déterminés ſéparément par M.rs de Saron, d'Angos, Méchain & Reggio; d'après des obſervations différentes, ils s'accordent entr'eux avec beaucoup de préciſion, & l'orbite calculée diffère très-peu des obſervations.

M. Meſſier joint à ſon Mémoire la détermination de deux cents ſoixante-onze Étoiles, auxquelles il a rapporté les poſitions de la Comète, & il le termine par un compte détaillé des obſervations de la même Comète, faites dans différentes parties de l'Europe.

SUR LA LONGITUDE DE LA NOUVELLE ZEMBLE.

LES Hollandois ont déterminé en 1597, la longitude de la nouvelle Zemble, d'après une conjonction de la Lune & de Jupiter, obſervée le 24 Janvier. L'exactitude de cette V. les Mém. p. 381.

détermination peut être affectée, ſoit par l'erreur des Tables aſtronomiques, ſoit par celle de l'heure à laquelle les Hollandois ont fait l'obſervation. M. le Monnier prouve ici, que ſi on ſuit les Tables des Inſtitutions aſtronomiques, il n'y a point une erreur ſenſible dans la détermination des Hollandois, qu'en prenant celles de Mayer, l'erreur peut être d'un degré tout au plus; mais que l'incertitude de l'heure en produit une d'environ cinq degrés ſur la longitude de cette partie de la nouvelle Zemble.

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE LUNETTE.

V. les Mém. p. 23.

LA Lunette que M. Jeaurat préſente ici aux Aſtronomes, donne deux images du même objet, l'une droite, & l'autre renverſée; pour y parvenir, il emploie un objectif percé d'un trou, l'objet eſt vu renverſé par cet objectif, tandis qu'un ſecond, qui répond à la partie vide du premier, ſert, au moyen d'un appareil convenable, à donner l'image directe. Ces deux verres doivent être formés de manière à offrir deux images égales; par ce moyen, les deux images de l'aſtre qu'on obſerve ſemblent parcourir en ſens contraire le champ de la lunette, & s'éloigner avec une vîteſſe relative, double de celle avec laquelle une ſeule image paroîtroit parcourir le champ de la même lunette: dans le paſſage du centre de l'aſtre par le centre de la lunette, les deux images coïncident, ce qui donne un moyen d'obſerver exactement le paſſage du centre, quel que ſoit le diamètre de l'aſtre.

M. Jeaurat donne ici les formules générales pour déterminer les dimenſions des verres qui doivent entrer dans la conſtruction de ces lunettes, & en déduit les conſtructions les plus avantageuſes.

Il y a joint de nouvelles dimenſions pour les objectifs

achromatiques, propres à détruire en partie l'aberration de ſphéricité, en détruiſant celle de réfrangibilité, la ſeule à laquelle M. Jeaurat avoit cru devoir s'arrêter, dans le Mémoire qu'il a donné en 1770 ſur la même matière.

SUR UN ASTÉRÉOMÈTRE.

CET Inſtrument, inventé par M. Jeaurat, ſert à trouver promptement & ſans calcul l'heure du lever & du coucher des Étoiles, il ſuffit pour cela d'orienter l'inſtrument par rapport au paſſage de l'aſtre au méridien, & à ſa déclinaiſon connue : une alidade marque ſur le champ l'heure du lever, & celle du coucher V. les Mém. p. 502.

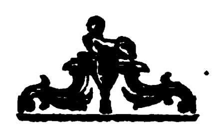
Il a été exécuté par M. de Courtenvaux, Honoraire de l'Académie, qui y grava de ſa main, *Jeaurat invenit, Courtenvaux fecit.*

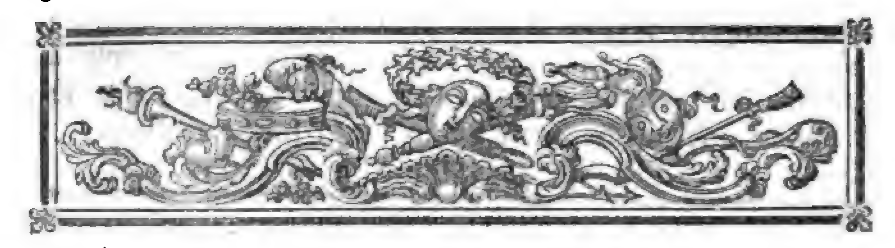
NOUS renvoyons aux Mémoires :

Les nouvelles Recherches de M. le Monnier, ſur le cap de la Circonciſion, & ſur l'Aiguille aimantée. V. les Mém. pages 12 & 15.

Les Obſervations des ſatellites de Jupiter, faites à Périnaldo en 1779 : Par M. Maraldi. Page 19.

Les Obſervations de l'éclipſe de Soleil du 14 Juin, & de celles de Lune du 30 Mai, & du 25 Novembre : Par M. Meſſier. Pages 169, 172 & 175.





OUVRAGES
PRÉSENTÉS À L'ACADÉMIE.

PRIX.

L'ACADÉMIE avoit proposé pour sujet du Prix de 1779:

La Théorie des Machines simples, en ayant égard aux effets du frottement & de la roideur des cordages.

Aucune des Pièces du Concours ne lui ayant paru remplir les vues qui l'avoient déterminée à choisir ce Sujet, elle a remis le Prix, & proposé de nouveau la même question pour 1781, avec un Prix double.

M. BEZOUT a publié cette année un Ouvrage intitulé, *Théorie générale des équations algébriques.*

L'élimination des équations qui fait l'objet principal de ce Traité, est en général l'art de tirer d'un système d'équations, qui renferment un certain nombre d'inconnues, une équation qui ne contienne plus que le moindre nombre d'inconnues possible: si, par exemple, le nombre des inconnues surpasse d'une, de deux unités, celui des équations, l'élimination consiste à chercher l'équation qui a lieu entre deux, entre trois des inconnues seulement; si le nombre des équations au contraire surpasse celui des inconnues, l'art de l'élimination consiste à trouver les conditions qui doivent avoir

lieu entre les coëfficiens des équations, pour qu'elles puissent exister en même temps : si le nombre des équations est égal à celui des inconnues, on cherche alors l'équation déterminée qui donne la valeur d'une de ces inconnues. Ce dernier cas est le plus commun, & celui qui a été le plus souvent l'objet de la recherche des Géomètres.

La théorie de l'élimination est une des plus importantes de l'Analyse ; c'est de la perfection de cette théorie, de la simplification des méthodes d'éliminer, que dépend le grand problème de la solution générale des équations déterminées. Il semble d'abord que l'élimination ne doive présenter d'autres difficultés que celle de la longueur des calculs ; mais d'abord ces calculs sont tellement compliqués, qu'ils deviennent impratiquables même pour des systèmes d'équations en petit nombre & peu élevées. Ensuite, on s'est aperçu que l'équation résultante, à laquelle on parvient par des éliminations successives, est d'un degré plus élevé qu'elle ne devoit être, qu'elle a dans ce cas des facteurs inutiles à la solution du problème proposé, des racines qui ne satisfont point au système d'équations que l'on considère.

Il est donc très-important d'avoir d'abord un moyen de connoître, par l'inspection du système d'équations, quel doit être le degré de l'équation résultante, & ensuite d'obtenir cette équation débarrassée de ces facteurs inutiles.

Cette recherche est d'autant plus intéressante, que son utilité ne se borne point, comme on pourroit l'imaginer, à faciliter, à rendre plus sûre la solution des problèmes particuliers que l'on peut se proposer. Il y a un grand nombre de questions d'Analyse, pour lesquelles il suffit de connoître, *a priori*, le véritable degré d'une équation résultante, & dont la solution a pour objet de connoître non la valeur des inconnues, mais certaines propriétés dépendantes de la forme des équations qui les déterminent ; c'est pour cela qu'il ne suffit pas de connoître le degré de l'équation résultante d'un système d'équations, dont chacune renferme tous les termes, mais qu'il peut être très-utile de connoître ce degré pour un

ſyſtème d'équations, où certains termes manquent ſuivant un ordre ſyſtématique qu'on peut ſuppoſer.

Telle eſt la première queſtion que M. Bezout ſe propoſe, & il prouve rigoureuſement, par une méthode nouvelle, qui lui appartient, que l'équation réſultante ne doit monter jamais au-deſſus d'un degré égal au produit des degrés de toutes les équations du ſyſtème: il applique cette méthode à plusieurs ſyſtèmes d'équations aſſujettis à certaines conditions, il fait voir pourquoi, dans les différentes hypothèſes qu'il conſidère, l'équation réſultante doit toujours s'abaiſſer, & il fixe les limites de cet abaiſſement.

Il s'occupe enſuite de la recherche des moyens les plus ſimples pour trouver cette équation réſultante; on connoît le degré qu'elle doit avoir, il ne s'agit donc plus que d'en déterminer les coëfficiens. Il réduit cette recherche à l'élimination d'un certain nombre d'inconnes renfermées dans un ſyſtème d'équations du premier degré. On avoit, il y a déjà long-temps, des formules générales pour ce cas, mais ces formules avoient l'inconvénient d'être beaucoup trop compliquées, & de préſenter même quelques difficulrés dans leur application aux ſyſtèmes, où les équations n'avoient pas une forme ſymétrique: M. Bezout a donc été obligé de chercher une autre méthode; celle qu'il propoſe, eſt auſſi ſimple & auſſi commode, que la nature du problème le permet.

Cette méthode a un avantage important, ſur lequel nous croyons devoir inſiſter, elle réduit à des opérations qui ont une forme régulière, la plus grande partie des calculs qui exigent la ſolution des problèmes particuliers; il ſuffiroit donc de ſe familiariſer avec ces opérations, de chercher des moyens de les abréger, ou d'apprendre par l'habitude à les faire avec rapidité, pour ſe mettre en état de réſoudre complétement une ſoule de problèmes que la longueur exceſſive des calculs a obligé de réſoudre par des méthodes indirectes.

Nous ne ſuivrons pas M. Bezout dans tous les détails d'une théorie qu'il a portée beaucoup plus loin qu'aucun des

des Analiſtes qui l'ont précédé, nous nous bornerons à obſerver qu'elle eſt auſſi ſimple que générale; l'idée très-ingénieuſe de produire l'équation réſultante, en ajoutant entr'elles toutes les équations du ſyſtème, multipliées par des facteurs indéterminés, & l'application heureuſe à l'art des éliminations de quelques Théorèmes nouveaux ſur le calcul des différences finies, tels ont été les fondemens de tout l'édifice, dont les détails offroient d'ailleurs à chaque pas, des difficultés qui ne pouvoient être levées que par une main très-habile.

Il ne nous reſte qu'à répondre à ceux qui demanderoient à quoi ſert un Traité ſur l'élimination; nous avouerons ſans peine qu'il n'a point une utilité immédiate, mais preſque aucune théorie dans les Sciences n'a cet avantage. Un Sauvage, en voyant une maiſon qui n'eſt pas encore au premier étage, pourroit regarder comme un amuſement inutile, la peine que l'on prend pour élever perpendiculairement cette maſſe de pierres, il ne comprendroit point quel peut être l'objet de ces fondations creuſées ſi avant, & avec tant de peine; l'utilité de chaque partie n'exiſte que par ſon rapport avec le but général de tout l'édifice, qu'il ne peut ſaiſir d'avance dans ces premiers élémens qui frappent ſes regards; mais le même homme verra au premier coup-d'œil, l'utilité d'un meuble de peu d'importance; dira-t-on que l'art de former ce meuble, eſt au-deſſus de l'art d'un Architecte? Il en eſt de même de toutes les Sciences. Ce ne ſont pas les travaux immédiatement applicables à la pratique, qui ont l'utilité la plus réelle, la plus grande, la plus durable, qui exigent le plus d'efforts, & qui méritent une plus grande reconnoiſſance; car ce n'eſt pas ſeulement ſur l'utilité actuelle qu'elle doit ſe meſurer, mais ſur l'utilité de tous les temps, ſur les efforts que ces grandes théories ont dû coûter, ſur le petit nombre d'hommes dont on peut eſpérer de tels efforts & de tels ſervices. Il faut ſonger, non à l'utilité particulière qui peut réſulter de telle découverte, de tel traité, mais à celle qui

résultera un jour des progrès de la Science dont ce traité, cette déconverte sont des élémens nécessaires, & compter parmi nos Bienfaiteurs, ceux qui ont fourni ou arrangé quelques matériaux de cet édifice immense qui s'élève pour d'autres générations.

LES Mémoires présentés à l'Académie en 1779, & qu'on a jugés dignes d'être imprimés dans le Recueil des Savans Étrangers, sont au nombre de vingt-deux:

Sur les Apocins: Par M. Desfontaines.

Sur le Phosphore tiré des os: Par M. Nicolas.

Sur les Orties de mer: Par M. Vastel.

Sur l'Éclipse de Soleil du 24 Juin 1778: Par M. Méchain.

Sur l'opposition de Jupiter: Par le même.

Sur le *Periploca:* Par M. Descemet.

Sur les Apocins: Par le même.

Sur la famille des Plantes à fleurs composées: Par M. Desfontaines.

Sur le genre des *Cedrus* & des *Juniperus:* Par M. Descemet.

Sur la *Tremollia:* Par le même.

Sur le *Berberis:* Par le même.

Sur l'analyse du Seigle ergoté, & sur ses effets: Par M. l'abbé Tessier.

Sur les *Protea*, ou Arbres-d'argent: Par M. Desfontaines.

Sur quelques nouveaux genres de Plantes: Par le même.

Sur le mouvement des étamines du Seigle: Par M. l'abbé Tessier.

Sur les maladies du Blé: Par le même.

Sur la Comète de 1779 : Par M. Méchain.

Sur la liquation du Cuivre : Par M. Duhamel, Correspondant de l'Académie.

Obſervations Aſtronomiques : Par M. Garipuy, Correspondant de l'Académie.

Sur la rotation du Soleil : Par M. Charles.

Obſervations d'Éclipſes de Soleil & de Lune : Par M. d'Agelet.

Sur le Calcul Intégral : Par M. Charles.

Sur un accident occaſionné par des vapeurs méphitiques ; Par M. Marcorelle, Correſpondant de l'Académie.

Sur les Éclipſes de Lune : Par M. Wallot, Correſpondant de l'Académie.

Nous avons oublié de faire mention, dans la liſte des Mémoires approuvés en 1777, d'un Mémoire de M. Marcorelle, ſur des Météores extraordinaires.





ÉLOGE

DE M. DE JUSSIEU.

JOSEPH DE JUSSIEU, Aſſocié de l'Académie des Sciences, Docteur en Médecine de la Faculté de Paris, naquit à Lyon, le 3 Septembre 1704; il étoit frère de M.rs Antoine & Bernard de Juſſieu, & le dernier de ſeize Enfans. Cette famille nombreuſe a donné dans le même temps trois Botaniſtes à l'Académie, illuſtration unique juſqu'à préſent dans l'hiſtoire des Sciences.

Formé par ſes frères plus âgés que lui, & qui étoient déjà célèbres dans la Botanique, lorſqu'il ne faiſoit que ſortir de l'enfance, ſon premier penchant le portoit à ſuivre la même carrière; cependant il étoit né avec une de ces imaginations vives qui, lorſqu'elles ſont jointes à un eſprit juſte, & à un cœur droit, peuvent rendre inconſtant dans la jeuneſſe, mais ne laiſſent plus dans l'âge mûr qu'une activité utile: abandonnant bientôt ſon premier projet, il quitta l'étude de la Botanique pour celle des Mathématiques, & la profeſſion de Médecin pour l'état d'Ingénieur. Il acquit alors des connoiſſances que ſouvent dans la ſuite, il eut occaſion d'employer, & que peut-être on devroit regarder comme un préliminaire eſſentiel dans toutes les Sciences naturelles, ſoit parce que dans chacune il ſe préſente des queſtions où l'application de ces connoiſſances eſt néceſſaire, ſoit parce que ces mêmes connoiſſances donnent à ceux qui les cultivent, l'habitude d'être plus difficiles ſur les définitions & ſur les preuves. A meſure que les Sciences ſe ſont étendues, leur diſtinction a été plus abſolue, & leur limites plus marquées; mais il ſeroit peut-être auſſi nuiſible à

leurs progrès, de trop les isoler, que de trop les confondre. Après cette diversion qui fut très-courte, M. de Jussieu revint à des occupations vers lesquelles il se sentoit rappelé, parce qu'elles lui étoient communes avec des frères qu'il chérissoit.

En 1735, il fut choisi, comme Botaniste, pour accompagner au Pérou les Astronomes de l'Académie; il les suivit dans ce voyage célèbre, profitant des relâches les moins longues pour envoyer à ses frères les plantes & les graines qu'il recueilloit. Arrêté plus d'une fois par des maladies courtes & violentes, il s'en relevoit pour se livrer avec une ardeur plus grande aux fatigues qui les lui avoient causées; il n'avoit qu'une seule crainte, & ne voyoit qu'un danger, celui de quitter un pays sans l'avoir observé.

A la vérité l'amour des Sciences n'étoit pas la seule passion qui l'animât; on voit par ses Lettres, que l'idée du plaisir qu'il préparoit à ses frères, par chacun de ses envois, eût suffi pour lui faire tout risquer & tout supporter.

Les Astronomes virent avec quelque surprise, que le Botaniste qu'on leur avoit associé, étoit en même temps un Mathématicien éclairé, capable de concourir avec eux aux opérations astronomiques. M. Bouguer a dit, après son retour, qu'aucun de ses Coopérateurs ne lui avoit été plus utile que M. de Jussieu; M. Bouguer alloit même plus loin, mais il avoit eu à combattre, dans ses Confrères, quelques prétentions très-excusables sans doute, si on songe qu'il étoit bien naturel d'être jaloux d'une gloire qui avoit tant coûté; & il n'avoit trouvé dans M. de Jussieu que de la docilité & du zèle.

Pendant le temps employé aux travaux astronomiques, M. de Jussieu observa les différentes espèces d'arbres qui donnent le quinquina, les caractères botaniques qui distinguent chaque espèce, le degré de vertu de chacune, les arbres dont on mêle frauduleusement l'écorce avec celle du quinquina, il apprit aux habitans mêmes du pays à employer cette écorce avec méthode, à en reconnoître les différentes

eſpèces, à en tirer la matière extractive: lui-même prépara une quantité conſidérable d'extrait de quinquina, pour l'envoyer à ſes frères. Cet extrait s'eſt trouvé plus efficace que celui qu'on prépare en France, & ſi, comme le croyoit M. de Juſſieu, l'extrait peut dans tous les cas être ſubſtitué à l'écorce elle-même, peut-être il ſeroit utile que l'uſage d'envoyer le quinquina ſous cette forme s'établît dans le Commerce; le tranſport ſeroit moins embarraſſant, la vertu du quinquina s'altéreroit moins, & la fraude ne ſeroit vraiſemblablement ni plus facile, ni plus dangereuſe, ni plus embarraſſante à reconnoître.

Cependant les Aſtronomes avoient rempli l'objet de leur voyage, & ils ſe préparoient à retourner en Europe. Sept ans de travaux pénibles euſſent pu ſuffire au zèle de M. de Juſſieu; il eût revu une famille chérie, il eût joui de la gloire de ſes recherches, mais il n'avoit vu encore que des contrées habitées par des Européens, défigurées par la culture, ou du moins parcourues avant lui par quelques Voyageurs, & il laiſſoit derrière lui des pays immenſes, où une foule d'objets nouveaux devoient frapper les yeux du premier obſervateur qui oſeroit y pénétrer, où la Nature ſeule avoit réglé la diſpoſition des végétaux, & donné à la terre les plantes qu'elle devoit produire: il ſavoit que les découvertes y ſeroient plus faciles & moins glorieuſes, que le voyage ſeroit plus pénible; mais il voyoit auſſi qu'à chaque pas il pouvoit eſpérer ou le plaiſir de voir une choſe nouvelle, ou la ſatiſfaction de faire une obſervation utile. M. de Juſſieu ne put ſe réſoudre à quitter le Pérou ſans avoir parcouru ces contrées inconnues: la difficulté de tirer des ſecours de l'Europe n'étoit pas un obſtacle pour lui; il étoit Médecin, & un Médecin françois étoit regardé dans ces pays, à peu-près comme dans l'ancienne Grèce on regardoit cette famille des rois de Carie, long-temps dépoſitaire preſqu'unique des ſecrets de la Médecine, & à laquelle un peuple enthouſiaſte dans ſa reconnoiſſance, avoit ſuppoſé une origine céleſte. L'admiration pour M. de Juſſieu eut une manière de s'exprimer

bien différence de celle des anciens Grecs : il reçut une défenſe abſolue de ſortir juſqu'à la fin d'une maladie épidémique dans laquelle on avoit eu beſoin de ſon ſecours; on décerna des peines contre quiconque favoriſeroit ſon évaſion ; on promit une récompenſe à celui qui l'arrèteroit s'il paſſoit la frontière. Ces précautions honorables & tyranniques étoient bien inutiles, on eût pu s'en repoſer ſur ſon zèle pour l'humanité. Si cette partie du voyage de M. de Juſſieu a été perdue pour la Botanique, elle ſervira du moins à l'hiſtoire de la Médecine; on a trouvé dans ſes papiers, des détails intéreſſans ſur la marche de la petite vérole au Pérou, ſur les maladies épidémiques de ce pays, ſur une maladie ſingulière qui ſuivit une éruption du Cotopaxi, & à laquelle on donna le nom de ce volcan.

Retenu, & par les fonctions de Médecin, & par pluſieurs maladies violentes auxquelles il ne put échapper, M. de Juſſieu ne commença ſes nouveaux voyages qu'en 1747; c'eſt alors qu'il parcourut pluſieurs pays ſauvages & inhabités: il falloit traverſer des lacs immenſes ſur de petits bateaux de jonc, paſſer des torrens ſur des ponts de corde de cent pieds de long; ailleurs, de longues pièces de bois, appuyées ſur les bords de la rivière, & ſur des rochers placés au milieu & beaucoup plus bas que les rives, compoſoient un pont formé de deux plans inclinés très-rapides: d'autres fois, le pont étoit fait de bateaux de jonc, recouverts par des faſcines, & ſupportés par des cables du même jonc, étendus d'un bord du torrent à l'autre. M. de Juſſieu nous a laiſſé des deſſins de ces ponts, monumens hardis de l'induſtrie d'un peuple ingénieux & ſauvage.

Il fut obligé de gravir ſur des rochers qui ſervent de retraite au reſte des anciens habitans du pays, à qui on donne le nom de *Rebelles*, parce qu'ils défendent leur indépendance naturelle, & qu'ils traitent en ennemis, les Européens & leurs eſclaves; mais ils reſpectèrent M. de Juſſieu, comme s'ils euſſent ſenti que, miniſtre de paix & de lumière, occupé de chercher des remèdes à des maux

communs à tous les hommes, il étoit le compatriote & l'ami de tous les peuples.

Il parcourut des déſerts où la rigueur du froid a détruit toute végétation, réduit à vivre de biſcuit & de fromage ſec; abandonné & dépouillé par ſes domeſtiques, peut-être ne dut-il la vie qu'à l'indulgence exceſſive avec laquelle on traite les voleurs au Pérou, ils auroient eu tout à riſquer & peu à gagner, en ſe débarraſſant par un crime de plus, d'un dénonciateur & d'un témoin: enfin ſeul au milieu de ces déſerts, il perd ſubitement la vue: cet état horrible ne dura qu'un jour, mais qui peut apprécier la longue & terrible durée d'un tel jour?

C'eſt à travers tant de fatigues & de dangers, que M. de Juſſieu parvint à un pays fertile, riche en plantes juſqu'alors ignorées de l'Europe; mais à peine les a-t-il recueillies, qu'il ſe livre à de nouveaux dangers, il marche au milieu des précipices dans un pays inhabité, où il découvre les reſtes immenſes des fortereſſes que les Incas oppoſoient aux incurſions des Sauvages. Ces vaſtes contrées étoient devenues déſertes, placées près du Paraguai, toute communication leur étoit interdite avec ce pays, où l'on croyoit alors que les Jéſuites avoient fondé un empire, & où ils n'avoient réellement établi que des couvens & des comptoirs: de-là il paſſe à la province de Loſmoxos, traverſant des pays marécageux & brûlans, dévoré par le Soleil, & plongé dans la fange juſqu'aux genoux, vivant de millet & de maïs, forcé de paſſer la nuit ſur les arbres, & d'abandonner la terre aux reptiles: enfin, après avoir vu tout ce que les provinces éloignées des côtes pouvoient lui offrir d'objets nouveaux, il ſe retrouva en 1750 au Potoſi.

La plus grande partie des découvertes faites dans ces voyages, eſt perdue pour nous; nous ne pouvons en préſenter que quelques fragmens, bien propres à augmenter nos regrets.

M. de Juſſieu décrivit l'eſpèce de canelle qui croît ſur les montagnes du pays de los Canelos, il ramaſſa dans une des

des vallées des Cordilières, l'hélyotrope odorant & la pervenche naturalisée depuis parmi nous ; il visita plusieurs mines d'argent, observa & décrivit les procédés employés dans la mine de mercure de Guancavelica. Il examina la montagne de Pumacanche, qu'il croit entièrement formée d'aimant, ainsi que les montagnes voisines. Il observa des sources d'eau chaude, qui s'élancent des montagnes glacées de Tunguraga & de Vilcanose. Il trouva dans les montagnes du Pérou, ces ossemens immenses, étrangers au sol où ils sont déposés, & que la Nature a semés dans les entrailles de la terre, comme des monumens de ces temps où la mémoire des hommes ne peut atteindre; mais il observa une hauteur au-dessus de laquelle ces productions animales ne se trouvent plus; c'est-là que l'empire de la mer a ses limites, ou du moins c'est-là qu'il ne reste plus de vestiges de son empire. Il se procura sur les bords du lac Chicuito, une collection nombreuse de différentes espèces d'oiseaux aquatiques, nouvelles pour nous. Il observa dans la province de los Yungas, le coca, cette plante si nécessaire aux Péruviens enchaînés dans les mines, ressource que la Nature avoit mis en dépôt dans ces contrées, comme une consolation & un soutien contre les maux que cause à leurs habitans la dureté des Européens. Ces victimes de l'avarice mâchent sans cesse les feuilles de cette plante, séchées & saupoudrées de cendre de quinoa; ces sucs restaurateurs soutiennent leurs forces, relèvent leur ame abattue par l'oppression, & leur donnent le courage de supporter le travail & la servitude.

M. de Jussieu ne se borna point à l'histoire naturelle, ou plutôt il chercha à compléter son travail, en y ajoutant la carte des pays qu'il avoit vus. En parcourant ses Journaux, dont nous ne donnons ici qu'une foible esquisse, on sent que si aucune partie de ses travaux n'eût été perdue, il nous eût fait connoître le Pérou mieux que nous ne connoissons encore plusieurs parties de l'Europe.

Arrivé dans le Potosi, M. de Jussieu, qui cependant sentoit déjà les premières atteintes des infirmités dont il a

été la victime, non-seulement y pratique la Médecine, mais il l'enseigne aux Médecins Espagnols & Péruviens; il leur apprend à connoître les vertus des Plantes, lève les Cartes de la province, examine les mines, réforme les travaux publics, enfin on ne lui permet point de partir qu'il n'ait rétabli un pont nécessaire à la communication du pays, & ruiné depuis vingt ans; c'étoit pour la seconde fois qu'il éprouvoit la même violence, & qu'on récompensoit son talent & son zèle par la perte de sa liberté. Le Botaniste redevient ingénieur, il reconstruit le pont, forme des digues qui doivent retenir le fleuve grossi par des torrens, rétablit des chemins. Ainsi dans les premiers âges des Nations, tous les Arts, toutes les Sciences appartenoient à un seul homme. Une pyramide élevée aux dépens du public, atteste la reconnoissance du pays pour M. de Jussieu, & la violence qu'on lui avoit faite, violence dont cette pyramide étoit une sorte de réparation, car ceux qui peuvent tout, croient trop aisément que par des marques d'honneur ils peuvent aussi compenser ou réparer une injustice.

Quatre années furent employées à ces travaux. Le Gouverneur du pays, M. de Xauregui qui logeoit chez lui M. de Jussieu, lui avoit des obligations personnelles du soin qu'il avoit pris de sa famille, il le retint un an, le flattant de l'espérance de le ramener bientôt sur les côtes, & de le conduire en Europe. Cette année écoulée, M. de Jussieu revint avec M. de Xauregui à Lima, par une autre route que celle qu'il avoit prise en quittant cette ville, & y arriva vers la fin de Décembre 1755.

Il n'aspiroit d'abord qu'à retourner dans sa patrie; sa santé étoit affoiblie, & son courage commençoit à l'abandonner; M. de Xauregui partit sans lui, soit qu'il ne voulût pas exposer M. de Jussieu aux fatigues du voyage, par le cap Horn, soit qu'il desirât laisser auprès de sa femme un Médecin habile, & nécessaire à sa santé. M. de Jussieu, resté à Lima, ne recevant de sa patrie aucun secours, privé de ses appointemens comme si, en s'obstinant à rendre son travail plus

complet, il eût mérité d'en perdre la récompense, fut obligé de se livrer de nouveau à la pratique de la Médecine. La Géométrie, seule étude *qui le satisfît par l'évidence de ses démonstrations* (ce sont ses termes) occupoit le reste de son temps; il ne voyoit plus dans la Botanique, qu'une Science à laquelle il avoit sacrifié sa santé & sa fortune, qui ne l'avoit pas même récompensé par la gloire, de ce qu'elle lui avoit coûté; le plaisir de soutenir la passion plus constante & plus heureuse de ses frères, auroit soutenu son courage; mais on lui mandoit souvent, que ses envois de graines & de plantes avoient été perdus. Enfin il apprit la mort de son frère aîné, cette nouvelle le consterna. *Je ne puis penser à lui*, écrivoit-il, *sans que mon sang ne se gèle, & que mon cœur ne se couvre d'un voile noir; ce n'est point un frère, c'est mon père que j'ai perdu.*

Vers 1761, le départ de M.[de] de Xauregui que la santé de M. de Jussieu ne lui permit pas de suivre, mit le comble à ses maux; il devint sujet à de fréquens vertiges, a mémoire s'affoiblit; il continuoit cependant de voir des nalades, fuyant les Grands, dont la confiance inquiète & xigeante lui paroissoit un esclavage, préférant les Pauvres, lonnant l'exemple du désintéressement dans des pays, où e seul amour de l'or attire les Européens: consumé du regret le vivre loin de sa patrie, & manquant de courage pour aincre les obstacles qui le retenoient, ne pouvant supporter idée de rester au Pérou, & ne voyant qu'avec effroi les angers & la fatigue du retour; conservant sa générosité & s vertus, mais trop foible pour se défendre contre ceux ui ne craignoient point d'en abuser; encore utile aux atres, & devenu inutile à lui-même: enfin ses véritables nis sentirent combien son départ devenoit nécessaire, ils y déterminèrent, & il quitta Lima, où ce départ fut regardé ar le peuple comme un malheur public. Cet homme qui voit été pendant vingt ans le bienfaiteur du pays où il voit vécu, fut obligé d'emprunter pour subvenir aux frais e son voyage.

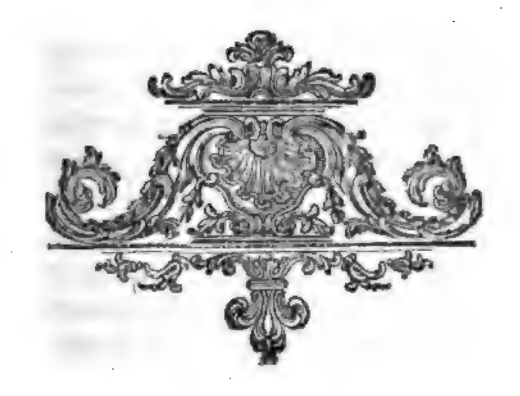
Sa tête avoit perdu ſon activité & ſes forces, ſon ame étoit épuiſée, mais ſa raiſon étoit ſaine encore. Le voyage rétablit ſa ſanté, mais ſa tête s'affoiblit de plus en plus; il revint à Paris en 1771, après trente-ſix ans d'abſence, retrouver ſon frère, le reconnoître & pleurer dans ſes bras. Il ſavoit encore qu'il avoit un frère & qu'il l'aimoit, mais ce fut la ſeule choſe dont il eût conſervé le ſouvenir, ou plutôt le ſentiment; ſes découvertes, ſes vues, ſes travaux, le fruit de quarante années conſacrées aux Sciences, ſes chagrins, ſes malheurs, tout étoit effacé de ſa mémoire. Un frère malheureux, reçu dans une famille vertueuſe, un martyr de la Botanique, recueilli dans une maiſon qu'on pourroit appeler le ſanctuaire de cette Science, fut traité avec le reſpect qu'on devoit à ſon malheur & à la cauſe de ce malheur; on lui prodigua les ſoins, ils furent inutiles. Il vit mourir ce frère qu'il avoit tant aimé, mais il étoit devenu incapable de ſentir ſa perte, & par une eſpèce de compenſation dont il faut rendre grâce à la Nature, ſon état lui épargna du moins le ſentiment de cette dernière infortune. Ses neveux, à qui il reſtoit ſeul, lui donnèrent toutes les marques de tendreſſe qu'il pouvoit recevoir, ils cherchoient à prolonger, à adoucir ſa vie, à conſerver long-temps les reſtes reſpectables d'un vieillard, qui aſſez malheureux pour avoir perdu juſqu'au ſouvenir de ce qu'il avoit été, méritoit que les autres en gardaſſent la mémoire.

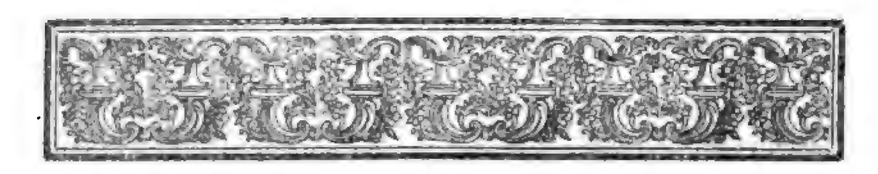
Il recevoit ces ſecours avec une ſenſibilité & une douceur touchante; privé de la mémoire, incapable de ſentir combien il avoit de droits à tout ce qu'on faiſoit pour lui, les ſoins de chaque jour lui paroiſſoient un nouveau bienfait auquel il répondoit chaque jour par une reconnoiſſance nouvelle, & l'état où il étoit tombé, lui avoit laiſſé ſon caractère, naturellement doux & ſenſible. Bientôt ſa vie ne fut plus qu'un aſſoupiſſement continuel, ſes membres ſe retirèrent, & il mourut de la gangrène, après huit jours de ſouffrances, le 11 Avril 1779, âgé de plus de ſoixante-quatorze ans.

Telle fut la fin de quarante ans de travaux, & de quinze ans de malheurs.

M. de Juſſieu avoit été fait Adjoint-Botaniſte de l'Académie en 1743, lorſqu'il étoit au Pérou: en 1758 on le nomma Aſſocié-vétéran, à cauſe de ſa longue abſence. Son état, à ſon retour, ne lui permit point de paroître à nos Aſſemblées, & par une ſingularité unique, il fut Académicien pendant trente-ſix ans, ſans avoir jamais paru à l'Académie; il a conſacré aux Sciences ſa vie entière, & n'a pas même publié un ſeul Mémoire.

M. de Juſſieu ſon neveu, croit devoir à la mémoire de ſon oncle, de donner un Journal détaillé de ſon voyage, de publier ceux de ſes travaux que les naufrages & les accidens ont épargnés; c'eſt-là qu'on pourra juger de tout ce qu'on a perdu, & qu'on verra combien d'eſtime & de reconnoiſſance on devoit à cet homme, oublié, maltraité même pendant ſa vie, & qui a fait aux Sciences & à l'humanité, le ſacrifice le plus entier peut-être dont les Annales des Sciences puiſſent s'honorer.





ÉLOGE

DE M. LE COMTE D'ARCI.

PATRICE D'ARCI, Penſionnaire-Géomètre de l'Académie des Sciences, Maréchal des camps & armées du Roi, Chevalier de l'Ordre de Saint-Louis, & Commandeur de l'Ordre de Saint-Lazare, naquit à Gallowai en Irlande, le 27 Septembre 1725, de Jean d'Arci & de Jeanne Linch, fille de Robet Linch, Chevalier-Baronnet.

Les Comtes d'Holderneſſ en Angleterre, dont le nom eſt *d'Arci*, regardent la famille des d'Arci d'Irlande, comme iſſue de la même ſouche que la leur, & ſortie d'un ſecond mariage de Jean d'Arci, Lord-juſticier d'Irlande, ſous Édouard III. La Maiſon d'Arci, comme les autres Maiſons angloiſes, dont le nom eſt françois, & dont la ſource eſt inconnue, fait remonter ſon origine à l'un des Chevaliers normands qui ſuivirent en Angleterre Guillaume le Conquérant. Nous ne nous arrêterons point ſur ces détails, bien peu importans aux yeux d'une Compagnie ſavante, où les Ouvrages ſont tout, & où les titres ne ſont rien: mais les Confrères de M. le Comte d'Arci peuvent voir avec intérêt que la France a quelque droit de le revendiquer ſur l'Irlande.

Ses parens, à la fois Jacobites & Catholiques, étoient opprimés, à ce dernier titre, ſous des loix cruelles, indignes de la ſageſſe & de l'humanité des loix angloiſes, mais qu'une fauſſe politique avoit cru néceſſaires dans le ſiècle dernier: ils avoient mieux aimé renoncer à leurs droits, qu'à la fidélité qu'ils avoient vouée à leur religion & à la famille des Stuarts,

La France eſt l'aſyle naturel des Irlandois catholiques qui annoncent de l'activité & des talens, & que les loix de leur patrie condamnent à l'inutilité & à l'inaction. Le jeune d'Arci fut envoyé à Paris en 1739, auprès d'un de ſes oncles; le haſard le plaça dans la maiſon où logeoit M. Clairaut le père; il devint ſon élève, & mérita bientôt d'être le diſciple ou plutôt le compagnon d'étude de M. Clairaut le fils: c'étoit à l'époque où la France commençoit à reprendre dans les Sciences-mathématiques le rang qu'elle avoit perdu après la mort de Deſcartes & de Paſcal, & qu'elle a ſu conſerver depuis. M. d'Arci fit des progrès rapides: après trois ans d'étude, âgé ſeulement de dix-ſept ans, il donna une nouvelle ſolution du problème de la courbe d'égale preſſion dans un milieu réſiſtant: les ouvrages de la jeuneſſe de M. Clairaut avoient accoutumé à de plus grands prodiges; mais c'étoit beaucoup alors que de ſavoir à dix-ſept ans les principes de la Mécanique tranſcendante & ceux du Calcul intégral, de mettre en équation un problème de Dynamique, & de conſtruire une équation différentielle du troiſième ordre, à laquelle la méthode de M. d'Arci l'avoit conduit: d'ailleurs, il joignoit à ſa ſolution des remarques qui annonçoient une ſagacité dont il donna des preuves plus certaines dès l'année ſuivante, par la ſolution d'un nouveau problème, ſolution qui obtint également les ſuffrages de l'Académie. Il s'agiſſoit de déterminer la courbe que décrit dans l'eſpace un corps peſant qui gliſſe par ſon poids le long d'un plan mobile, en même-temps que la preſſion de ce corps fait mouvoir horizontalement le plan qui le porte; à la vérité, ce problème avoit été réſolu par M.[rs] Jean Bernoulli & Clairaut; mais dans la ſolution qu'en donne M. d'Arci, par une méthode qui lui eſt propre, on aperçoit déjà l'empreinte de ſon talent, & même de ce caractère original qui ſe retrouve dans toutes ſes productions.

La guerre vint alors enlever aux Sciences M. le Chevalier d'Arci (c'eſt le nom qu'il prit en entrant au Service, & que nous lui conſerverons dans cet Éloge, parce que c'eſt celui

ſous lequel il a publié tous ſes ouvrages) il fit, comme Capitaine dans le régiment de Condé, deux campagnes en Allemagne, & une en Flandre: en 1746 il fut deſtiné à ſe joindre au ſecours que le Roi envoyoit au Prétendant, qui avoit débarqué en Écoſſe; c'étoit pour ſa patrie, pour ſa famille, pour les droits de celui qu'il regardoit comme ſon Prince, que M. d'Arci alloit combattre ; ſon eſpérance fut trompée, une flotte angloiſe enleva le convoi; on avoit eſpéré qu'il échapperoit à la faveur de l'obſcurité, mais il fut découvert par l'amiral Knowles, à l'aide d'une lunette de nuit, inſtrument qui commençoit alors à être connu en Angleterre. Né en Irlande, M. d'Arci avoit été pris en portant les armes contre le Gouvernement de ſa patrie, la loi le condamnoit, mais l'humanité, la juſtice & la politique engagèrent à le traiter comme un Officier françois.

Les infortunes du Prétendant n'avoient pu rien changer à ſes droits; non-ſeulement M. le Chevalier d'Arci continua de le regarder comme le fils & l'héritier de ſon Souverain, mais il conſerva le même attachement pour la perſonne du Prince Édouard. Il défendoit les vertus ou les talens qu'il avoit cru voir en lui, avec le même zèle qu'il avoit défendu ſes droits à la Couronne d'Angleterre: il avoit été prêt à répandre ſon ſang pour le replacer ſur le Trône de ſes ancêtres, il eût ſoutenu, aux mêmes riſques, qu'il étoit digne d'y remonter. Enfin, lorſque la France eut refuſé un aſyle à un deſcendant de Henri IV, lorſque Rome eut abandonné la cauſe d'un Prince, dont l'aïeul avoit perdu trois couronnes par ſon zèle pour la Religion Catholique, lorſque la voix publique jugeoit avec tant de ſévérité un Prince malheureux, dont l'ame n'avoit pu réſiſter à une ſi longue ſuite de revers, M. d'Arci ne fut point ébranlé.

La Maiſon des Stuarts, ſemble n'avoir été montrée au monde, que pour donner aux Rois une leçon du malheur & des dangers attachés à la Puiſſance ſouveraine; elle ſeule, parmi tant de familles détrônées, a vu, dans l'eſpace de ſoixante ans, deux têtes couronnées tombant ſous la hache des

des bourreaux, par des aſſaſſinats revêtus des formes de la Juſtice. Mais aucune famille auſſi n'a conſervé plus long-temps après ſa chute, des partiſans ſi zélés. Il eſt impoſſible cependant d'attribuer ce zèle, ni à l'attachement pour la Religion Catholique qui avoit été le prétexte ou la cauſe des malheurs de Jacques II, puiſque des Proteſtans de toutes les Sectes ont partagé ce ſentiment; ni à des vues ambitieuſes, puiſque ce zèle a ſurvécu à toute eſpérance raiſonnable du rétabliſſement des Stuarts. On ne peut trouver la cauſe d'une fidélité ſi conſtante, que dans l'excès même des malheurs de cette Maiſon, dans la proſcription terrible prononcée contre elle par la famille qui l'a remplacée ſur le Trône: tant la perſécution a de force pour attacher les ames généreuſes à ceux qui en ſont les victimes!

Ce ne fut qu'en 1749, après la paix, que M. le Chevalier d'Arci put entrer à l'Académie: la guerre ne lui avoit pas fait abandonner les Sciences; mais il avoit choiſi dans la Géométrie le genre de travail qui étoit le plus compatible avec la vie active & agitée qu'il étoit obligé de mener. Dans ſon premier Mémoire, il avoit employé l'Analyſe, depuis il préféra la Synthèſe, méthode qui exige plus de méditations que de calculs, & plus d'efforts que de travail. M. d'Arci lut deux Mémoires à l'Académie, même dans le courant de la guerre, l'un en 1746, avant d'être pris par les Anglois; l'autre en 1747, après ſon échange: le premier renfermoit un principe général de mécanique, celui de la conſervation du mouvement giratoire. Ce même principe avoit été donné en 1745, par M.rs Daniel Bernoulli & Euler; mais il n'eſt pas vraiſemblable que leurs ouvrages aient été chercher M. d'Arci dans les campagnes de Flandre; d'ailleurs, il ſuffit de voir comment chacun des Inventeurs a préſenté ce même principe pour ſentir que la méthode de M. d'Arci, eſt vraiment à lui, & qu'il n'y a rien de commun entre ſa manière de traiter les queſtions mécaniques & celle de ces deux illuſtres Géomètres: enfin, ce principe ne s'applique immédiatement qu'aux mouvemens libres, & pour l'étendre aux mouve-

mens aſſujettis à des conditions, M. d'Arci employoit une méthode à la fois originale & ſimple, élégante & ingénieuſe.

En 1750, il préſenta ſon principe ſous une autre forme, il l'appela *le principe de la conſervation d'action*, pour l'oppoſer en quelque ſorte au principe de la moindre action, auquel M. de Maupertuis étoit parvenu à donner une grande célébrité, & que M. d'Arci avoit attaqué dans pluſieurs Mémoires. On ſait quelles diſputes ce principe produiſit, combien elles furent inutiles aux progrès des Sciences, & affligeantes pour ceux qui s'intéreſſent à leur gloire. Nous n'entrerons point dans ces diſcuſſions qui ont ceſſé d'intéreſſer les Mathématiciens, & que nous croyons qu'on peut regarder comme abſolument terminées, depuis qu'un Géomètre philoſophe a fixé, avec autant de préciſion que d'impartialité, ce qu'on doit penſer de la métaphyſique de ce principe, dans quelques-uns des articles dont il a enrichi l'Encyclopédie.

M. d'Arci a employé ſon principe à la ſolution de pluſieurs problèmes; parmi ceux auxquels il l'applique, on remarque le problème de la préceſſion des Équinoxes, le plus difficile peut-être de l'Aſtronomie-phyſique, & celui dont la ſolution a contribué le plus à prouver la vérité de la loi générale découverte par Newton. M. d'Alembert avoit réſolu le premier ce problème, pluſieurs années auparavant, par une méthode directe qui embraſſe la théorie générale des mouvemens des corps finis, quelle qu'en ſoit la figure. La vérité ne nous permet pas de diſſimuler que les Géomètres s'accordent à trouver une erreur dans la nouvelle ſolution que M. d'Arci en a donnée; mais ſi on ſonge que les premiers Mathématiciens de l'Europe avoient inutilement tenté de réſoudre ce problème, que Newton lui-même n'avoit pas été plus heureux que M. d'Arci; qu'enfin, depuis que le défaut de ſa ſolution a été remarqué, de ſavans Géomètres en ont publié de nouvelles, où l'on a pu obſerver auſſi des erreurs; alors, on ſentira que celle qui eſt échappée à M. d'Arci n'affoiblit en rien les preuves multipliées que ſes autres ouvrages ont données de ſa ſagacité & de ſes talens.

Le principe de la conſervation du mouvement giratoire, comme celui de la conſervation des forces vives, comme celui de la moindre action, enfin, comme tous les autres principes du même genre, peut être ſujet à quelques exceptions, ou plutôt à quelques modifications; le calcul en avertit, il indique, il corrige les erreurs où l'on pourroit tomber en donnant à ces principes une trop grande étendue; ainſi, ils peuvent toujours être employés comme des formules mathématiques. On ſait avec quel ſuccès M.[rs] Bernoulli ſe ſont ſervis de celui des forces vives, & quel heureux uſage M.[rs] Euler & de la Grange ont fait de celui de la moindre action, mais (ainſi que l'ont remarqué eux-mêmes ces illuſtres Géomètres) on ſe tromperoit en regardant aucun de ces principes comme une des loix invariables de la Nature: il faut remarquer encore que deux de ces principes, lorſqu'ils ne ſe réduiſent pas à un ſeul diverſement préſenté, peuvent réſoudre tous les problèmes de mécanique, mais qu'en général il eſt néceſſaire d'en employer deux. Le principe lumineux & ſimple, donné par M. d'Alembert en 1742, eſt juſqu'ici l'unique qui puiſſe ſuffire ſeul à la ſolution des problèmes, parce qu'il eſt direct, & qu'il n'eſt pour ainſi dire que l'expreſſion mathématique des notions premières & eſſentielles de l'action & du mouvement; il eſt auſſi le ſeul, & par la même raiſon, qui puiſſe donner la démonſtration de tous les autres, & qui nous faſſe diſtinguer le ſens dans lequel chacun d'eux peut être regardé comme vrai.

Lorſque M. le Chevalier d'Arci entra dans l'Académie, l'Électricité occupoit tous les Phyſiciens. Cette eſpèce de mode, qui fixe ſucceſſivement les regards du public & les vues des Savans, ſur les différentes parties des Sciences, ſert à leurs progrès, quoiqu'elle ſoit plus ſouvent la ſuite que la cauſe des découvertes les plus brillantes: mais les découvertes brillantes laiſſent preſque toujours entr'elles & les vérités qui les ont précédées, un vide qu'il faut remplir. Les Inventeurs ne ſaiſiſſent pas toutes les conſéquences de leurs découvertes, n'en développent pas tous les uſages, & c'eſt

pour remplir ce vide, pour suivre ces conséquence, pour multiplier ces usages, que le concours de plusieurs Savans devient nécessaire.

L'Électricité agit sur les corps avec une force susceptible d'être assujettie au calcul, & pour analyser les phénomènes électriques, il étoit intéressant de mesurer cette force; il falloit donc chercher un électromètre. Les corps électrisés attirent ceux qui sont capables de recevoir d'eux l'électricité; deux corps doués d'une électricité contraire, s'attirent plus fortement encore; mais la force répulsive qu'exercent entre eux des corps qui ont le même genre d'électricité, & qui la reçoivent d'un même conducteur, paroît celle dont il est le plus facile de comparer les degrés d'intensité: elle fut employée dans la construction de l'électromètre que proposèrent M.rs d'Arci & le Roi; car M. le Chevalier d'Arci fit ces expériences de concert avec M. le Roi, de cette Académie, Élève comme lui de M. Clairaut. Un goût commun pour la Physique avoit resserré cette liaison de leur jeunesse, qui a duré jusqu'à la mort de M. d'Arci. Après une amitié de vingt ans, tous deux se crurent des droits à une même place, & cette concurrence, qui auroit détruit peut-être sans retour une amitié commune, ne put altérer celle de M.rs d'Arci & le Roi, même pendant le temps de la discussion; aucun des deux cependant ne parut songer à proposer le sacrifice de ses prétentions, bien sûr que son Concurrent n'eût pas voulu lui céder l'avantage de sacrifier ses droits à l'amitié.

M. d'Arci n'avoit pu faire la guerre sans réfléchir sur les parties de cet art auxquelles les Sciences qu'il cultivoit étoient plus immédiatement liées, & pendant la paix, il s'occupa de perfectionner la théorie de l'Artillerie.

La guerre est un fléau, mais c'est la guerre elle-même, & non l'art de la guerre, qui est funeste: à mesure même que l'art se perfectionne, les maux qu'elle enfante deviennent moins cruels; car, plus les succès dépendent de la science & du talent, moins les passions & la fureur multiplient les

maſſacres & la dévaſtation. Ainſi, en même temps que les progrès des lumières en morale rendront les guerres plus rares & moins acharnées, les progrès des lumières en phyſique les rendront moins ſanglantes & moins deſtructives. Il eſt donc permis, ſans bleſſer l'humanité, de louer des travaux qui ont pour objet la perfection d'un art deſtructeur. Il eſt permis de célébrer le génie qui crée de nouveaux moyens de défendre la Patrie, & de forcer à la paix ceux qui l'ont troublée; & l'on ne doit déteſter que la politique meurtrière qui fait de ces moyens de conſervation & de tranquillité un inſtrument d'injuſtice & de deſtruction.

M. le Chevalier d'Arci donna un premier Mémoire ſur l'Artillerie en 1750, continua long-temps ſes expériences, & en raſſembla les réſultats dans l'Eſſai ſur l'Artillerie, publié en 1760. L'Auteur trace, dans ſon Ouvrage, le plan d'une théorie générale de l'Artillerie, plan qu'il ne ſe propoſe pas de remplir en entier: il ſentoit que cette théorie ne pouvoit être appuyée que ſur des expériences nouvelles, & que ces expériences demandoient de nouveaux moyens.

Un des objets les plus importans, étoit la connoiſſance de la poudre. Il falloit déterminer, par des expériences exactes, quelle proportion dans les parties conſtituantes, quelle qualité de grain, quels procédés dans la manipulation, donnent à la poudre le plus de force: Il falloit ſavoir ſi la force qui eſt communiquée aux projectiles dépend de la promptitude avec laquelle la poudre s'enflamme: mais pour faire ces expériences on avoit beſoin d'une éprouvette qui donnât des réſultats précis, & il n'en exiſtoit pas. M. d'Arci imagina de ſuſpendre un petit canon à un pendule, & de juger de la force de la poudre par l'arc que le recul feroit décrire à ce canon: cet inſtrument, perfectionné depuis par lui-même, a été adopté par la Régie des poudres: il peut rendre ſenſibles de très-petites différences dans la poudre, aucune circonſtance étrangère n'en altère les réſultats; & pour juger de la ſupériorité d'une poudre ſur une autre, on trouveroit difficilement un inſtrument plus ſenſible ou plus ſûr.

Il résulte des expériences de M. d'Arci, que plus la poudre s'enflamme vîte, plus elle a de force; que le mélange exact des matières & la sécheresse de la poudre, contribuent surtout à la rendre meilleure; qu'enfin de petites différences dans la manipulation, en produisent de bien plus sensibles dans les effets, que n'en font naître des changemens dans la proportion des matières, qui au premier coup d'œil paroîtroient bien plus importans.

M. d'Arci examine ensuite quelle différence la longueur des pièces du même calibre, tirées avec des charges égales, produit dans la vîtesse du boulet; & quels sont les effets de différentes quantités de poudre employées à charger la même pièce. Pour mesurer la force des projectiles, il emploie un pendule contre lequel ces projectiles viennent frapper, & la grandeur des arcs décrits par ce pendule, donne les forces cherchées. Cette méthode que Robins a employée, est préférable à celle où l'on voudroit juger des forces par les portées, & M. d'Arci a rendu plus exacte la machine qu'il a imitée de Robins.

Ces expériences prouvent que plus on augmente la longueur des pièces, plus la force est augmentée; ou du moins, que pour de très-grandes longueurs, l'augmentation qui en résulte, surpasse de beaucoup & l'augmentation du frottement & celle de la résistance de l'air. Au contraire l'augmentation de force produite par une plus grande charge dans un canon de longueur donnée a des limites très-étroites.

La loi de la résistance que l'air oppose aux boulets, étoit un des objets les plus essentiels & en même temps le plus difficile de ces recherches. Robins avoit senti que si la loi qui donne la résistance proportionnelle aux quarrés des vîtesses, a lieu, même pour les fluides élastiques dans de petites vîtesses, elle cesse d'être juste & même approchée, lorsque les vîtesses deviennent très-grandes. Il avoit fait pour déterminer la loi qu'il falloit substituer à cette ancienne loi, une suite d'expériences intéressantes, mais elles étoient bien loin de décider la question. Ce même objet a occupé

M. d'Arci jufqu'à la fin de fa vie; avec des inftrumens meilleurs & un plan de recherches mieux combiné, il avoit des reffources mathématiques plus étendues que celles de Robins, mais il n'étoit point fatisfait encore des réfultats de fes expériences & de fes calculs ; & cette févérité pour lui-même, qui nous a privés du fruit de fon travail, eft une raifon de plus pour en regretter la perte.

Attaché comme Colonel à la fuite du régiment de Fitz-james en 1752, M. d'Arci fit avec ce Corps la campagne de 1757, & fe trouva à la bataille de Rofbach. Ce régiment, trop affoibli par la perte qu'il effuya dans cette journée, fut obligé de revenir en France; M. d'Arci fut alors employé fous M. le Comte d'Hérouville, à qui l'on avoit confié les préparatifs d'une defcente projetée fur les côtes de la Grande-Bretagne. L'examen que M. d'Arci avoit fait pendant la paix des côtes de l'Irlande, une connoiffance exacte du caractère des habitans & de leurs difpofitions, le poids qu'il pouvoit avoir auprès des reftes du parti Jacobite & des Catholiques, que les précautions injurieufes prifes contre eux avoient ulcérés fans les avoir rendus moins à craindre; fon intrépidité, fon audace, fon éloquence naturelle, pleine de véhémence & d'action, fes connoiffances dans toutes les parties de l'art militaire, enfin des reffources contre les accidens imprévus, reffources qu'on ne peut attendre que de ceux qui joignent à la pratique une théorie profonde, tous ces avantages fembloient rendre M. d'Arci non-feulement utile, mais même néceffaire, pour ainfi dire, au fuccès d'une expédition fur les côtes d'Irlande. Mais ce projet ne fut pas exécuté ; le grade de Brigadier fut la récompenfe des travaux de M. d'Arci, & une foible confolation de l'inutilité de fon zèle. La paix vint bientôt le rendre aux Sciences & à l'Académie; en 1765 il donna un Mémoire fur la durée des fenfations de la vue, celui de fes ouvrages peut-être où l'on voit briller le plus & fon talent pour imaginer des appareils qui conduifent à des expériences exactes & concluantes, & la fagacité avec laquelle il favoit

combiner & varier ſes expériences, pour en tirer des réſultats certains & précis.

Un enfant, en agitant circulairement un charbon allumé, produit l'apparence d'une roue de feu; une roue dentée qui tourne, ne préſente qu'un cercle continu; une corde ſonore qui vibre avec rapidité, paroît un loſange: ces effets ſont connus de tous les temps.

Ils prouvent que nos ſenſations ont une durée plus grande que celle de l'action de leur cauſe; l'ébranlement produit dans l'organe, ſe prolonge après que le corps extérieur a ceſſé d'agir. Ce fait a lieu vraiſemblablement pour tous nos ſens, & c'eſt de cette circonſtance que, peut-être, on pourra déduire un jour les loix de la compoſition muſicale, ſi ces loix ont leur baſe dans la Nature; mais c'eſt ſur-tout pour le ſens de la vue que ce phénomène eſt ſenſible, parce que c'eſt le ſens pour lequel nous pouvons le plus aiſément nous aſſurer que l'action extérieure a ceſſé, & ſéparer la durée de la cauſe de celle de l'effet.

Perſonne n'avoit encore ſongé à ſoumettre ces obſervations au calcul, à déterminer la vîteſſe néceſſaire pour produire ces apparences, & à meſurer par conſéquent la durée de chaque impreſſion inſtantanée: c'eſt l'objet que s'eſt propoſé M. d'Arci. Il trouva que, pendant une nuit obſcure, la ſenſation que produiſoit un charbon allumé duroit environ huit tierces. Si on fait tourner un cercle où il n'y ait qu'une ouverture, & que derrière on place un flambeau, ce flambeau demeure toujours viſible lorſque le cercle ne met que neuf tierces à faire ſa révolution; plus l'objet a d'éclat & d'étendue, en un mot, plus ſon impreſſion ſur l'organe eſt forte, plus la ſenſation a de durée, & moins il eſt néceſſaire que le mouvement ſoit rapide.

C'eſt l'objet qui frappe le plus vivement nos yeux que l'on voit & qui dérobe la vue des autres. En effet, que l'on faſſe paſſer, ſoit un corps plus viſible devant celui qui l'eſt moins, ſoit un corps moins viſible devant celui qui l'eſt plus, c'eſt toujours le moins viſible qui diſparoît. L'objet qui

qui produit une ſenſation continue, quoiqu'il n'ait frappé les ſens qu'un inſtant, fait une impreſſion plus foible que s'il agiſſoit pendant tout ce temps ſur l'organe; ou plutôt on a une ſenſation mixte qui, lorſque la différence de l'éclat eſt très-grande, ne paroît qu'un affoibliſſement de la plus grande lumière, mais qui, ſi l'inégalité eſt moindre, eſt un véritable mélange des deux ſenſations.

Ainſi un corps peut paſſer devant nos yeux ſans être vu, & ſans marquer ſa préſence autrement que par l'affoibliſſement de l'éclat des objets qu'il couvre.

Ainſi lorſqu'on fait tourner des cartons peints de jaune & de bleu, on n'aperçoit qu'un cercle continu de couleur verte. Ainſi les ſept couleurs du priſme, en tournant rapidement, produiſent un blanc-obſcur, & d'autant moins obſcur que le mouvement eſt plus rapide.

Comme cette durée de la ſenſation augmente avec l'éclat de l'objet, il auroit été intéreſſant de connoître ſuivant quelles loix l'augmentation de la durée ſuit celle de l'intenſité de la lumière. On auroit pu chercher réciproquement de combien l'intenſité de la lumière d'un objet que le mouvement rend continuellement viſible, ſe trouve dégradée; mais de telles expériences offroient une difficulté preſque inſurmontable, & M. d'Arci en avoit éprouvé déjà beaucoup pour ſes premières expériences. L'état de ſa vue l'avoit obligé de ſe fier à d'autres yeux que les ſiens, & ces nouvelles recherches exigeoient une attention & une immobilité qu'il eût obtenues difficilement d'un obſervateur qui n'auroit été ſoutenu dans ce travail ſi pénible, ni par l'eſpérance de la gloire, ni par le plaiſir de ſuivre ſes propres idées.

L'eſprit qui a conduit M. d'Arci dans ce travail, le guidoit également dans tous ſes ouvrages de phyſique, on le voit toujours occupé de comparer à la théorie mathématique, les réſultats des obſervations. Il cherchoit dans l'expérience les élémens ſur leſquels le calcul doit s'exercer, & les fondemens

d'après lesquels la Géométrie peut conduire à la découverte des loix de la Nature. En même temps il se servoit des Mathématiques pour ne demander aux expériences que ce qu'on peut en attendre, & pour les forcer à ne rien refuser de tout ce qu'elles peuvent donner.

Tel est en particulier l'objet d'un Mémoire sur les machines hydrauliques, imprimé en 1754; Mémoire dans lequel M. d'Arci montre combien il est facile de s'égarer en cherchant par l'expérience les loix des effets susceptibles d'un *maximum* ou d'un *minimum*, & indique en même temps comment on peut former un système d'expériences qui, même dans ce cas, conduise à la découverte de ces loix.

On remarque également dans tous ses ouvrages, des vues ingénieuses & philosophiques; l'Auteur présente toujours ses recherches comme des essais qu'il se propose d'étendre & de perfectionner, mais le temps d'y mettre la dernière main lui manquoit. Il avoit l'ambition de son état, la seule ambition excusable, la seule qui puisse être utile. Son ardeur pour les Sciences ne s'étoit point affoiblie par les distractions auxquelles deux guerres l'avoient forcé, plusieurs même de ses travaux sont datés de l'époque de ces guerres; mais ces longues distractions lui avoient fait perdre l'habitude du travail, & l'habitude plus nécessaire encore de suivre long-temps un même objet & une même idée. Comme il voyoit les objets en grand, comme il vouloit porter dans ses expériences une précision rigoureuse, le défaut de temps, les bornes de sa fortune ne lui ont trop souvent permis d'exécuter qu'une foible partie de ce qu'il avoit conçu.

D'ailleurs M. d'Arci vivoit dans le monde, & avec une belle figure, une taille avantageuse, un caractère ardent, une ame active, il étoit difficile qu'il ne se laissât point entraîner à une dissipation dont sa constitution lui permettoit d'oublier la fatigue pour n'en sentir que les plaisirs; & l'emploi de ses talens pour les Sciences a dû souffrir quelquefois des autres avantages que la Nature lui avoit donnés.

En 1770, M. d'Arci devint Maréchal-de-camp & Pensionnaire de l'Académie; il parut alors s'attacher plus particulièrement à cette Compagnie, il la regardoit comme sa patrie, & comme une République où il vouloit être un citoyen considéré, mais seulement un citoyen. Les droits, & sur-tout la liberté de l'Académie, paroissoient son premier intérêt, l'apparence de la plus légère atteinte portée à ces objets sacrés pour lui, suffisoit pour exciter son indignation, il croyoit que la liberté valoit mieux encore que la paix; opinion républicaine qu'il est dangereux d'exagérer, & dont il seroit peut-être facile d'abuser, en l'appliquant au régime d'une Compagnie savante, où ce ne sont pas, comme dans les associations politiques les avantages des citoyens, mais les progrès des Sciences, qui doivent être le premier but de la société.

L'héritage d'un oncle que M. d'Arci avoit en France, & qui lui avoit servi de père, des récompenses militaires & des intérêts dans les mines, où il avoit fourni à la fois des fonds & des vues utiles, avoient augmenté sa fortune; il crut devoir la partager avec une nièce élevée à Paris sous ses yeux, & dont il avoit long-temps observé avec intérêt l'esprit, le caractère & les vertus naissantes; il l'épousa en 1777, & prit alors le nom de Comte d'Arci: il étoit dans l'âge où la société générale offre à peine des distractions, où elle coûte plus qu'elle ne donne, & où tous les hommes qui ne sont dominés ni par l'ambition, ni par la passion de l'étude, sentent le besoin d'une société intime & domestique. En épousant sa nièce, M. d'Arci espéroit assurer leur bonheur mutuel; le mariage avoit resserré des liens déjà chers à tous deux; l'habitude de se voir & de s'aimer avoit fait disparoître la distance qu'auroit pu mettre entr'eux l'inégalité des âges; l'autorité d'un mari perdant ce qu'elle a d'imposant entre les mains d'un étranger, & douce comme l'autorité d'un père, ne devoit plus paroître un joug, mais un appui; enfin, dès les premiers momens de leur union, ils pouvoient se flatter d'éprouver le bonheur de cette con-

fiance intime, de cette amitié pure & inaltérable qui, dans les unions ordinaires, ne peut être que le fruit d'une tendresse constante, & qui en est la plus douce récompense. Cette union qui auroit dû être si heureuse dura peu, M. d'Arci mourut, d'un *cholera-morbus*, le 18 Octobre 1779, n'ayant vécu avec sa femme qu'assez de temps pour qu'elle apprît à sentir toute l'étendue de la perte qu'elle a faite.

M. d'Arci avoit des amis dans le monde, parmi les Militaires, dans l'Académie; s'il avoit eu un caractère liant & facile, on en concluroit seulement qu'il étoit aimable, & non qu'il fût digne d'être aimé; mais avec un caractère ferme, indépendant & facile à s'irriter, il ne put avoir des amis que parce qu'il sentoit le prix de l'amitié, qu'il en connoissoit les devoirs, & qu'il savoit la mériter.

Les Irlandois qui venoient chercher un asyle en France, trouvoient dans M. d'Arci un protecteur, ou plutôt un ami. Il partageoit avec eux sa fortune, s'occupoit de leurs intérêts, suivoit leurs affaires avec chaleur, employoit pour eux le poids que lui donnoit sa réputation & le crédit de ses amis. Il consoloit ou servoit l'infortune, défendoit ou appuyoit le talent, & ne protégeoit ni l'avidité ni l'intrigue, malheur où tombent si souvent ceux qui obligent, moins par bienfaisance, que par vanité ou par foiblesse.

On remarquoit en lui un penchant pour les Anglois, qui sembloit contraster avec l'ardeur qu'il avoit montrée contre l'Angleterre; c'est que la différence des Gouvernemens ne forme pas la différence des Nations. Une même langue, la ressemblance des mœurs & des opinions politiques, les mêmes goûts, le même amour de la liberté, font un seul peuple des Irlandois & des Anglois. En plaignant sa Nation opprimée par l'Angleterre, en détestant la domination des Anglois, M. d'Arci aimoit la nation Angloise, étoit fier de ses succès dans tous les genres, même de ses succès militaires, quoiqu'il les vît avec douleur. Les Grands-hommes, les Savans d'Angleterre étoient ses compatriotes; la consti-

tution Angloise, celle sous laquelle il eût préféré de vivre, le Prince seul étoit étranger pour lui. Ainsi M. d'Arci réunissoit, comme plusieurs de ses compatriotes, deux passions qui paroissent contradictoires, & qui ne sont que deux modifications d'un même sentiment, l'amour de sa patrie & des loix de son pays, avec la haine de son gouvernement.

Dans un voyage qu'il fit en Irlande en 1767, un de ses oncles lui offrit une fortune considérable s'il vouloit s'y établir; il la refusa, ne voulant pas habiter dans un pays libre en apparence, mais que par des formalités tyranniques l'Angleterre tenoit sous le joug, dans un pays où il eût fallu vivre privé des droits de citoyen, ou les acheter par un parjure. Il passa à Londres dans le même voyage: les Anglois le traitèrent comme un homme qui faisoit honneur à la Nation britannique, & qui, par son refus même de rester sous leur domination, avoit acquis un nouveau titre à leur estime: son nom cependant ne fut point inscrit dans la liste de la Société Royale, la Loi l'avoit proscrit; mais l'estime publique & la générosité de la Nation angloise protégeoient sa personne contre les attentats de la Loi. Ainsi, chez ce peuple si orgueilleux de sa liberté & de sa législation, il existe aussi des Loix auxquelles la raison & l'honneur défendent d'obéir.

La mort a frappé M. d'Arci précisément dans l'instant où la Nation irlandoise alloit reprendre, par son courage, une liberté que ses divisions & le fanatisme lui avoient fait perdre: il auroit vu les Ministres d'Angleterre forcés de reconnoître des droits qui appartiennent aux Irlandois, comme hommes plutôt encore que comme citoyens, & dont la justice ne permet pas à une Nation de priver un peuple sur lequel elle croit avoir le droit de régner: il auroit vu la conduite ferme & modérée de ses compatriotes forcer la Nation angloise à entendre assez bien les intérêts de sa puissance & de son bonheur, pour aimer mieux avoir des frères que des esclaves; & un peuple-roi, instruit par ses malheurs, donner, trop à regret peut-être, un exemple de justice à l'égard d'un

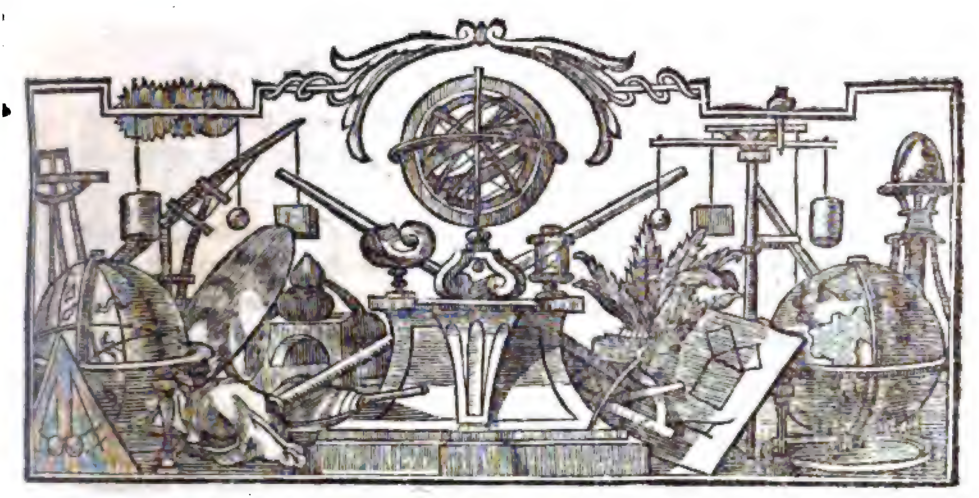
peuple-ſujet, exemple unique dans l'Hiſtoire, & que l'Angleterre doit ſe repentir de n'avoir pas donné quelques années plus tôt. Cette révolution eût été pour M. d'Arci le jour le plus heureux de ſa vie, mais le ſort lui envioit cette conſolation, & ſes derniers regards n'ont pas vu la liberté de ſon pays.

La place de Penſionnaire-Géomètre, qu'occupoit M. d'Arci, a été remplie par M. l'abbé Boſſut, déjà Aſſocié dans la même Claſſe.



MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES SCIENCES.

MÉMOIRES



MÉMOIRES DE MATHÉMATIQUE ET DE PHYSIQUE,

TIRÉS DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences.

Année M. DCCLXXIX.

MÉMOIRE SUR LES LAINES DE FRANCE, COMPARÉES AUX LAINES ÉTRANGÈRES.

Par M. DAUBENTON.

LES avantages du Commerce ſont d'autant plus grands, que l'on connoît mieux les choſes qui en ſont l'objet : l'appât du gain eſt un puiſſant aiguillon pour exciter l'induſtrie

Lû à la Séance de la S.t Martin, 1779.

des Commerçans; mais ſouvent l'induſtrie la plus ſubtile ne donne que des connoiſſances fautives, ſi elle n'eſt appuyée ſur les principes des Sciences.

Il y a dans les productions de la Nature un degré de perfection qui eſt au-deſſus de la portée de nos ſens, & que nous ne pouvons apercevoir ſans le ſecours des inſtrumens qui rendent nos yeux plus perçans: ces moyens ſont abſolument néceſſaires pour diſtinguer avec préciſion les différences qui ſe trouvent entre les laines par rapport à leur fineſſe.

Le Commerçant qui a les meilleurs yeux & qui eſt le plus exercé dans le choix des laines, ne peut diſcerner ſi les filamens d'une laine ſuperfine ſont plus déliés que ceux d'une autre, lorſqu'il n'y a qu'une légère différence entr'elles: cependant cette petite différence influe beaucoup ſur le prix de cette marchandiſe & ſur la qualité des Étoffes que l'on en fait.

Tant que l'on n'aura pas un moyen ſûr pour diſtinguer les différens degrés de la fineſſe des laines, on ſera expoſé à de grandes mépriſes ſur celles que l'on vend, que l'on achette & que l'on emploie: on fera venir à grands frais des laines étrangères qui ſeront ſouvent inférieures à celles de ſon propre pays: le prix en ſera toujours arbitraire; le Manufacturier achettera au haſard des laines dont il ne connoîtra la valeur qu'après les avoir employées; la qualité de ſes étoffes ne ſera pas proportionnée aux prix de la laine.

Ces grands inconvéniens dans le Commerce, ne ſont pas les ſeuls qui réſultent du défaut de connoiſſance ſur le degré de fineſſe des laines: il y en a un autre qui n'eſt pas de moindre conſéquence. Faute de connoître les différences qui ſont entre les laines ſuperfines, on ne peut ſe conduire qu'à l'aveugle pour l'amélioration ou pour le maintien de cette production dans les troupeaux; on ne ſait ſi la laine des béliers que l'on donne aux brebis, les ſera dégénérer ou les perfectionnera.

Cette incertitude m'auroit empêché de donner aux expériences que j'ai faites ſur la production des laines autant de

précision que je le desirois : j'ai été obligé de mesurer le diamètre des filamens de la laine pour reconnoître & comparer leurs différens degrés de finesse ; j'ai pris cette dimension exactement par le moyen d'un micromètre, que j'ai fait tracer exprès pour cet usage sur une lame de cristal de roche, par la machine à diviser de M. Megnié.

Ayant observé, avec cet instrument appliqué au microscope, tous les échantillons que j'ai pu avoir des laines, non-seulement de France, mais aussi des pays étrangers, j'ai vu qu'il n'y a point de laine, même des plus grosses, qui n'ait des filamens très-fins, dont le diamètre n'est que la 560.e partie de la ligne du pied-de-roi.

J'ai en même temps reconnu que les laines les plus fines ont des filamens dont le diamètre va jusqu'à la 140.e partie d'une ligne. J'ai fixé à ce point le premier terme de la laine superfine, parce que je n'ai pu trouver aucune laine dont tous les filamens fussent plus fins ou qui n'en eût point d'aussi gros.

Toutes les laines ayant des filamens très-fins, on ne peut distinguer les différens degrés de la finesse & de la grosseur de la laine que par les filamens les plus gros : on les trouve facilement, car ils sont toujours à l'extrémité des flocons de la toison, que l'on appelle *mèches*.

Il n'y a qu'un 10.e de ligne entre les côtés parallèles des carrés du micromètre dont je me sers pour mesurer le diamètre des filamens des laines ; il est placé au foyer de l'oculaire du microscope ; la lentille grossit quatorze fois ; par conséquent le diamètre d'un filament de laine qui est au foyer de cette lentille, & qui paroît occuper par sa largeur un carré entier du micromètre, n'est que de la 140.e partie d'une ligne.

Toute laine dont les plus gros filamens ne remplissent par leur largeur qu'un carré du micromètre, est donc une laine superfine au premier degré, c'est-à-dire une des plus fines de toutes les laines que j'ai pu avoir. Cette connoissance étant acquise, j'ai fait les mêmes observations sur les laines les plus

groſſières, & j'ai vu que la largeur de leurs filamens les plus gros occupoit juſqu'à ſix carrés du micromètre, qui valent la 23.e partie d'une ligne.

Je dois faire remarquer ici qu'il ne s'agit que des filamens de vraie laine, & non pas de ceux du jarre, qui ne ſont que des poils durs mêlés avec la laine: les plus gros de ces filamens rempliſſent juſqu'à onze carrés du micromètre, & leur diamètre eſt par conſéquent la 12.e partie d'une ligne. Il y a des jarres moins gros, & même d'auſſi fins que des filamens de laine ſuperfine; mais pour peu que l'on ſoit exercé à l'examen des laines, on reconnoît aiſément le jarre.

Il ne ſuffiſoit pas de connoître les termes extrêmes des laines les plus fines & les plus groſſes, il falloit encore fixer des termes intermédiaires pour diſtinguer différentes ſortes de laines par rapport à différens degrés de leur fineſſe & de leur groſſeur pour l'emploi que l'on en fait dans les Manufactures.

On déſigne ces différentes ſortes par les dénominations de *laines ſuperfines, fines, mi-fines, moyennes, mi-groſſes & groſſes*, mais on n'a aucune règle ſûre pour les diſtinguer: ces dénominations varient très-ſouvent; la même laine, au même degré de fineſſe, eſt regardée comme fine dans un pays, & comme ſuperfine dans un autre: cette incertitude occaſionne beaucoup de mépriſes dans le Commerce, par ignorance ou par ſupercherie.

J'ai tâché de fixer toutes ces dénominations, en indiquant les degrés de fineſſe de la laine auxquels on peut les rapporter: cette diviſion des laines en différentes ſortes eſt arbitraire; elle n'a été imaginée que pour la commodité des Manufacturiers. La Nature ne produit pas ces différentes ſortes de laines ſéparément les unes des autres, au contraire on en trouve pluſieurs mêlées enſemble dans la même toiſon & dans la même mèche: il faut en faire le triage pour avoir les laines ſuperfines, les laines fines, & d'autres ſortes qui ſont néceſſaires pour différens emplois dans les Manufactures.

La diviſion des laines en différentes ſortes étant arbitraire, je me ſuis propoſé d'en faire une qui fût d'accord, autant

qu'il feroit poffible, avec les notions reçues parmi les Commerçans, & qui pût leur fervir de guide dans leurs conventions.

J'ai fait voir qu'une laine eft fuperfine au premier degré, lorfque le diamètre de fes plus gros filamens n'eft que d'une 140.e partie de la ligne : ce premier terme eft certain par les preuves que j'en ai données; mais quel eft le dernier terme de la laine fuperfine? à quel degré de fineffe la laine doit-elle perdre le nom de fuperfin & prendre le nom de fin?

Pour réfoudre cette queftion, j'ai obfervé vingt-neuf échantillons de laines qui venoient de magafins & de manufactures où elles étoient regardées comme fuperfines. Ayant reconnu, par des obfervations foigneufement répétées, que les gros filamens de ces laines occupoient rarement plus de deux carrés du micromètre, j'ai fixé le dernier terme des laines fuperfines à celles dont les plus gros filamens rempliffent par leur largeur deux carrés du micromètre, & dont le diamètre eft de la 70.e partie d'une ligne.

Après les laines fuperfines, j'en diftingue quatre autres fortes, fous les dénominations de *laines fines*, de *laines moyennes*, de *groffes laines* & de *laines fupergroffes*, ce qui fait en tout cinq fortes de laines depuis la plus fine jufqu'à la plus groffe.

Cette divifion eft plus commode & plus exacte que celles qui ont été imaginées jufqu'à préfent; elle partage en cinq parties égales la différence qui fe trouve réellement entre les laines les plus fines & les plus groffes.

Quoique les dénominations de *mi-fin* & de *mi-gros* foient en ufage, je les ai fupprimées, parce que j'ai reconnu, après plufieurs effais, que cette multiplicité de noms rendoit leur fignification équivoque. Les cinq fortes de laine que je diftingue s'accordent avec la progreffion de la Nature dans la production des laines, par rapport à leur fineffe & à leur groffeur : celles que j'appelle *moyennes* le font réellement, puifqu'elles correfpondent au terme moyen entre les deux extrêmes des laines fuperfines & des fupergroffes : les laines

fines & les grosses sont placées à égales distances entre les laines moyennes & les laines supergrosses & superfines. Voilà donc une nomenclature simple, exacte & applicable aux laines de tous les pays, sans qu'elle puisse varier, suivant les intérêts des Propriétaires, des Commerçans & des Manufacturiers.

Les laines de chaque sorte ont différens degrés de finesse ou de grosseur, puisque les diamètres des filamens qui indiquent leurs dénominatious, varient de la 140.[e] partie d'une ligne. Quoique cette différence paroisse peu considérable, elle est importante pour la valeur & le prix des laines : il faut nécessairement distinguer dans chaque sorte des laines de deux qualités différentes ; celles de la première sont les plus fines, & celles de la seconde sont les plus grosses.

Cette distinction est plus nécessaire pour les laines superfines & pour les laines fines que pour les autres, parce qu'elles sont d'un plus haut prix, & que l'on en fait des ouvrages où les différens degrés de finesse sont plus intéressans.

En admettant un plus grand nombre de sortes de laines, j'aurois pu supprimer la distinction de deux qualités dans chaque sorte, mais je serois tombé dans un grand inconvénient : j'aurois rendu la connoissance des laines fort équivoque, beaucoup plus difficile, & peut-être impossible pour les Bergers & les autres gens de la campagne, & pour la plupart des Marchands.

On ne peut se passer du microscope pour déterminer avec précision tous les degrés de finesse de la laine par les différentes grandeurs du diamètre de ses filamens, pour limiter les différentes sortes de laines, pour les faire connoître dans leur état actuel & montrer à la postérité les changemens qu'elles auront éprouvés dans les temps à venir : mais je suis fort éloigné de proposer à tous les Marchands, à tous les Propriétaires de troupeaux & aux Bergers, d'avoir des microscopes pour reconnoître les différentes sortes de laines ; il n'y a que les Commerçans & les grands Manufacturiers qui doivent se servir de cet instrument ; il leur sera très-utile,

& même absolument nécessaire, toutes les fois qu'ils seront obligés de connoître exactement le degré de la finesse des laines dans des cas importans à leur commerce ou à leurs fabriques.

Pour l'usage ordinaire, il suffiroit d'avoir des échantillons des cinq sortes de laines, qui auroient été vérifiés au microscope, & auxquels on compareroit les laines dont on voudroit connoître le degré de finesse ou de grosseur; une seule personne pourroit en peu de temps choisir & éprouver au microscope, un très-grand nombre de ces échantillons pour les distribuer par-tout où il seroit nécessaire.

De petits flocons de ces laines étant épars & appliqués sur un velours, ou sur un drap noir, on voit leurs rapports avec les laines dont on veut connoître la finesse ou la grosseur.

On pourroit aussi avoir pour objets de comparaison des fils d'argent trait, du même diamètre que les filamens des cinq sortes de laines; le métal auroit bientôt perdu son éclat, & prendroit une couleur approchante de celle de la laine. Je crois qu'il se fait du fil d'argent aussi fin que les filamens de la laine superfine au premier degré; car M. Tillet, actuellement Directeur de l'Académie, m'a donné un échantillon de fil d'or qui n'a en diamètre que la 70.e partie d'une ligne, & qui est par conséquent d'une grosseur égale à celle de la laine superfine de la dernière qualité. On pourroit sans doute faire du fil d'argent plus délié, & avoir des échantillons qui correspondroient aux différentes sortes de laine: ces échantillons ne seroient pas sujets aux accidens qui détruisent la laine, mais je ne les ai pas essayés; je ne sais s'ils rempliroient mes vues.

Il y auroit encore un autre moyen pour reconnoître les différentes sortes de laine, qui seroit plus simple pour les gens de la campagne: on pourroit leur indiquer, sur différentes parties du corps d'un animal qui se trouveroit dans tous les pays, le poil qui auroit à-peu-près le même diamètre que les filamens de chaque sorte de laine: le duvet de la fouine est aussi fin que la laine superfine au premier degré; le gros

poil eſt à peu-près de même groſſeur que la laine ſuper-groſſe. J'ai trouvé auſſi des rapports entre le poil d'autres parties du corps de cet animal & les autres ſortes de laines ; mais ces obſervations ne ſont pas aſſez confirmées : je m'en tiens pour le préſent aux échantillons réels des cinq ſortes de laines.

Ces échantillons étant appliqués à deux pouces de diſtance les uns des autres, ſur une étoffe noire expoſée au grand jour, on place la laine que l'on veut comparer entre les deux échantillons qui paroiſſent au premier coup-d'œil y avoir le plus de rapport. Suppoſons qu'elle ſoit entre le fin & le ſuperfin : en examinant attentivement ces trois objets, on reconnoît ſi la laine miſe à l'épreuve reſſemble plus à l'échantillon du fin qu'à celui du ſuperfin ; dans ce cas, elle eſt fine de première qualité ; au contraire ſi elle a plus de rapport avec l'échantillon du ſuperfin qu'avec celui du fin, elle eſt ſuperfine de ſeconde qualité.

Par ce moyen, on ſaura de quelle ſorte ſont les laines, & de quelle qualité dans chaque ſorte ; on en reconnoîtra mieux la valeur & le prix : on pourra choiſir les béliers les plus convenables pour améliorer les laines d'un troupeau par leurs alliances avec les brebis, ou au moins pour les empêcher de dégénérer, comme il n'arrive que trop ſouvent par le défaut d'intelligence pour le choix des béliers.

Ces objets n'étoient pas les ſeuls que j'avois en vue, lorſque j'ai recherché les moyens de conſtater cinq ſortes de laines, & de les faire connoître : je me ſuis auſſi propoſé de comparer exactement les laines de France, ſur-tout les plus fines avec celles des pays étrangers, & de reconnoître à quel point de perfection j'étois parvenu par mes expériences pour l'amélioration des laines.

J'ai fait la comparaiſon des laines dans toute l'étendue qui m'a été poſſible ; j'en ai mis à l'épreuve rigoureuſe du microſcope un très-grand nombre de différentes ſortes, parmi leſquelles il y en a de pays ſi éloignés, que je n'aurois jamais pu me les procurer ſans la protection du Gouvernement qui a toujours

a toujours favorisé mes recherches. Ayant observé ces laines avec la plus grande attention, j'ai reconnu que les plus fines venoient d'Espagne.

J'ai observé un grand nombre d'échantillons des laines superfines qui nous viennent de l'Étranger, je ne les ai pas trouvées au premier degré de finesse.

J'ai aussi vu des laines de Roussillon au premier degré de la seconde qualité de superfin, & des laines de Berri & d'Auxois au dernier degré.

Quoique la grandeur du diamètre des filamens des laines superfines au premier & au dernier degré ne diffère que de la cent quarantième partie d'une ligne, cette différence est très-sensible dans les étoffes fabriquées avec ces deux sortes de laines; cependant le Commerçant ni le Manufacturier ne peuvent absolument pas l'apercevoir dans ses différens degrés sur les laines: aussi arrive-t-il quelquefois que le Fabricant fait les meilleures étoffes avec les laines superfines qui lui ont coûté le moins, parce que toutes les laines qui ont un certain degré de finesse, sont vendues & achetées à l'aveugle.

J'étois dans la même incertitude au milieu des laines de ma Bergerie, avant d'avoir trouvé le moyen de déterminer avec précision leurs différens degrés de finesse; mes yeux, même avec l'aide d'une loupe, me servoient mal; lorsque je consultois les meilleurs Connoisseurs que je pouvois trouver, je les voyois fort indécis, & souvent ils se contredisoient d'un moment à l'autre.

Enfin j'ai mis à l'épreuve invariable du microscope les laines qui ont été améliorées par mes expériences, & j'ai vu avec beaucoup de satisfaction qu'elles étoient parvenues au premier degré de superfin.

Par exemple, la laine d'un Bélier de trois ans est à ce haut degré de finesse, quoiqu'il soit venu d'un Bélier & d'une Brebis, tous les deux métis de races de Roussillon & d'Auxois, dont la laine n'étoit que de la seconde qualité de superfin; ce Bélier & cette Brebis avoient été produits eux-mêmes par

des Béliers de Rouſſillon à laine ſuperfine de la ſeconde qualité, & par des Brebis d'Auxois à laine moyenne.

Par la première génération, la laine ſuperfine du Bélier a changé la laine moyenne de la Brebis en laine ſuperfine de la ſeconde qualité dans l'Agneau qu'ils ont produit. Cette amélioration eſt ſi vraiſemblable, & je l'ai vu tant de fois, que je n'y trouve rien d'extraordinaire; mais je ſuis toujours ſurpris que dans la ſeconde génération, l'Agneau ait eu une laine ſuperfine au premier degré, quoique le père & la mère n'euſſent qu'une laine ſuperfine de ſeconde qualité. J'ai déjà vu pluſieurs fois cet évènement dans la ſuite de mes expériences; je ne puis l'attribuer à l'influence du Bélier ou de la Brebis ſur leur Agneau, puiſqu'il les ſurpaſſe dans la fineſſe de la laine: il faut néceſſairement qu'elle ait été perfectionnée par une cauſe étrangère.

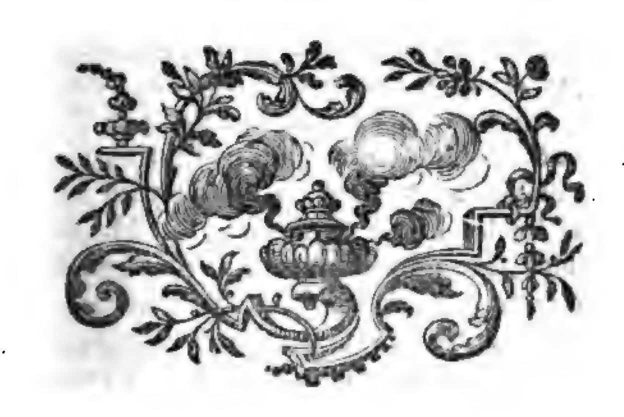
Ce n'eſt pas le choix des alimens, car tous les métis de ma Bergerie ne ſont nourris la plupart du temps que de paille: j'ai toujours eu pour principe, qu'il ne faut jamais favoriſer les expériences de ce genre, mais les faire en toute rigueur.

Mes troupeaux vont aux parcours ſur de petites montagnes & ſur des côteaux ſecs & maigres; il eſt certain que ces pâturages ſont très-bons pour la production des laines fines; mais quoiqu'il y ait des pâturages de cette nature dans tous les pays montueux, les laines n'y ont pas été améliorées comme dans ma Bergerie.

Je préſume que le plein air auquel mes troupeaux ſont expoſés nuit & jour en tout temps, a beaucoup influé ſur l'amélioration de leurs laines; mais je n'en ai point de preuves convaincantes: je tâche d'en acquérir par des expériences que je fais exprès dans cette vue.

Il eſt toujours très-difficile & ſouvent impoſſible de diſtinguer les différentes cauſes qui influent ſur les productions de la Nature: nous pouvons les rechercher ſans impatience lorſqu'elles produiſent de bons effets. Il eſt certain que l'on peut avoir en France des laines ſuperfines de première qualité,

& même au plus haut degré : l'épreuve que j'en ai faite me paroît aſſez conſtante, aſſez évidente & aſſez répétée pour que les moyens qui l'ont produite puiſſent être utiles au Public. Douze ans d'expériences m'ont déterminé à les expoſer dans une inſtruction pour les Bergers : je la ſoumettrai au jugement de l'Académie, & je la publierai ſi elle eſt jugée digne de ſon approbation.



SECOND MÉMOIRE
SUR LE CAP DE LA CIRCONCISION.
Par M. LE MONNIER.

Lû le 12 Avril 1780.

M. DE LOZIERS-BOUVET, qui réside à Paris actuellement, m'a communiqué une Carte * avec l'extrait de son Journal, qu'il a envoyé, en forme de lettre, à la Compagnie des Indes le 28 Juin 1739, & qui fut lû pour lors à l'Assemblée de l'Académie par feu M. du Fay.

Cette lettre contient seize pages *in-folio*, avec un plan & une vue du cap de la Circoncision, par $54^d\ 3'$ de latitude australe, & 26 degrés $\frac{1}{2}$ de longitude estimée, à compter de Ténériffe : on en a imprimé un extrait pour lors dans les Observations sur les Écrits modernes, & M. Buache en a publié un autre, avec une Carte de la plus grande partie de l'hémisphère austral, là où il rapporte les variations observées de l'Aiguille aimantée, tirées des Journaux de M. Bouvet. M. Buache donne, vis-à-vis le cap de la Circoncision, la variation de l'Aiguille par un des compas de route, $6^d\ 30'$ du Nord à l'Ouest, & par l'autre 8 degrés; en sorte qu'on peut prendre un milieu, savoir 7 degrés $\frac{1}{4}$. Le Capitaine Cook, par les mêmes longitudes & latitudes, à ce qu'il croyoit pour lors, a trouvé tout récemment 13 $\frac{1}{2}$ degrés de variation; l'excès est donc près de 6 degrés, & la ligne sans déclinaison & d'autres lignes qui l'avoisinent, n'ont pas varié assurément de la moitié de cette quantité à 54 degrés de latitude australe.

Dès le 15 Décembre 1738, on avoit vu, à $48^d\ 50'$ de latitude, par 7 degrés de longitude, des glaces dont la

* Il m'a dit avoir vu quatre fois le cap de la Circoncision, & sa lettre faisoit déjà mention de trois fois : le premier Pilote qui l'avoit découvert, eut vingt piastres de récompense à la vue de deux cents hommes qui formoient l'équipage du Vaisseau.

hauteur étoit de 2 à 300 pieds, & depuis un quart de lieue jusqu'à deux & trois lieues de tour, &c.

Extrait du Journal.

« Le 1.er Janvier, vers les 3 heures après midi, on a vu une terre fort haute qui étoit couverte de neiges & fort embrumée: « elle a paru comme un gros Cap, &c. Cette terre restoit alors « dans l'Est-nord-est, à dix ou douze lieues: les vents en ve- « noient, & nous mimes sur le champ au plus près pour l'aller « reconnoître, étant situés par 54 degrés de latitude & 27 ou « 28 de longitude: ils prétendent que le jour précédent ils « n'en avoient pas passé à plus de trois lieues; mais ce jour-là « ils étoient à la cape; grand vent, grosse mer & brume très- « épaisse le 31 Décembre: le 1.er Janvier, à 10 heures du « soir, par une éclaircie, ils ont vu une très-grosse glace près « d'eux, & qu'ils ont soupçonné avoir bordé la terre. «

Le 6 Janvier, beaucoup d'oiseaux blancs & gros comme « des pigeons: par une éclaircie, ils ont vu une très-grosse « glace à un quart de lieue à l'avant, & la terre à une ou deux « lieues, &c. Ils ont encore vu la terre le 5 Janvier, & plus « près qu'ils ne la croyoient du Vaisseau. »

Extrait d'une Lettre de M. la Vigne-Buisson, écrite de Saint-Malo, à M. Loziers-Bouvet, & communiquée à l'Académie le 19 Avril 1780.

Cette lettre, écrite tout récemment par un ancien Capitaine de Vaisseau de la Compagnie des Indes, lequel a commandé ensuite dans le Port de l'Orient, nous fournit encore un témoignage authentique de la découverte du Cap, à 54 degrés de latitude.

« Mon Journal de notre voyage des Terres australes, a eu à peu-près le même sort que le vôtre; l'original, qui n'étoit « qu'un brouillon, s'est trouvé perdu, &c. «

Pour moi, qui avois des yeux de vingt-six ans, j'affirme- « rois sur mon honneur & sur ma vie, que je n'ai cessé de «

» voir la terre (du Cap) pendant neuf ou dix jours, toutes les
» fois que la brume ne nous en a pas empêché, & j'en étois si
» fort persuadé, que le seul jour qui annonça, au lever du Soleil,
» un temps clair & propre à envoyer des bateaux à terre, moi
» étant de quart, m'ayant ordonné de mettre notre chaloupe
» de pêche à la mer, & m'ayant commandé pour m'y em-
» barquer & faire la reconnoissance de cette terre, je ne vous
» fis aucune représentation, & j'étois prêt à partir lorsque le
» temps s'obscurcit par la brume épaisse qui couvrit tout d'un
coup l'horizon ».



ADDITIONS AUX DÉCOUVERTES DÉJA PUBLIÉES SUR LE CAP DE LA CIRCONCISION.

Par M. LE MONNIER.

IL y a environ un mois qu'on a produit dans l'Assemblée le Journal d'un Pilote du Vaisseau *l'Aigle*, de la Compagnie des Indes, dont l'extrait m'ayant été communiqué par M. Bori, est resté au Secrétariat. Ce Journal avoit été annoncé comme une pièce absolument contraire à la découverte du Cap ou île australe de la Circoncision : or dans ce même Journal, on trouve au contraire que ce Pilote a vu & relevé douze fois les terres du cap de la Circoncision, depuis le 1.er Janvier jusqu'au 8 du même mois de l'année 1739 : on y trouve aussi quelques Observations sur la variation de l'aimant, qui donneroient la position de ce Cap encore plus dans l'Ouest que je ne l'avois cru devoir établir par les Observations publiées jusqu'à ce jour. Lû le 3 Mai 1780.

Dans la dernière assemblée du 29 Avril, on a encore produit un calcul de la longitude de ce Cap, fondé sur une supposition que je n'admets nullement, au sujet des variations de l'Aiguille aimantée : on y pose pour point fondamental de la question, qu'à 5 degrés de variations de l'Aiguille, à la latitude de 54 degrés, répondent 10 degrés en longitude géographique, au lieu de 8 degrés seulement que j'ai cru devoir établir dans nos Mémoires de 1776, *page 667 ;* car la ligne sans déclinaison a dû être, vers 54 degrés de latitude, en 1775, à 5 degrés de longitude, à compter de l'île de Fer ; & puisque le Capitaine Cook, dont j'emprunte uniquement ici les Observations, comptoit 27 degrés de longitude lorsque la variation de l'Aiguille étoit 13 degrés $\frac{1}{2}$, il est clair qu'à proportion, pour 5 degrés de variation on ne doit admettre

que 8 degrés de différence en longitude géographique à la latitude de 54 degrés australe, & sous le Méridien du Cap de la Circoncision.

Or d'après cette supposition, déjà trop forcée, de 10 degrés au lieu de 8 degrés, on embarrasse la question, par l'effet des lieues parcourues, qui ne sont plus lieues marines, & par les courans; comme si les courans qui ont lieu proche l'Afrique, 20 degrés moins au sud & à l'attérage du cap de Bonne-espérance, pouvoient influer sur une mer aussi éloignée du continent d'Afrique que doit l'être celle qui environne le cap, ou plutôt l'île de la Circoncision. Quoique j'aie déjà recueilli avec soin dans le Mémoire qu'on veut attaquer, tout ce qui concerne la position de la ligne sans déclinaison de l'Océan atlantique dans la partie du Sud, comme aussi les rapports qui se trouvent aux approches de cette ligne, entre les degrés de longitude & les variations observées du compas ou de l'Aiguille aimantée, on ne sera peut-être pas fâché de trouver ici la suite des Observations faites au-delà du 27.e degré de longitude, par le Capitaine Cook & les autres Officiers du Vaisseau *la Résolution*; d'autant que plus on s'éloigne de la ligne sans déclinaison, plus le rapport augmente entre les variations observées du compas & les degrés de longitude géographique. Voici l'extrait du Livre publié à Londres en 1777, sous ce titre : *The original Astronomical Observations made in the course of a Voyage towards the south Pole, &c.*

1.° A la *page 383*, il est dit que le 14 Février 1775, par $56^d\ 14'\frac{1}{2}$ de latitude australe (& par conséquent 2 degrés $\frac{1}{4}$ plus au Sud que le cap de la Circoncision, sous le Méridien duquel le Vaisseau *la Résolution* devoit alors se trouver), la longitude étoit $4^d\ 50'$, c'est-à-dire, $23^d\ 1'$ à compter de l'île de Fer. On observa ce jour-là $6^d\ 50'\frac{1}{3}$ de variation du Nord à l'Ouest, grosse mer & vent S. W.

Et à la *page 270*, le 15, à $8^h\ 24'$ du matin, la latitude étoit encore $55^d\ 30'\frac{1}{6}$, la longitude $5^d\ 56'\frac{1}{8}$, mauvaise mer; donc longitude $24^d\ 7'$ depuis l'île de Fer.

2.° Le

2.° Le 16 Février, latitude australe.......	54^d	$24' \frac{1}{6}$	
Longitude...........	6.	30.	
La variation..........	12^d	$7'$	vent S.
Le même jour..............	54.	$21 \frac{1}{2}$	
Longitude...........	8.	6.	
La variation..........	13.	$42 \frac{1}{3}$	E. S.
Le 17, vent modéré..............	54.	$25 \frac{1}{3}$	
Longitude............	9.	20.	
La variation..........	13.	$16 \frac{1}{3}$	N. W.
Le 21, vent modéré..............	54.	26.	
Longitude...........	19.	15.	
La variation..........	19.	$8 \frac{1}{2}$	vent W.

Ces variations, comme on voit, ont été obſervées pluſieurs fois dans les parties de l'Océan, ſituées à l'eſt du cap de la Circonciſion, & par une latitude qui peut être cenſée conſtante: on s'éloignoit alors davantage du premier Méridien magnétique ou ligne ſans déclinaiſon, & les rapports des variations, comme j'en ai averti, devoient s'accroître alors ou donner un peu plus de 8 degrés en longitude pour 5 degrés de variations, relativement à ce que j'avois dû conclure aux approches du premier Méridien.

Mais il s'en faut bien, par les Obſervations du 16 & du 17 Février, qu'on trouve les 8 degrés en longitude, ni ce qu'on a voulu porter inutilement juſqu'à 10 degrés dans la dernière aſſemblée, car on n'auroit d'abord que 6 degrés $\frac{1}{2}$: enſuite prenant un plus grand intervalle de temps & d'eſpace parcouru, ſavoir du 17 au 21 Février, on trouve 9 degrés, à très-peu de choſe près: prenant donc un milieu, je trouve 7 degrés $\frac{3}{4}$ au lieu des 10 degrés qu'on a ſuppoſés dans le Mémoire lû à la dernière Aſſemblée; & ſi on s'opiniâtroit à retenir les 9 degrés déterminés par les dernières Obſervations du Capitaine Cook, par une longitude qui eſt 16 degrés plus à l'Orient que n'eſt celle que j'attribue au cap de la Circonciſion, cela ne ſauroit détruire les 8 degrés en longitude que je trouve dans l'Oueſt de ce Cap, pour une variation

de 5 degrés ou changement obſervé dans la déclinaiſon de l'Aimant, en faiſant route aux environs de ce Cap.

C'eſt donc ſans fondement qu'on a voulu attaquer les valeurs que j'ai aſſignées pour la longitude du cap de la Circonciſion, & que feu M. Buache a voulu placer au moins, conformément aux Journaux de M. Bouvet dont il étoit ſaiſi; ou bien à l'égard de l'île de Fer, 2 degrés plus dans l'Oueſt *, ainſi que les Anglois, ſur le Vaiſſeau *la Réſolution,* en y croiſant, l'ont très-bien reconnu: leurs Capitaines s'étoient emparés à Louiſbourg, en 1743, des originaux de ce Journal, dont M. Buache nous avoit heureuſement conſervé, il y avoit déjà quatre ans, une copie exacte & très-fidèle, & que le célèbre Commandant, M. Bouvet, a bien voulu communiquer tout récemment à l'Aſſemblée & au Dépôt de la Marine, ainſi que ſa lettre écrite à la Compagnie des Indes en Juillet 1739.

* On s'eſt encore mépris dans les 28 degrés $\frac{1}{2}$, & qui ſont les mêmes, à compter de l'île de Fer, que les 26 degrés $\frac{1}{2}$ des Pilotes, à compter du pic de Ténériffe. *Voyez la Pièce paraphée & le Rapport des Commiſſaires de l'Académie, &c.*



OBSERVATIONS DES ÉCLIPSES DES SATELLITES DE JUPITER,

Faites en 1779 à Périnaldo, dans le Comté de Nice, avec une Lunette achromatique de 3 pieds de foyer, & 27 lignes d'ouverture.

Par M. MARALDI.

Lû le 29 Janvier 1780.

MOIS & JOURS.	TEMPS VRAI.	
Janvier... 14	15h 30′ 14″	Immersion du troisième Satellite; il fait beau.
14	18. 35. 37	Émersion du troisième; il fait beau.
18	18. 13. 27	Immersion du premier; il fait beau.
20	12. 41. 57	Immersion du premier; il fait beau.
21	12. 51. 46	Immersion du second; il fait fort beau.
Février.... 3	16. 25. 50	Immersion du premier; il fait fort beau, mais ♃ trop proche & presqu'en conjonction avec la Lune, qui est un peu plus boréale.
4	17. 54. 49	Immersion du second; très-douteuse, à cause des fortes vapeurs qui sont dans l'air.
10	18. 19. 37	Immersion du premier; il fait beau, mais il fait jour.
17	15. 36. 3	Immersion du quatrième; il fait beau: lorsque je suis retourné à la lunette, j'ai cru l'entrevoir encore.
17	15. 37. 7	On ne le voit certainement plus.
19	11. 17. 31	Immersion du troisième; il fait fort beau.
19	14. 42. 33	Immersion du premier; il fait fort beau.
21	9. 11. 15	Immersion du premier; il fait beau.
22	12. 21. 14	Immersion du second; il fait fort beau.

MOIS & JOURS.	TEMPS VRAI.	
Février. . 26	15h 17′ 9″	Immerſion du troiſième; très-douteuſe: fortes vapeurs: on voit très-foiblement les autres Satellites, quoique ♃ ſoit bien terminé, & qu'on voie diſtinctement les bandes.
28	11. 6. 14	Immerſion du premier; il fait beau, mais la lumière de la Lune m'incommode.
Mars. . . . 1	14. 56. 28	Immerſion du ſecond; il fait fort beau.
6	9. 35. 18	Immerſion du quatrième; il fait beau, mais ♃ eſt ondoyant, & j'ai les yeux fatigués.
23	13. 37. 8	Émerſion du premier; il fait beau, mais il fait un peu de vent qui agite la lunette.
27	10. 12. 7	Émerſion du troiſième; il fait beau.
30	15. 33. 12	Émerſion du premier; il fait beau.
Avril. 3	14. 11. 28	Émerſion du troiſième; il fait très-beau.
15	3. 55. 10	Émerſion du premier; il fait beau.
20	11. 50. 15	Émerſion du ſecond; il fait beau.
27	12. 47. 48	Émerſion du ſecond; il fait beau, mais Jupiter eſt ondoyant & mal terminé.
Mai. 1	12. 15. 29	Émerſion du premier; il fait beau.
10	8. 40. 55	Émerſion du premier; il fait beau.
15	8. 59. 56	Émerſion du ſecond; il fait beau.
16	11. 21. 50	Immerſion du troiſième; il fait beau.
17	10. 34. 36	Émerſion du premier; il fait beau.
22	11. 36. 13	Émerſion du ſecond; il fait beau.
Juin. . . . 25	9. 0. 33	Émerſion du premier; fortes vapeurs.
Novembre. 12	17. 48. 46	Émerſion du quatrième; il fait beau, mais Jupiter eſt encore un peu ondoyant.
22	17. 25. 34	Immerſion du premier; il fait beau.
Décembre. 8	15. 34. 8	Immerſion du premier; il fait beau.
15	71. 24. 31	Immerſion du premier; il fait beau.
28	17. 37. 54	Immerſion du ſecond; il fait beau.
31	15. 32. 33	Immerſion du premier; il fait beau.
31	18. 31. 5	Immerſion du troiſième; il fait beau.

Observation de l'Éclipse de Lune, du 29 Mai 1779, faite avec une Lunette de 7 pieds, garnie d'un réticule de 13 fils parallèles, dont les extrêmes comprenoient le diamètre de la Lune.

MOIS & JOURS.	TEMPS VRAI.	
Mai..... 29	$15^h 24' 0''$	La Lune sort des nuages, & on voit la pénombre à la vue simple.
29	15. 32. 7	Commencement de l'Éclipse.
29	15. 36. 35	La Lune sort des nuages, & Galilée me paroît couvert.
29	15. 40. 0	L'Éclipse est de deux doigts.
29	15. 45. 15	L'Éclipse est de trois doigts.
29	15. 48. 45	L'ombre à Aristarque.
29	15. 50. 35	L'Éclipse est de quatre doigts.
29	15. 53. 30	L'Éclipse me paroît de cinq doigts : la Lune entre dans les nuages.
29	15. 59. 30	La Lune paroît un moment, & l'Éclipse me paroît de six doigts ; elle s'est cachée ensuite, & je ne l'ai pas pu voir depuis.

Observation de l'Éclipse de Lune, du 23 Novembre 1779.

J'ai observé cette Éclipse avec la lunette achromatique de 3 pieds, qui grossit soixante fois, parce qu'il faisoit un très-grand vent qui m'a empêché de me servir de la lunette ordinaire de 7 pieds, qu'il étoit impossible de tenir à la fenêtre.

MOIS & JOURS.	TEMPS VRAI.	
Novembre. 23	6h 34' 0"	Pénombre forte.
23	6. 41. 24	Commencement de l'Éclipse.
23	6. 43. 8	L'ombre à Galilée.
23	6. 44. 20	Galilée couvert.
23	6. 46. 41	L'ombre à Ariſtarque.
23	6. 48. 40	Ariſtarque dans l'ombre.
23	6. 57. 28	L'ombre à Copernic.
23	6. 59. 43	Copernic dans l'ombre.
23	7. 3. 58	L'ombre à Platon.
23	7. 5. 34	Platon dans l'ombre, & la Lune couverte par les nuages.
23	7. 28. 35	L'ombre à *Mare criſium*.
23	7. 34. 10	*Mare criſium* tout dans l'ombre.
23	7. 38. 10	Immerſion douteuſe.
23	7. 38. 44	Immerſion certaine.
23	9. 7. 58	Commencement de l'émerſion entre les nuages qui ont enſuite couvert totalement la Lune; à 9h 30', pluie; & je quitte.



MÉMOIRE
SUR LES
LUNETTES DIPLANTIDIENNES
OU À DOUBLE IMAGE,
Et sur les Objectifs & les Oculaires achromatiques.

Par M. JEAURAT.

LES Lunettes que je nomme *diplantidiennes*, sont celles qui représentent tout-à-la-fois deux images d'un même objet, l'une droite & l'autre renversée; cette construction procure, pour l'observation des Astres, des avantages que n'ont pas les lunettes ordinaires, qui ne représentent qu'une seule image pour chaque objet: voici en quoi consistent les avantages de cette nouvelle construction.

28 Août 1779, & lû par extrait à la rentrée publique de la Saint-Martin de cette année.

Les deux images de l'Astre entrent dans la lunette, & en sortent à la fois par la droite & par la gauche, puisqu'elles sont dans des sens opposés, & qu'elles marchent en sens contraire; ainsi elles vont au-devant l'une de l'autre, se séparent & sortent par les côtés opposés à ceux par où elles sont entrées; donc, pour premier avantage, les deux images ont entr'elles des vîtesses apparentes, doubles de celle d'une seule image à l'égard de l'axe fixe & immobile d'une lunette ordinaire.

Après l'entrée de l'Astre dans la lunette, & avant sa sortie, les deux images, par leur contact, donnent les passages des deux bords du disque de l'Astre, soit par le plan du Méridien, soit par un cercle horaire quelconque; d'ailleurs, le croisement de deux images, lorsqu'elles sont précisément l'une sur l'autre, donne le passage du centre, quelle que soit la grandeur du diamètre de l'Astre : or, cette observation intermédiaire, & qui se vérifie naturellement par les deux autres, n'a encore pu se faire d'aucune manière & avec aucune autre

lunette, & ne se concluoit que de celle des bords du disque de l'Astre, qui s'observent avant ou après le véritable passage cherché.

La construction *diplantidienne* que je propose, a donc l'avantage de doubler la vîtesse du passage des Astres, de rendre l'observation des petites Étoiles aussi facile que celle des plus grandes, & d'être susceptible d'une observation qu'on n'avoit encore pu que déduire de deux autres, savoir, l'observation directe du passage du centre d'un Astre, quelle que soit la grandeur de son diamètre.

Quoiqu'on puisse se dispenser de placer des fils dans cette lunette, néanmoins il sera bon d'y en adapter, parce que, pour les observations aisées à faire, comme celle des Astres dont la force de la lumière est assez considérable pour éclairer les fils de manière à voir tout-à-la-fois l'Astre & les fils, on aura alors la facilité de diriger la lunette dès que l'Astre y entrera, de sorte que les deux images soient toutes deux placées sur le fil qui passe par l'axe de la lunette; car dans ce cas, on sera assuré d'avance que les deux images parcourront exactement le même fil, & que les coïncidences des images se feront comme il convient; autrement il faudroit que, dans l'instant même où on observe dans le méridien le passage & la hauteur du centre de l'Astre, qu'on fasse à la lunette displantidienne le petit changement de hauteur qui convient, pour que le recouvrement exact des deux images se fasse avec la précision que comporte la construction de cette lunette.

D'après les avantages que m'a paru réunir la construction *diplantidienne*, à laquelle personne n'avoit encore pensé, je la proposai le 10 Avril 1778, à M. Navarre, habile Opticien; & après plusieurs conférences que j'eus avec lui à ce sujet, il construisit sa lunette qu'il a présentée à l'Académie: M.rs Cassini de Thury, le Roi & Bailly, en ont fait leur rapport le 2 Septembre 1778, & ont trouvé que le succès de M. Navarre prouvoit qu'il avoit des connoissances en Optique, que n'ont pas ceux qui ne savent qu'exécuter.

Le

Le premier objet que je me propose ici, est de donner la solution générale du Problème dont M. Navarre a résolu lui-même le cas de la construction qu'il a adopté : je vais donc donner ici la relation générale entre les foyers des lentilles & les distances que les lentilles doivent avoir entr'elles ; ainsi, avec trois lentilles de foyer quelconque, on construira toujours, & sans recherche hasardée, une lunette qui procurera complètement l'effet proposé, & quand on n'aura pas atteint exactement les foyers qu'on se sera proposés, d'après les Tables que je donne, on pourra calculer directement, d'après les foyers exécutés, quelles seront les distances qu'on devra adopter pour produire l'effet demandé. Ensuite je donne des mesures d'objectifs *achromatiques*, que je crois préférables à celles que j'ai données, *Mémoires de l'Académie, année 1770, pages 461 & 486.*

L'effet proposé des lunettes *diplantidiennes*, s'opère d'une manière simple, moyennant trois objectifs ; l'un des trois est percé dans son milieu, & les deux autres sont à l'ordinaire, pleins & non percés.

L'objectif percé, que je nomme *objectif équivalent*, forme naturellement une image renversée, tandis que les deux autres forment ensemble, & par leur effet successif & combiné, une image droite en ce même point, alors les deux images formées en un foyer commun, produisent l'effet requis, & les dimensions respectives des foyers des lentilles, à l'égard des distances qu'elles doivent avoir entr'elles, se calculent directement d'après les foyers des lentilles, comme on va le voir. Fig. 1.

Relation des foyers des lentilles, & des distances qu'elles doivent avoir entr'elles pour produire l'effet d'une double image.

1.° Soit la lentille A, dont le foyer F des rayons parallèles est $DA = F$; soit aussi cette lentille A, percée dans son centre A de la manière qui convient, pour que les rayons réfractés des objets ne rencontrent pas ceux des deux autres lentilles a & c. Fig. 1.

2.° Soit la lentille *a* non percée, dont le foyer *f* des rayons parallèles est $Ba = f$, & soit la troisième & dernière lentille *C* non percée, dont le foyer φ des rayons parallèles soit celui qu'il faut pour que l'image *B*, produite par l'effet de la lentille *a*, soit transmise & redressée en *D*, même foyer que celui que produit la seule lentille *A*.

Alors il se formera en *D* une image de situation droite, par l'effet successif des lentilles *a* & *c*, & une autre image de situation renversée, par l'effet de la seule lentille percée *A*.

De plus, soit
- $Da = x$, distance de la lentille *a* au foyer commun *D*,
- $DC = y$, foyer relatif à la distance *BC* de l'image *B* transmise par la lentille *C*,
- $BC = Da - Ba - DC = x - f - y$,
- *r*, rayon de la courbure de la lentille *C*, qu'on suppose isocèle,
- *p*, rapport de la réfraction.

Cela posé, je suppose, comme on le voit, que les foyers *F*, *f* & φ des rayons parallèles, sont les données, & que les distances *Da*, *Dc*, sont les cherchées, parce que la difficulté d'exécuter des lentilles de foyers, exactement conformes à ceux qu'on se prescrit, est très-grande, au lieu qu'on espacera toujours de la manière qu'on voudra des lentilles entr'elles, & selon que le prescrira le calcul.

Voici présentement comme je procède, quant à la solution demandée, & le procédé dépend uniquement de connoissances simples, généralement connues en Optique, & dont M. Navarre a si heureusement fait application dans *son Mémoire le 2 Septembre 1778*.

La lentille *C* transmettra l'image *B* en *D*, si *DC* ou $y = \frac{r \times BC}{2BC(p-1)-r}$, c'est-à-dire, si $= y \frac{r(x-f-y)}{2(x-f-y)(p-1)-r}$.

Mais φ est le foyer des rayons parallèles, ainsi on a

$$r = 2(p-1)\varphi;$$

donc l'équation

$$y = \frac{r(x - f - y)}{2(x - f - y)(p - 1) - r},$$

donnera pour première condition

$$\varphi = \frac{y(x - f - y)}{x - f}.$$

D'une autre part, les grandeurs des images sont dans le rapport des distances focales; ainsi, la lentille A qui produit en D une image, & la lentille a qui produit en B une autre image, ont des grossissemens, dont le rapport est celui de F à f.

D'ailleurs, la lentille C qui transmet l'image B, & la redresse en D, doit en même temps produire en D un grossissement égal à celui de l'image D, produite par la seule lentille A dans ce même point D; cette condition de deux images d'égale grandeur, exige donc cette condition-ci,

$$DA . Ba :: DC . BC,$$

où $F . f :: y . x - f - y,$

savoir $F(x - f - y) = fy;$

ainsi les conditions sont $\begin{cases} \varphi(x - f) = y(x - f - y), \\ F(x - f - y) = fy. \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \text{pour relation entre les données \& les cherchées } \varphi F(x - f) = fy^2, \\ \text{pour solution demandée} \ldots \begin{cases} Da, \text{ où } x = f + \frac{\varphi}{Ff}(F+f)^2, \\ DC, \text{ où } y = \frac{\varphi}{f}(F + f), \\ DA = F. \end{cases} \end{cases}$

Cette solution, qui a toute la généralité qu'on peut desirer, donne naturellement la construction que voici, pour fixer les distances respectives des lentilles dont les foyers F, f, φ seroient données.

Soit les droites indéfinies yQ, CL, perpendiculaire l'une à l'autre; faites $CK = F + f$, $CE = \varphi$, $CG = f$; tirez la droite GK; alors sa parallèle ED donnera Fig. 2.

$Dc = \frac{\varphi}{f}(F + f)$ pour la diſtance de la lentille C, au foyer commun D, cette lentille C ayant φ pour foyer des rayons parallèles.

Fig. 2. D'une autre part, menez DM, parallèle à CL; faites $DH = DC = \frac{\varphi}{f}(F + f)$; par les points H & E, menez HE, ſon prolongement EB donnera

$$DB = \frac{\varphi}{Ff}(F + f)^2,$$

faiſant auſſi $Ba = f$; alors

$$Da = Ba + DB = f + \frac{\varphi}{Ff}(F + f)^2.$$

Quant à la lentille A, ſon foyer F en donne directement la poſition, car $DA = F$.

Cas particuliers qui offrent quelques facilités dans la pratique, mais qui ont l'inconvénient d'alonger, & preſque en pure perte, la longueur de la Lunette.

Fig. 1. 1.° Si l'on fait $\varphi = F = f$, on aura $\begin{cases} Da = 5F, \\ DC = 2F; \end{cases}$

dans ce cas, on a un foyer total Da, cinq fois plus grand que le foyer abſolu DA ou F.

2.° f étant comme on voudra, ſi on fait $\varphi = F$, on aura... $\begin{cases} Da = 2(F + f) + \frac{F^2}{f}, \\ DC = \frac{F}{f}(F + f); \end{cases}$

dans ce cas, on a un foyer total Da, plus que double du foyer abſolu F; & ſi on fait $f = \frac{1}{2}F$, la longueur totale Da ſera cinq fois celle du foyer abſolu F.

3.° φ étant comme on voudra, ſi l'on fait $F = f$, on aura............ $\begin{cases} Da = F + 4\varphi \\ DC = 2\varphi; \end{cases}$

dans ce cas, le foyer total Da ſera néceſſairement plus grand que le foyer abſolu F, mais l'excédant pourra être auſſi petit qu'on voudra; & ſi on fait $\varphi = \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}f$, le foyer total Da ſera triple du foyer abſolu F; d'ailleurs, les lentilles C & A feront à une même diſtance du foyer commun D, c'eſt-à-dire, que le centre de ces deux lentilles ſera commun, la lentille C, placée dans le vide même de la lentille A, d'une autre part, les ſurfaces pourront avoir un même rayon, pourvu que deux ſurfaces ſoient planes. Fig. 3.

Voyez *page 42*, la Table première, qui eſt dreſſée d'après la ſuppoſition de ce cas particulier, & dont le principal défaut eſt d'employer des ſurfaces planes, qui eſt ce qu'il y a de plus difficile à bien travailler. Voyez auſſi la Table deuxième, qui répond à la figure quatrième, & où $F = f = 4\varphi$. Fig. 3.

4.° F étant comme on voudra, ſi l'on fait $f = \varphi$, on aura... $\begin{cases} Da = F + 3f + \frac{f^2}{F}, \\ Dc = F + f; \end{cases}$

dans ce dernier cas, la lentille c ſera placée entre les lentilles A & a, & les lentilles a & c ſeront peu éloignées l'une de l'autre; on aura donc, comme dans les cas précédens, une diſtance focale relative Da, toujours plus grande que la diſtance abſolue. Par exemple, ſi l'on fait $F = 4f = 4\varphi$, on aura $Da = \frac{29}{16}F$, & $Dc = \frac{5}{4}F$. Fig. 8.

Paſſons au cas qu'a adopté avec raiſon M. Navarre, dans lequel la diſtance abſolue ou équivalente DA égale la diſtance totale & relative Da.

Cas préférable à ceux qu'on vient d'expliquer, & qui eſt celui que M. Navarre a adopté, à très-peu de choſe près, pour la lunette qu'il m'a conſtruite lorſqu'il a eu deſſein de remplir mes vues. Fig. 1.

Laiſſant de côté l'avantage qu'il y a à conſtruire des lentilles de foyers égaux, & qu'on peut travailler dans les mêmes baſſins, pour ne s'occuper que du ſoin de n'avoir pas

une longueur de lunette plus grande que celle dont l'effet feroit réellement celui d'une lunette d'un moindre foyer, on voit qu'il convient que la longueur totale ou relative Da foit égale à la distance focale abfolue DA, favoir à celle du foyer des rayons parallèles, repréfentés par DA ou par F; alors ce cas

Fig. 5. eft celui où $Da = DA$, où $f + \frac{\varphi}{Ff}(F + f)^2 = F$.

D'où l'on tire, pour condition des foyers entr'eux, la

Fig. 5. condition prefcrite que voici; $\varphi = \frac{Ff(F - f)}{(F + f)^2}$.

Cette condition exige que f foit moindre que F, car le foyer φ feroit zéro ou négatif, fi f étoit égal ou plus grand que F.

Ainfi pourvu qu'on faffe F plus grand que f, on pourra admettre entre F & f, tel rapport numérique qu'on voudra, puis fe prefcrivant pour foyer des rayons parallèles de la lentille c, la valeur $\varphi = \frac{Ff(F - f)}{(F + f)^2}$, il ne reftera plus d'autre pofition à chercher que celle de cette lentille c, & fa pofition à l'égard du foyer commun $Da = F$, fera $Dc = \frac{F(F - f)}{F + f}$, ce qui revient ici à

$$Dc = \sqrt{\left[\frac{\varphi F}{f} (F - f) \right]}$$

Ce cas déduit fi naturellement de ma folution générale, & qui offre un nombre infini de rapports entre F & f, préfente facilement les cinq principaux cas que voici:

1.° Soit $\left\{ \begin{array}{l} Da = F, \\ Ba = f = \frac{3}{5} F, \\ \varphi = \frac{3}{32} F. \end{array} \right\}$ on fera $Dc = \frac{1}{4} F$.

2.° Soit $\left\{ \begin{array}{l} Da = F, \\ Ba = f = \frac{1}{2} F, \\ \varphi = \frac{1}{9} F, \end{array} \right\}$ on fera $Dc = \frac{1}{3} F$.

3.° Soit $\left\{\begin{array}{l} Da = F, \\ Ba = f = \frac{1}{3} F, \\ \varphi = \frac{1}{8} F, \end{array}\right\}$ on fera $Dc = \frac{1}{2} F$.

4.° Soit $\left\{\begin{array}{l} Da = F, \\ Ba = f = \frac{2}{3} F, \\ \varphi = \frac{1}{9} F, \end{array}\right\}$ on fera $Dc = \frac{2}{3} F$.

5.° Soit $\left\{\begin{array}{l} Da = F, \\ Ba = f = \frac{1}{7} F, \\ \varphi = \frac{3}{32} F, \end{array}\right\}$ on fera $Dc = \frac{3}{4} F$.

De ces principaux cas particuliers, celui qui paroît être le plus favorable de tous, eſt le troiſième, ſavoir celui où la lentille C ſera placée préciſément au milieu de la diſtance totale DA de la lentille, & c'eſt ſur ce principe que, *page 44*, la troiſième Table a été dreſſée : on ſe dirigera donc, à cet égard, d'après cette Table, pour conſtruire les lentilles, & pour les placer comme il convient; mais quand l'exécution de la conſtruction des lentilles n'aura pas été préciſe pour les diſtances focales des lentilles, on ſe départira des poſitions preſcrites dans la Table, & au lieu d'avoir recours, comme M. Navarre, au tâtonnement de l'écartement des lentilles, on meſurera ſéparément les foyers des rayons parallèles de chaque lentille, puis, avec ces meſures, on les placera entr'elles avec ſûreté, de la manière qui conviendra, moyennant les meſures preſcrites par la formule générale, que je rapporte de nouveau ici, comme devant conſtamment ſervir de règle dans tous les ſyſtèmes qu'on adoptera.

Formule générale de la page 27, *& à laquelle doivent être rapportés tous les cas particuliers qu'on pourra imaginer.*

$$\text{Diſtance} \left\{\begin{array}{l} Da = f + \frac{\varphi}{Ff}(F + f)^2, \\ DA = F, \\ DC = \frac{\varphi}{F}(F + f). \end{array}\right.$$

Fig. 1. Et aussi pour relation des foyers avec les distances $\varphi F(Da - f) = f \times DC^2$.

La Table troisième sera suivie d'une quatrième, dans laquelle
Fig. 6. la distance relative Da n'est que les $\frac{4}{5}$ de la distance absolue, ou équivalente DA ou F; & dans cette quatrième Table, qu'on trouve *page 45*, on a supposé, pour le cas proposé, la relation des données que voici, ainsi que les distances cherchées qui s'ensuivent, & qui fixent l'arrangement des lentilles entr'elles.

Soit $F = 2f = 15\varphi$, on fera $\begin{cases} DA = F, \\ Da = \frac{4}{5} F, \\ DC = \frac{1}{5} F. \end{cases}$

Voyons présentement quel est le cas qui convient tout-à-la-fois & aux oculaires & aux objectifs à double images.

Cas particulier qui convient tout-à-la-fois aux oculaires & aux objectifs à double images.

Fig. 7. Pour le cas des oculaires, on suppose l'œil placé en y, de manière que ce point y soit placé à une distance Ay, égale au foyer F ou à AD foyer de la lentille percée A, & en même temps à une distance ay, égale à celle du foyer f de la lentille a; ce cas est donc celui de la condition que voici.

Condition des oculaires $\begin{cases} Ay = DA = F, \text{ foyer de la lentille percée,} \\ ay = Ba = f, \\ Aa = Ay - ay = F - f. \end{cases}$

Mais, *page 27*, $\begin{cases} Da = f + \frac{\varphi}{Ff}(F + f)^2, \\ DA = F; \end{cases}$

alors, $Aa = Da - DA$

donne $F - f = f + \frac{\varphi}{Ff}(F + f)^2$,

ce qui assigne au foyer φ des rayons parallèles de la lentille C, la valeur prescrite que voici :

$$\varphi' = \frac{2Ff(F - f)}{(F + f)^2}.$$

De plus,

De plus, f doit être moindre que F; car si f égaloit F, φ deviendroit zéro, & si f étoit plus grand que F, le foyer φ seroit négatif, c'est-à-dire que la lentille C seroit concave: excluant donc les lentilles concaves, qui ne réussissent que pour les miroirs de réflexion, on fera f moindre que F, & aussi $\varphi = \frac{2Ff(F-f)}{(F+f)^2}$. Cela posé, la solution qui convient tout-à-la-fois aux oculaires & aux objectifs à double image, sera celle-ci.

Condition prescrite $\varphi = \frac{2Ff(F-f)}{(F+f)^2}$,

Distance cherchée...
$$\begin{cases} DA = F, \\ Da = 2F - f = f + \frac{\varphi}{Ff}(F+f)^2, \\ DC = \frac{2F(F-f)}{F+f} = \frac{\varphi}{f}(F+f). \end{cases}$$

Dans ce cas, commun aux objectifs & aux oculaires à double images, le foyer relatif Da sera plus grand que le foyer absolu DA, & supposant, *Table V, page 46*, $f = \frac{1}{2}F$, Fig. 7.

On trouvera........
$$\begin{cases} \varphi = \frac{2}{9}F, \\ Da = \frac{3}{2}F, \\ DA = F, \\ DC = \frac{2}{3}F; \end{cases}$$

d'ailleurs, si l'on veut favoriser la facilité de l'exécution, par exemple, d'admettre une même courbure pour les lentilles a & c, cette supposition de $f = \varphi$, donnera

$$f = \varphi = (\sqrt{5} - 2)F = 0{,}23607\,F.$$ Fig. 8.

Cela posé,

Les distances seront
$$\begin{cases} DA = F = 4{,}23604f = 4{,}23604\varphi, \\ Da = 1{,}76393\,F, \\ DC = 1{,}23600\,F. \end{cases}$$

Or, c'est dans cette supposition qu'est dressée, *page 47*, la sixième & dernière de mes Tables, pour les constructions *diplantidiennes*.

La crainte qu'il y a pour le ſuccès de la cinquième & ſixième Tables, communes aux oculaires & aux objectifs, c'eſt que dans l'application aux oculaires, il pourra arriver que la néceſſité de partager en deux parties l'ouverture totale, afin de laiſſer paſſer librement les différens rayons, ne reſtreigne trop chaque partie de l'ouverture de l'oculaire, l'ouverture totale étant déjà pour l'ordinaire plus petite qu'on ne voudroit, eu égard au champ de la lunette, qu'on a cependant intérêt de rendre le plus grand qu'il eſt poſſible.

Fig. 7. Si on ſupprime la lentille *C*, & ſi on fait la lentille *A* pleine & non percée, il eſt évident qu'on ſe trouve dans le cas des oculaires équivalens qui renverſent les objets, & qui ſont ceux qui réuſſiſſent le mieux dans la pratique.

Avant de paſſer à la conſtruction des objectifs achromatiques, on remarquera que la formule des objectifs à double image, s'applique d'une manière directe à la conſtruction des oculaires qui redreſſent les objets, & qui ſont composés
Fig. 9. de deux lentilles *a* & *c*.

La conſtruction des oculaires qui redreſſent les objets, moyennant deux lentilles ſeulement, n'eſt pas nouvelle *; elle a même été abandonnée, quoique cependant ingénieuſe, parce qu'elle reſtreint beaucoup le champ des lunettes, & le beſoin d'augmenter ce champ le plus qu'il eſt poſſible, a fait qu'on a eu recours à l'uſage de trois & de quatre lentilles, placées à foyers coïncidens les uns aux autres ; alors on a alongé forcément, & de beaucoup, la longueur de la lunette: or pour un oculaire, dont le foyer équivalent ne ſeroit pas moindre que deux pouces, voici la conſtruction qui convient, afin que la lunette ait préciſément la même longueur qu'elle auroit ſi l'oculaire étoit ſimple, & qu'il renverſât les objets.

* Seconde partie de l'Optique du P. Chérubin, Capucin, *année 1671*. D'une autre part, quant à la conſtruction des oculaires équivalens qui renverſent les objets, & qui eſt préférable à tout autre, l'oculaire près de l'œil doit être le tiers du foyer de l'autre, & la diſtance entre les deux doit être les deux tiers du foyer du plus grand des deux.

Soit
- f, foyer des rayons parallèles de la lentille a, la plus proche de l'œil. Fig. 9.
- φ, foyer des rayons parallèles de la lentille c, la plus éloignée de l'œil,
- D, foyer relatif } des lentilles a & c.
- F, foyer équivalent }

La position de l'œil ne devant pas différer de celle qui auroit lieu, s'il n'y avoit qu'une seule lentille, dont le foyer seroit F, & qui renversât les objets, on est dans le cas de la formule qui convient tout-à-la-fois aux oculaires & aux objectifs à double image; ainsi, on a pour condition

$$\varphi = \frac{2Ff(F-f)}{(F+f)^2}.$$

Cela posé,

on a
$$Da = 2F - f = f + \frac{\varphi}{Ff}(F+f)^2,$$
$$Dc = \frac{2F(F-f)}{F+f} = \frac{\varphi}{f}(F+f),$$
$$ac = \frac{f(3F-f)}{F+f}.$$

D'ailleurs il convient que f soit moindre que φ; ainsi on peut adopter le rapport des foyers qui suit.

Rapport numérique
$$F = 6498,$$
$$f = \tfrac{1}{18}F = 361,$$
$$\varphi = \tfrac{34}{361}F = 612.$$

Position numérique
$$Da = 12635,$$
$$DC = 11628,$$
$$a = 1007.$$

Réduisant ces dimensions relatives entr'elles à celle d'un foyer équivalent F de 6 pouces, on aura les mesures qui suivent. Voy. Table VII, page 48.

Pour un foyer équivalent de 6 pouces...

	pouces	lignes	
$f =$	0.	4,0,	foyer des rayons parallèles de la lentille a,
$\varphi =$	0.	6,8,	foyer des rayons parallèles de la lentille C,
$Da =$	11.	8,0	positions respectives des lentilles a & c,
$DC =$	10.	8,8	
$Ac =$	0.	11,2	

Alors un oculaire qui auroit les dimensions qu'on vient de calculer, redresseroit l'image des objets, & n'alongeroit pas plus la lunette qu'un oculaire simple qui les renverseroit; car pour un oculaire simple de 6 pouces, & qui renverse l'image des objets, l'œil s'éloigne du foyer de l'objectif de 12 pouces: ici, *figure 9*, pour un pareil foyer équivalent, l'œil s'éloigne de la lentille *a* de 4 lignes, & le surplus *Da* est de 11 pouces 8 lignes.

Quant à la facilité de l'exécution, on peut faire $f = \varphi$, mais cette construction augmente même de beaucoup la longueur de l'oculaire dans un grand nombre de cas; aussi n'employe-t-on cette construction que lorsqu'on veut voir de petits objets proches: enfin, cette construction, utile à de certains égards, est toute calculée dans la *Table VIII, page 48*, & cette huitième Table offre huit manières différentes de construire les oculaires qu'on voudra, & pour le cas où l'on veut voir les objets dans une situation droite & naturelle. Présentement voici les dimensions d'objectifs achromatiques, que je crois préférables à celles de mon Mémoire, *année 1770, pages 461—486.*

Fig. 12. *Dimensions des Objectifs achromatiques composés de trois Lentilles* cB, BA, AA; *celles du milieu* BA *concave de flint-glass ou de crystal d'Angleterre; & les deux autres* CB, AA *convexe, de crow-glass ou de glace de Venise.*

Pour la facilité du travail des verres, il convenoit d'admettre le moins possible de courbures différentes; aussi, dans cette vue, n'ai-je admis en 1770 que deux courbures différentes: or comme cette loi que je m'étois prescrite, ne détruit réellement que l'aberration de réfrangibilité, qui, à la vérité, est la plus nuisible, je vais cette fois admettre trois différentes courbures *A, B, C;* & de-là s'ensuivra que je détruirai entièrement l'aberration de réfrangibilité, & que

je restreindrai celle de sphéricité à une quantité moindre que celle d'un objectif simple *AA*; d'ailleurs j'admettrai aussi, comme je l'ai déjà fait, *Mémoires de l'Académie, année 1770, pages 465*, les réfractions qui suivent.

Pour le Verre-de Venise, dont le pouce cube pèse 950 grains.

Réfraction des rayons rouges................ 1,5258.
Réfraction des rayons moyens............... 1,5298.
Réfraction des rayons violets................ 1,5433.

Pour le crystal d'Angleterre, dont le pouce cube pèse 1215 grains.

Réfraction des rayons rouges................ 1,5920.
Réfraction des rayons moyens............... 1,5973.
Réfraction des rayons violets................ 1,6229.

Ces réfractions ont été établies d'après un grand nombre d'expériences que j'ai vu faire à M. l'abbé Bouriot; & ayant admis ces résultats de réfraction, j'ai calculé trigonométriquement, *page 49*, les neuvième & dixième Tables qui terminent ce Mémoire. On trouvera donc ci-après les oculaires achromatiques, calculés depuis 9 lignes jusqu'à 7 pouces, & les objectifs depuis 2 pouces jusqu'à 12 pieds de foyer.

Avant de procéder au calcul, j'envisage la lentille *AA*, placée du côté de l'œil, comme étant un objectif simple & aussi comme étant la lentille principale; puis les deux précédens *AB*, *BC*, comme devant produire sur la lentille principale *AA* l'effet de diminuer le plus qu'il est possible l'aberration de sphéricité, & d'annuller en même temps celle de réfrangibilité; d'où l'on voit que les rayons entrant dans la précédente lentille *cB*, suivant une direction parallèle à l'axe, doivent, après avoir traversé les deux lentilles *CB*, *BA*, sortir de la seconde *BA*, suivant des directions & dispersions *HR* de rayon rouge, *HM* de rayon moyen, & *HV* de rayon violet; & qu'après avoir traversé de nouveau l'objectif simple *AA*, ils doivent sortir ensemble & suivre une seule & même direction *HD*, ainsi en fixant une distance

Fig. 12.

Fig. 10.

Fig. 10. focale AD qui ſoit celle de la lentille ſimple AA. Voici comment ſe fait le calcul requis.

Fig. 12. Soit
- r rayon des courbures égales AA de la lentille de crow-glaſſ,
- p rapport de la réfraction moyenne dans le crow-glaſſ,
- f foyer des rayons parallèles pour la réfraction moyenne,
- $DA = f = \frac{r}{2(p-1)}$ pour une ouverture infiniment petite d'objectif,
- AH demi-ouverture priſe convenablement, mais à volonté.

1.° Avec AH, pris à volonté, & avec $f = \frac{r}{2(p-1)}$, on calculera la direction, ſuivant laquelle le rayon moyen auroit dû entrer dans la lentille principale AA, pour ſortir ſuivant la direction HD, aſſujettie à la diſtance focale $f = \frac{r}{2(p-1)}$.

Fig. 12. 2.° Avec l'arc Bh, pris comme il convient, ſavoir, à peu-près double de l'arc AH; on calculera pour l'intérieur de la première lentille CB *(figure 11)* la poſition FN, qu'auroit dû avoir le rayon moyen *(figure 10)* pour prendre la direction HD de la ſortie du rayon moyen.

Fig. 11. 3.° Avec l'angle NFK (du rayon moyen FN, avec FK, parallèle à l'axe des lentilles) on cherchera dans la Table qui ſuit, l'angle LFK qui lui correſpond : alors cet angle LFK eſt *(figure 12)* la valeur de l'arc C, eu égard aux évaluations arbitraires des arcs Bh, AH. Ainſi laiſſant de côté la deſtruction de l'aberration de réfrangibilité, on détruira ici celle de ſphéricité.

POUR LE VERRE DE VENISE.

Figure 11.

TABLE de la correſpondance de l'angle calculé NFK *avec l'angle cherché* LFK, *dont l'arc* C *eſt la meſure. L'arc* C *eſt la première courbure de la première lentille* CB *de l'objectif total* C, B, A, A. Fig. 12.

NFK.	LFK ou c.	DIFFÉR.	NFK.	LFK ou c.	DIFFÉR.	NFK.	LFK ou c.	DIFFÉR.
D. M.	D. M. S.	M. S.	D. M.	D. M. S.	M. S.	D. M.	D. M. S.	M. S.
0. 0	0. 0. 0		3. 0	8. 34. 39		6. 0	16. 57. 18	
		57. 25			56. 39			54. 38
0.20	0. 57. 25		3.20	9. 31. 18		6.20	17. 51. 56	
		57. 23			56. 28			54. 21
0.40	1. 54. 48		3.40	10. 27. 46		6.40	18. 46. 17	
		57. 21			56. 19			54. 2
1. 0	2. 52. 9		4. 0	11. 24. 5		7. 0	19. 40. 19	
		57. 20			56. 7			53. 46
1.20	3. 49. 29		4.20	12. 20. 12		7.20	20. 34. 5	
		57. 14			55. 52			53. 25
1.40	4. 46. 43		4.40	13. 16. 4		7.40	21. 27. 30	
		57. 8			55. 40			53. 5
2. 0	5. 43. 51		5. 0	14. 11. 44		8. 0	22. 20. 35	
		57. 3			55. 27			52. 47
2.20	6. 40. 54		5.20	15. 7. 11		8.20	23. 13. 22	
		56. 57			55. 18			52. 30
2.40	7. 37. 51		5.40	16. 2. 29		8.40	24. 5. 52	
		56. 48			54. 49			51. 14
3. 0	8. 34. 39		6. 0	16. 57. 18		9. 0	24. 57. 6	

Quelle que ſoit la relation établie entre les courbures *A* & *B*, Fig. 12.
on trouvera toujours avec la Table précédente la courbure *C*,
qui convient pour que le rayon moyen *EF*, parallèle à Fig. 11.
l'axe *GD*, ſorte de la lentille ſimple *AA*, ſuivant la direction Fig. 10.
preſcrite *HD*; mais ſi d'ailleurs la direction des rayons
rouges & violets à la ſortie des lentilles *CB*, *BA*, ne forme
pas un angle *VHR*, ou *uHr* de diſperſion, qui ſoit préciſément celui qui convient, on fera de nouveau une ſeconde
ou au plus une troiſième ſuppoſition pour l'établiſſement du
rapport de la courbure *A* à la courbure *B*, & alors on fixera Fig. 12.
décidément la vraie courbure *C*, tant pour la deſtruction
complète de l'aberration de réfrangibilité, que pour la diminution conſidérable de celle de ſphéricité.

Fig. 12. 1.° Soit la courbure *A* de.......... 20ᵈ 0′ 0″,
la distance focale de......... 1,0000,
le rayon de la courbure *A*, de.. 1,0605;

On trouvera { courbure *B* = 29ᵈ 20′ 0″,
courbure *C* = 20. 35. 0,
rayon de la courbure *B* = 0,7706,
rayon de la courbure *C* = 1,0738,
ouverture de l'objectif = 0,7248.

Cette détermination convient à une distance focale de 12 lignes, eu égard à une épaisseur de verre d'environ 2 lignes: d'ailleurs, ce rapport corrige dans l'objectif simple *AA* une aberration de réfrangibilité de 46′ 31″, & une de sphéricité de 3ᵈ 51′ 10″.

2.° Soit la courbure *A* de.......... 10ᵈ 0′ 0″.
La distance focale & le rayon de la courbure *A*, comme dans le 1.°

On trouvera { courbure *B* = 19ᵈ 9′ 0″,
courbure *C* = 13. 4. 6,
rayon de la courbure *B* = 0,5696,
rayon de la courbure *C* = 0,8263,
ouverture de l'objectif = 0,3680.

Cette détermination convient à une distance focale de 42 lignes, & corrige dans l'objectif simple *AA* une aberration de réfrangibilité de 21′ 29″, & une de sphéricité de 33′ 11″.

3.° Soit la courbure *A* de.......... 5ᵈ 0′ 00″.
La distance focale ainsi que le rayon de la courbure *A*, comme dans le 1.°

On trouvera { courbure *B* = 10ᵈ 25′ 43″,
courbure *C* = 6. 55. 27,
rayon de la courbure *B* = 0,5128,
rayon de la courbure *C* = 0,7694,
ouverture de l'objectif = 0,1847.

Fig. 12. Cette détermination convient à une distance focale de 12 pouces, & corrige dans l'objectif simple *AA* une aberration de réfrangibilité de 10′ 35″, & une de sphéricité de 6′ 17″.

4.° Soit la courbure *A* de....... 2ᵈ 30′ 0″.

La

La distance focale ainsi que le rayon de la courbure A, comme dans le 1.° Fig. 12.

On trouvera { courbure B = $5^d\ 15'\ 43''$,
courbure C = 3. 30. 6,
rayon de la courbure B = 0,5058,
rayon de la courbure C = 0,7582,
ouverture de l'objectif = 0,0924.

Cette détermination convient à une distance focale de 54 pouces, & corrige dans l'objectif simple AA une aberration de réfrangibilité de $5'\ 12''$, & une de sphéricité de $1'\ 52''$.

D'après ces résultats, on juge facilement que le rapport des courbures ne peut être constant; que celui qui convient aux petites lunettes ne peut convenir aux grandes, & réciproquement; on ne doit donc pas manquer d'avoir égard à l'ouverture qu'on se propose de donner à l'objectif; on sait aussi que l'épaisseur des verres étant limitée, les ouvertures ne peuvent manquer de l'être, & que par cette raison, on est forcé de donner aux objectifs de long foyer, des ouvertures moindres qu'à ceux de court foyer.

C'est d'après les rapports de courbures qui viennent d'être déterminés, que j'ai dressé, *page 49*, les neuvième & dixième Tables, où l'on trouve les dimensions d'oculaires achromatiques calculées depuis 9 lignes de foyer jusqu'à 7 pouces de foyer, & les objectifs, depuis 2 pouces jusqu'à 12 pieds. Un plus ample détail seroit superflu; & si les matières qu'on emploie n'ont pas précisément le même degré de réfringence que celui que je leur ai supposé, on pourra en être averti d'avance par leur pesanteur spécifique; alors on feroit soi-même le calcul qu'exigeroit la circonstance du cas, d'un autre degré de réfringence que celui que j'ai adopté.

TABLE I.

Figure 3.

POUR LES OBJECTIFS À DOUBLE IMAGE.

Cas où deux ſurfaces ſont planes & où les autres ſont égales entr'elles, & doivent ſe travailler dans deux baſſins formés l'un dans l'autre.

DISTANCE focale équivalente *DA* ou *Dc*.	RAYONS des courbures, ſuppoſant LA MATIÈRE du poids de 950 grains, LE POUCE CUBE.	DISTANCE relative ou totale *Da*.	DISTANCE *Aa* ou *Ca* entre LES LENTILLES.
pieds. pouces.	*pieds. pouces. lignes.*	*pieds. pouces.*	*pieds. pouces.*
0. 6	0. 6. 4	1. 6	1. 0
1. 0	1. 0. 9	3. 0	2. 0
2. 0	2. 1. 6	6. 0	4. 0
3. 0	3. 2. 2	9. 0	6. 0
4. 0	4. 2. 11	12. 0	8. 0
5. 0	5. 3. 7	15. 0	10. 0
6. 0	6. 4. 4	18. 0	12. 0

Cette conſtruction a l'inconvénient de tripler la longueur de la Lunette, & d'employer des ſurfaces planes.

TABLE II.

Figure 4.

POUR LES OBJECTIFS À DOUBLE IMAGE.

Cas où les Lentilles a *&* A *ont des foyers égaux, & où la Lentille* c *à un foyer égal au quart des deux autres.*

DISTANCE focale équivalente *DA*, & FOYER des Lentilles *A* & *a*.	FOYER de LA LENTILLE *c*.	DISTANCE relative ou totale *Da*.	DISTANCE *DC*.
pieds. pouces.	*pieds. pouces. lignes.*	*pieds. pouces.*	*pieds. pouces.*
0. 6	0. 1. 6	1. 0	0. 3
1. 0	0. 3. 0	2. 0	0. 6
2. 0	0. 6. 0	4. 0	1. 0
3. 0	0. 9. 0	6. 0	1. 6
4. 0	1. 0. 0	8. 0	2. 0
5. 0	1. 3. 0	10. 0	2. 6
6. 0	1. 6. 0	12. 0	3. 0

Cette conſtruction doublera la diſtance totale & relative *Da* à l'égard du foyer équivalent *DA*.

TABLE III.

Figure 5.

Pour les Objectifs à double image, construction diplantidienne plus avantageuse que les deux précédentes.

Ici la Lentille a *occupe le milieu de la Lentille percée* A, *&* *la Lentille* C *est placée au milieu de la distance totale* DA.

Dans ce cas, la condition des foyers est $\varphi = \frac{Ff(F-f)}{(F+f)^2}$.

$Da = F$ FOYER de la Lentille percée *A*, & aussi Foyer équivalent.	f FOYER de la Lentille *a*, placée dans le vide de la Lentille percée *A*.	φ FOYER de la Lentille *C*.	DC POSITION de la Lentille *C*.
pieds pouces	*pieds pouces*	*pieds pouc. lignes*	*pieds pouc.*
0. 6	0. 2	0. 0. 9	0. 3
1. 0	0. 4	0. 1. 6	0. 6
1. 6	0. 6	0. 2. 3	0. 9
2. 0	0. 8	0. 3. 0	1. 0
2. 6	0. 10	0. 3. 9	1. 3
3. 0	1. 0	0. 4. 6	1. 6
3. 6	1. 2	0. 5. 3	1. 9
4. 0	1. 4	0. 6. 0	2. 0
4. 6	1. 6	0. 6. 9	2. 3
5. 0	1. 8	0. 7. 6	2. 6
5. 6	1. 10	0. 8. 3	2. 9
6. 0	2. 0	0. 9. 0	3. 0
6. 6	2. 2	0. 9. 9	3. 3
7. 0	2. 4	0. 10. 6	3. 6
7. 6	2. 6	0. 11. 3	3. 9
8. 0	2. 8	1. 0. 0	4. 0
8. 6	2. 10	1. 0. 9	4. 3
9. 0	3. 0	1. 1. 6	4. 6
9. 6	3. 2	1. 2. 3	4. 9
10. 0	3. 4	1. 3. 0	5. 0
10. 6	3. 6	1. 3. 9	5. 3
11. 0	3. 8	1. 4. 6	5. 6
11. 6	3. 10	1. 5. 3	5. 9
12. 0	4. 0	1. 6. 0	6. 0
24. 0	8. 0	3. 0. 0	12. 0

TABLE IV.

Figure 6.

Pour les Objectifs à double image, construction diplantidienne qui a sur les trois précédentes, l'avantage d'avoir une distance focale relative D a, *moindre que la distance équivalente* DA.

Ici la Lentille a *a un foyer moitié de la Lentille percée* A, *& la Lentille* c *a un foyer qui est les quatre cinquièmes du foyer de la même Lentille* A.

DA = F FOYER de la Lentille percée *A*, & aussi Foyer équiv.	*f* FOYER de la Lentille *a*, savoir Distance *Ba*.	φ FOYER de la Lentille *C*.	*Da* POSITION de la Lentille *a*, ou Foyer relatif.	*DC* POSITION de la Lentille *C*.
pieds pouces	*pieds pouc.*	*pieds pouc. lign.*	*pieds pouc. lign.*	*pieds pouc. lign.*
0. 6	0. 3	0. 0. 4,8	0. 4. 9,6	0. 1. 2,4
1. 0	0. 6	0. 0. 9,6	0. 9. 7,2	0. 2. 4,8
1. 6	0. 9	0. 1. 2,4	1. 2. 4,8	0. 3. 7,2
2. 0	1. 0	0. 1. 7,2	1. 7. 2,4	0. 4. 9,6
2. 6	1. 3	0. 2. 0,0	2. 0. 0,0	0. 6. 0,0
3. 0	1. 6	0. 2. 4,8	2. 4. 9,6	0. 7. 2,4
3. 6	1. 9	0. 2. 9,6	2. 9. 7,2	0. 8. 4,8
4. 0	2. 0	0. 3. 2,4	3. 2. 4,8	0. 9. 7,2
4. 6	2. 3	0. 3. 7,2	3. 7. 2,4	0. 10. 9,6
5. 0	2. 6	0. 4. 0,0	4. 0. 0,0	1. 0. 0,0
5. 6	2. 9	0. 4. 4,8	4. 4. 9,6	1. 1. 2,4
6. 0	3. 0	0. 4. 9,6	4. 9. 7,2	1. 2. 4,8
6. 6	3. 3	0. 5. 2,4	5. 2. 4,8	1. 3. 7,2
7. 0	3. 6	0. 5. 7,2	5. 7. 2,4	1. 4. 9,6
7. 6	3. 9	0. 6. 0,0	6. 0. 0,0	1. 6. 0,0
8. 0	4. 0	0. 6. 4,8	6. 4. 9,6	1. 7. 2,4
8. 6	4. 3	0. 6. 9,6	6. 9. 7,2	1. 8. 4,8
9. 0	4. 6	0. 7. 2,4	7. 2. 4,8	1. 9. 7,2
9. 6	4. 9	0. 7. 7,2	7. 7. 2,4	1. 10. 9,6
10. 0	5. 0	0. 8. 0,0	8. 0. 0,0	2. 0. 0,0
10. 6	5. 3	0. 8. 4,8	8. 4. 9,6	2. 1. 2,4
11. 0	5. 6	0. 8. 9,6	8. 9. 7,2	2. 2. 4,8
11. 6	5. 9	0. 9. 2,4	9. 2. 4,8	2. 3. 7,2
12. 0	6. 0	0. 9. 7,2	9. 7. 2,4	2. 4. 9,6
24. 0	12. 0	1. 7. 2,4	19. 2. 4,8	4. 9. 7,2

TABLE V.

Voyez la page 32, *& aussi la* figure 7.

Dimensions communes aux Objectifs & aux Oculaires à double image.

Pour les oculaires, l'œil sera placé en *y;* alors *D* sera le foyer de l'oculaire.

Pour les objectifs, l'œil sera au contraire placé au-delà de *D*, & le point *D* sera le foyer de l'objectif.

DA = *P* FOYER de la Lentille percée *A*, & aussi Foyer équiv.	*f* FOYER de la Lentille *a*, & aussi distance *A a*.	*φ* FOYER de la Lentille *C*.	*D a* POSITION de la Lentille *a*, & aussi Foyer relatif total.	*DC* POSITION de la Lentille *c*.
pieds pouces	*pieds pouc. lign.*	*pieds pouc. lign.*	*pieds pouc. lign.*	*pieds pouc. lign.*
0. 1	0. 0. 6	0. 0. 2,6	0. 1. 6	0. 0. 8
0. 2	0. 1. 0	0. 0. 5,3	0. 3. 0	0. 1. 4
0. 4	0. 2. 0	0. 0. 10,7	0. 6. 0	0. 2. 8
0. 6	0. 3. 0	0. 1. 4,0	0. 9. 0	0. 4. 0
0. 8	0. 4. 0	0. 1. 9,3	1. 0. 0	0. 5. 4
0. 10	0. 5. 0	0. 2. 2,6	1. 3. 0	0. 6. 8
1. 0	0. 6. 0	0. 2. 8,0	1. 6. 0	0. 8. 0
1. 6	0. 9. 0	0. 4. 0,0	2. 3. 0	1. 0. 0
2. 0	1. 0. 0	0. 5. 4,0	3. 0. 0	1. 4. 0
2. 6	1. 3. 0	0. 6. 8,0	3. 9. 0	1. 8. 0
3. 0	1. 6. 0	0. 8. 0,0	4. 6. 0	2. 0. 0
3. 6	1. 9. 0	0. 9. 4,0	5. 3. 0	2. 4. 0
4. 0	2. 0. 0	0. 10. 8,0	6. 0. 0	2. 8. 0
4. 6	2. 3. 0	1. 0. 0,0	6. 9. 0	3. 0. 0
5. 0	2. 6. 0	1. 1. 4,0	7. 6. 0	3. 4. 0
5. 6	2. 9. 0	1. 2. 8,0	8. 3. 0	3. 8. 0
6. 0	3. 0. 0	1. 4. 0,0	9. 0. 0	4. 0. 0
6. 6	3. 3. 0	1. 5. 4,0	9. 9. 0	4. 4. 0
7. 0	3. 6. 0	1. 6. 8,0	10. 6. 0	4. 8. 0
7. 6	3. 9. 0	1. 8. 0,0	11. 3. 0	5. 0. 0
8. 0	4. 0. 0	1. 9. 4,0	12. 0. 0	5. 4. 0
9. 0	4. 6. 0	2. 0. 0,0	13. 6. 0	6. 0. 0
10. 0	5. 0. 0	2. 2. 8,0	15. 0. 0	6. 8. 0
11. 0	5. 6. 0	2. 5. 4,0	16. 6. 0	7. 4. 0
12. 0	6. 0. 0	2. 8. 0,0	18. 0. 0	8. 0. 0

TABLE VI.

Figure 8.

Dimensions communes aux Objectifs & aux Oculaires à double image.

Dans ce cas, & dans le précédent, $\varphi = \frac{2\,Ff\,(F-f)}{(F+f)^2}$.

Ici l'on a fait les foyers des Lentilles *a* & *c* égaux entr'eux, ce qui offre une facilité plus grande que celle de la Table précédente, mais ayant pour inconvénient celui d'avoir des foyers *f* & φ très-petits.

$DA = F$ FOYER de la Lentille percée *A*, & aussi Foyer équival.		$f = \varphi$ FOYER des Lentilles égales *a* & *c*.			*Da* POSITION de la Lentile *a*, & aussi Foyer relatif total.			*DC* POSITION de la Lentille *C*.		
pieds	*pouces*	*pieds*	*pouces*	*lignes*	*pieds*	*pouces*	*lignes*	*pieds*	*pouces*	*lignes*
0.	1	0.	0.	2,9	0.	1.	9,2	0.	1.	2,9
0.	2	0.	0.	5,7	0.	3.	6,4	0.	2.	5,7
0.	4	0.	0.	11,3	0.	7.	0,7	0.	4.	11,4
0.	6	0.	1.	5,0	0.	10.	7,0	0.	7.	5,0
0.	8	0.	1.	10,7	1.	2.	1,4	0.	9.	10,7
0.	10	0.	2.	4,4	1.	5.	7,7	1.	0.	4,4
1.	0	0.	2.	10,0	1.	9.	2,0	1.	2.	10,0
1.	6	0.	4.	3,0	2.	7.	9,0	1.	10.	3,0
2.	0	0.	5.	8,0	3.	6.	4,0	2.	5.	8,0
2.	6	0.	7.	1,0	4.	4.	11,0	3.	1.	1,0
3.	0	0.	8.	6,0	5.	3.	6,0	3.	8.	6,0
3.	6	0.	9.	11,0	6.	2.	1,0	4.	3.	11,0
4.	0	0.	11.	4,0	7.	0.	8,0	4.	11.	4,0
4.	6	1.	0.	9,0	7.	11.	3,0	5.	6.	9,0
5.	0	1.	2.	2,0	8.	9.	10,0	6.	2.	2,0
5.	6	1.	3.	7,0	9.	8.	5,0	6.	9.	7,0
6.	0	1.	5.	0,0	10.	7.	0,0	7.	5.	0,0
6.	6	1.	6.	5,0	11.	5.	7,0	8.	0.	5,0
7.	0	1.	7.	10,0	12.	4.	2,0	8.	7.	10,0
7.	6	1.	9.	3,0	13.	2.	9,0	9.	3.	3,0
8.	0	1.	10.	8,0	14.	1.	4,0	9.	10.	8,0
9.	0	2.	1.	6,0	15.	10.	6,0	11.	1.	6,0
10.	0	2.	4.	4,0	17.	7.	8,0	12.	4.	4,0
11.	0	2.	7.	2,0	19.	4.	10,0	13.	7.	2,0
12.	0	2.	10.	0,0	21.	2.	0,0	14.	10.	0,0

TABLE VII.

Figure 9.

Dimensions des Oculaires qui redressent l'image des objets.

Ici l'Oculaire composé de deux Lentilles, n'alonge pas plus la longueur de la Lunette, que si on y substituoit un seul Oculaire simple qui renverseroit les images, comme il a été dit *page 36;* mais la Lunette aura peu de champ, ce qui fait qu'ordinairement on préfère les Oculaires équivalens qui renversent les images, & qui grandissent le champ de la Lunette autant qu'il est possible.

F FOYER équivalent.		*f* FOYER de la Lentille *a.*	*φ* FOYER de la Lentille *c.*	*a c* DISTANCE des Lentilles.	*Da* LONGUEUR totale de l'Oculaire.	
pouc.	lign.	lig. dix.	lign. dix.	lign. dix.	pouc.	lign. dix.
2.	0	1,3	2,3	3,7	3.	10,7
2.	2	1,4	2,4	4,0	4.	2,6
2.	4	1,5	2,6	4,3	4.	6,5
2.	6	1,6	2,8	4,6	4,	10,3
2.	8	1,8	3,0	4,9	5.	2,2
2.	10	1,9	3,2	5,2	5.	6,1
3.	0	2,0	3,4	5,6	5.	10,0
3.	2	2,1	3,6	5,9	6.	1,9
3.	4	2,2	3,7	6,2	6.	5,8
3.	6	2,3	3,9	6,5	6.	9,6
3.	8	2,4	4,1	6,8	7.	1,5
3.	10	2,6	4,3	7,1	7.	5,4
4.	0	2,7	4,5	7,5	7.	9,3
4.	4	2,9	4,9	8,1	8.	5,1
4.	8	3,1	5,3	8,7	9.	0,9
5.	0	3,3	5,7	9,3	9.	8,7
5.	4	3,5	6,1	9,9	10.	4,5
5.	8	3,8	6,5	10,5	11.	0,3
6.	0	4,0	6,8	11,2	11.	8,0

TABLE

DIMEN L'IMAGE DES OBJETS,

gaux.

ALES *A* ET *C*,

total est Da.

F FOYER équivalent	FOYER DES LENTIL *a* & *c* = 3 li			FOYERS DES LENTILLES & *c* = 18 lign.			FOYERS DES LENTILLES *a* & *c* = 21 lign.				FOYERS DES LENTILLES *a* & *c* = 24 lign.			
	Da.		*D*	*Da.*	*DC.*		*Da.*		*DC.*		*Da.*		*DC.*	
lignes.	pouc.	lign.	pouc.	lign.	pouc.	lign.	pouc.	lign.	pouc.	lign.	pouc.	lign.	pouc.	lign.
3	1.	3,0	0.	9,0	1.	9,0	17.	9,0	2.	0,0	22.	3,0	2.	3,0
6	1.	4,5	0.	6,0	2.	0,0	11.	10,5	2.	3,0	14.	6,0	2.	6,0
9	1.	7,0	1.	3,0	2.	3,0	10.	1,0	2.	6,0	12.	1,0	2.	9,0
12	1.	9,7	1.	9,0	2.	6,0	9.	3,7	2.	9,0	11.	0,0	3.	0,0
15	2.	0,6	1.	6,6	2.	9,0	8.	11,4	3.	0,0	10.	5,4	3.	3,0
18	2.	3,5	1.	6,0	3.	0,0	8.	9,5	3.	3,0	10.	2,5	3.	6,0
21	2.	6,4	2.	6,4	3.	3,0	8.	9,0	3.	6,0	10.	0,4	3.	9,0
24	2.	9,4	2.	7,5	3.	6,0	8.	9,4	3.	9,0	10.	0,0	4.	0,0
27	3.	0,3	2.	9,0	3.	9,0	8.	10,3	4.	0,0	10.	0,4	4.	3,0
30	3.	3,3	2.	10,8	4.	0,0	8.	11,7	4.	3,0	10.	1,2	4.	6,0
33	3.	6,3	3.	0,8	4.	3,0	9.	1,4	4.	6,0	10.	2,5	4.	9,0
36	3.	9,2	3.	3,0	4.	6,0	9.	3,2	4.	9,0	10.	4,0	5.	0,0
42	4.	3,2	3.	7,7	5.	0,0	9.	7,5	5.	3,0	10.	7,7	5.	6,0
48	4.	9,2	4.	0,7	5.	6,0	10.	0,2	5.	9,0	11.	0,0	6.	0,0
60	5.	9,2	5.	11,4	6.	6,0	10.	10,3	6.	9,0	11.	9,6	7.	0,0
72	6.	9,1	6.	10,5	7.	6,0	11.	9,1	7.	9,0	12.	8,0	8.	0,0

TABLE IX.

Figure 12.

Dimensions des Objectifs achromatiques composés de trois Lentilles.

Le Verre de Venise pesant 950 grains le pouce cube.

Le Crystal d'Angleterre pesant 1215 grains le pouce cube.

FOYER de l'Objectif.	RAYONS A, A, A.	RAYONS B, B.	RAYON c.	DIAM. de l'ouverture.
pieds po.	*pieds pouc. lign.*	*pieds po lig.*	*pieds pouc. lign.*	*pouc. lign.*
0. 2	0. 2. 1	0. 1. 3	0. 1. 10	0. 11
0. 4	0. 4. 3	0. 2. 3	0. 3. 4	1. 2
0. 6	0. 6. 4	0. 3. 3	0. 4. 9	1. 5
0. 8	0. 8. 6	0. 4. 2	0. 6. 3	1. 8
0. 10	0. 10. 7	0. 5. 2	0. 7. 9	1. 11
1. 0	1. 0. 9	0. 6. 2	0. 9. 3	2. 2
1. 6	1. 7. 2	0. 9. 2	1. 1. 9	2. 7
2. 0	2. 1. 6	1. 0. 3	1. 6. 4	3. 0
2. 6	2. 7. 10	1. 3. 3	1. 10. 10	3. 5
3. 0	3. 2. 2	1. 6. 3	2. 3. 4	3. 10
3. 6	3. 8. 7	1. 9. 3	2. 7. 10	4. 2
4. 0	4. 2. 11	2. 0. 4	3. 0. 5	4. 7
4. 6	4. 9. 3	2. 3. 4	3. 4. 11	5. 0
5. 0	5. 3. 7	2. 6. 4	3. 9. 5	5. 5
5. 6	5. 10. 0	2. 9. 5	4. 2. 0	5. 10
6. 0	6. 4. 4	3. 0. 5	4. 6. 6	6. 3
6. 6	6. 10. 8	3. 3. 5	4. 11. 0	6. 8
7. 0	7. 5. 0	3. 6. 6	5. 3. 6	7. 0
7. 6	7. 11. 4	3. 9. 6	5. 8. 0	7. 5
8. 0	8. 5. 9	4. 0. 6	6. 0. 7	7. 10
8. 6	9. 0. 1	4. 3. 6	6. 5. 1	8. 3
9. 0	9. 6. 5	4. 6. 7	6. 9. 8	8. 8
9. 6	10. 0. 9	4. 9. 7	7. 2. 2	9. 1
10. 0	10. 7. 2	5. 0. 7	7. 6. 8	9. 6
12. 0	12. 8. 8	6. 0. 10	9. 1. 0	9. 0

TABLE X.

Figure 13.

Dimensions des Oculaires achromatiques composés de trois Lentilles.

Le Verre de Venise pesant 950 grains le pouce cube.

Le Crystal d'Angleterre pesant 1215 grains le pouce cube.

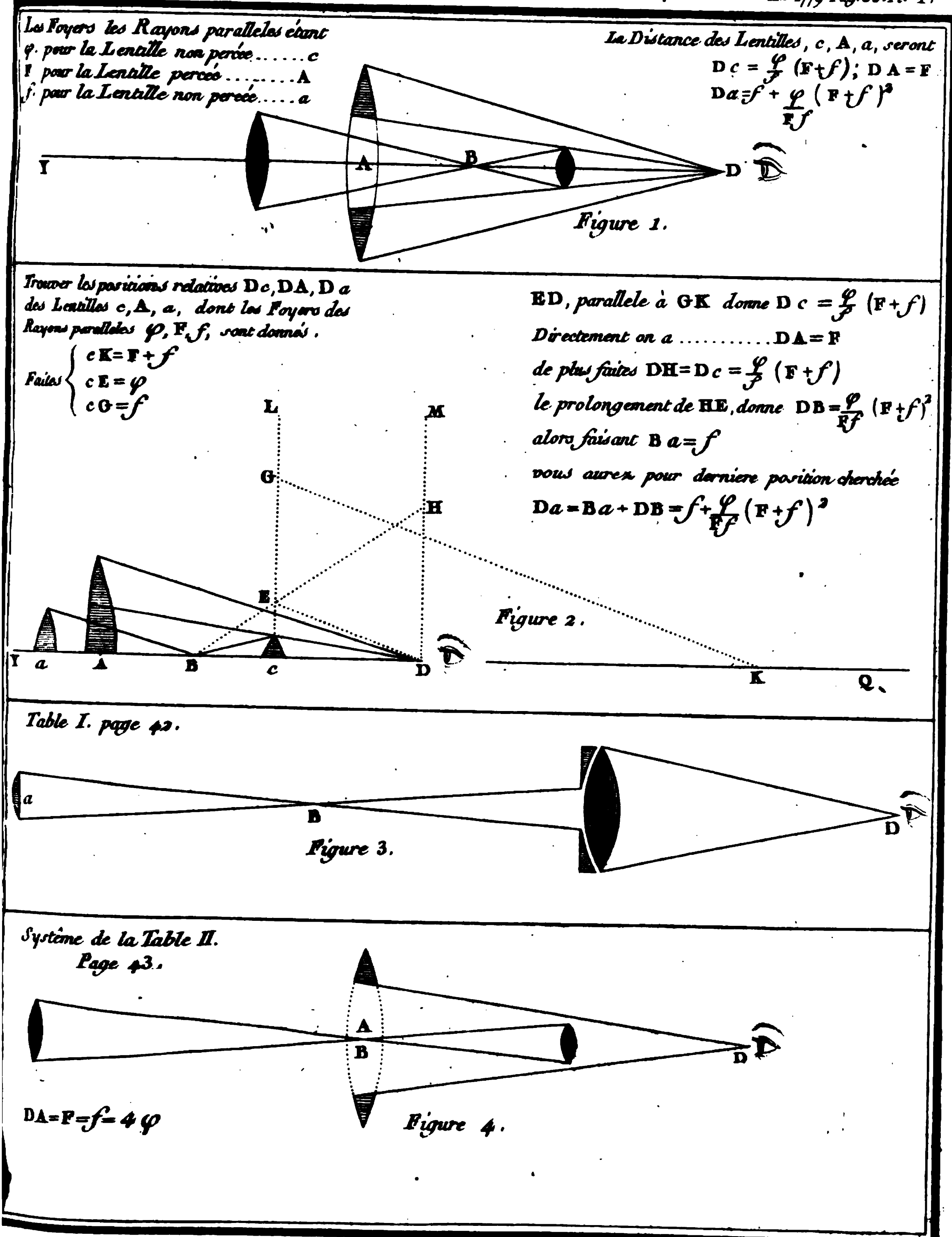
FOYER de l'Oculaire.	RAYON a.	RAYONS b, b.	RAYONS c, c, c.	DIAM. de l'ouverture
po. lig.	*po. lign.*	*po. lign.*	*po. lign.*	*po. lign.*
0. 9	1. 3	0. 11	0. 9	0. 5
1. 0	1. 1	0. 9	1. 1	0. 8
1. 3	1. 3	0. 11	1. 4	0. 9
1. 6	1. 5	1. 0	1. 7	0. 18
1. 9	1. 7½	1. 2	1. 10	0. 11
2. 0	1. 10	1. 3	2. 1	0. 11
2. 3	2. 0	1. 5	2. 5	1. 0
2. 6	2. 2	1. 6	2. 8	1. 0
2. 9	2. 4	1. 8	2. 11	1. 1
3. 0	2. 6½	1. 9	3. 2	1. 2
3. 3	2. 9	1. 11	3. 5	1. 3
3. 6	2. 11	2. 0	3. 8½	1. 3
3. 9	3. 1	2. 1½	4. 0	1. 3
4. 0	3. 4	2. 3	4. 3	1. 3
4. 3	3. 6	2. 4	4. 6	1. 4
4. 6	3. 8	2. 6	4. 9	1. 4
4. 9	3. 10	2. 7	5. 0	1. 4
5. 0	4. 0	2. 9	5. 4	1. 4
5. 3	4. 3	2. 10	5. 7	1. 5
5. 6	4. 5	3. 0	5. 10	1. 5
5. 9	4. 7	3. 1	6. 1	1. 5
6. 0	4. 9½	3. 3	6. 4	1. 5
6. 3	5. 0	3. 4	6. 7½	1. 6
6, 6	5. 2	3. 5½	6. 11	1. 6
7. 0	5. 6	3. 8½	7. 5	1. 7

Évidemment, les dix Tables que je viens de donner procureront aux Artiſtes le moyen de réuſſir, tant pour les conſtructions *diplantidiennes*, ou à double image, que pour les objectifs & les oculaires achromatiques, & ſi, comme je l'ai dit, le ſuccès de mes Tables n'eſt pas toujours complet, au moins ſuis-je aſſuré que l'exécution ſera facilitée & abrégée pour les Opticiens éclairés & zélés pour le progrès de leur Art.

Pour les conſtructions *diplantidiennes*, la lentille percée doit néceſſairement être achromatique; le mieux ſeroit même qu'elles le fuſſent toutes trois, car l'ouverture totale de l'objectif étant partagé en deux fonctions différentes, il eſt clair que les lentilles ne peuvent ſéparément produire un grand effet qu'autant qu'elles ſeront auſſi bonnes qu'elles peuvent l'être.

Quant aux deux dernières Tables IX & X, qui ſont pour les objectifs & pour les oculaires achromatiques, il eſt ſous-entendu que les trois lentilles qui compoſent l'objectif ou l'oculaire total doivent ſeulement être écartées entr'elles de l'épaiſſeur d'une feuille de papier très-mince; car les lentilles, quoique ne devant pas ſe toucher, doivent cependant être le plus proche que faire ſe puiſſe les unes des autres.




Les Foyers les Rayons paralleles étant
φ pour la Lentille non percée c
F pour la Lentille percée .... A
f pour la Lentille non percée ..... a
La Distance des Lentilles, c, A, a, seront
$Dc = \frac{\varphi}{f}(F+f)$; $DA = F$
$Da = f + \frac{\varphi}{Ff}(F+f)^2$
Y
A
B
D
Figure 1.
Trouver les positions relatives Dc, DA, Da
des Lentilles c, A, a, dont les Foyers des
Rayons paralleles φ, F, f, sont donnés.
Faites $cK = F+f$
$cE = \varphi$
$cG = f$
ED, parallele à GK donne $Dc = \frac{\varphi}{f}(F+f)$
Directement on a .... $DA = F$
de plus faites $DH = Dc = \frac{\varphi}{f}(F+f)$
le prolongement de HE, donne $DB = \frac{\varphi}{Ff}(F+f)^2$
alors faisant $Ba = f$
vous aurez pour derniere position cherchée
$Da = Ba + DB = f + \frac{\varphi}{Ff}(F+f)^2$
L
M
G
H
E
Figure 2.
Y
a
A
B
c
D
K
Q
Table I. page 42.
a
B
D
Figure 3.
Système de la Table II.
Page 43.
A
B
D
$DA = F = f = 4\varphi$
Figure 4.

F. le G. Sc.

aa, Lentille placée dans le vuide de la Lentille percée A, A
DA = F, Foyer de la Lentille percée A, A.
f, Foyer de la Lentille a, placée dans le vuide de la Lentille A
alors on a pour condition du Foyer
des rayons parallèles de la Lentille c

$$\varphi = \frac{Ff(F-f)}{(F+f)^2}$$

Table III. page 44.

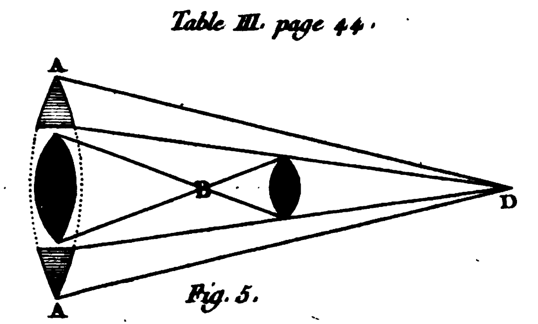


Fig. 5.

Table IV. page 45.

$DA = F = 2f = 15\varphi$

$DA = \frac{4}{5}F$

$DC = \frac{1}{5}F$

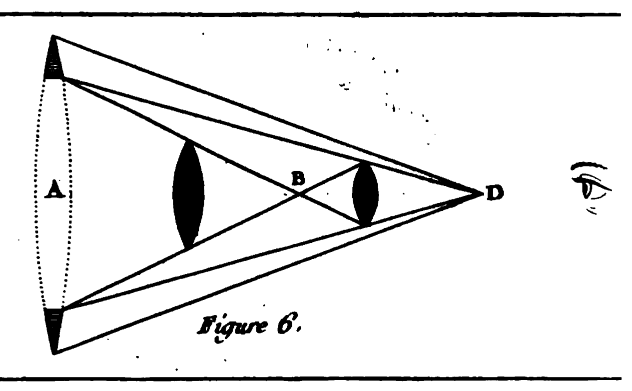


Figure 6.

Objectif, ou Oculaire à double Image
Table V page 46



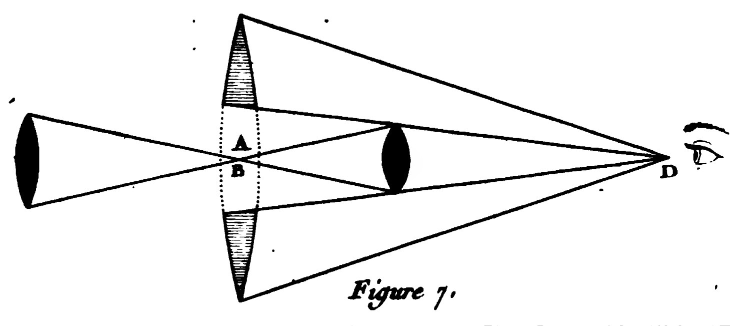
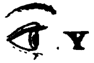


Figure 7.

Objectif, ou Oculaire à double Image.
Table VI. page 47.



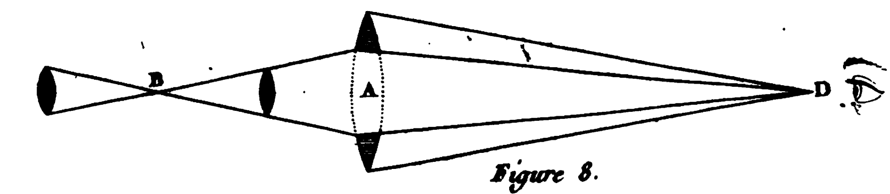


Figure 8.

Y. le G. Sc.

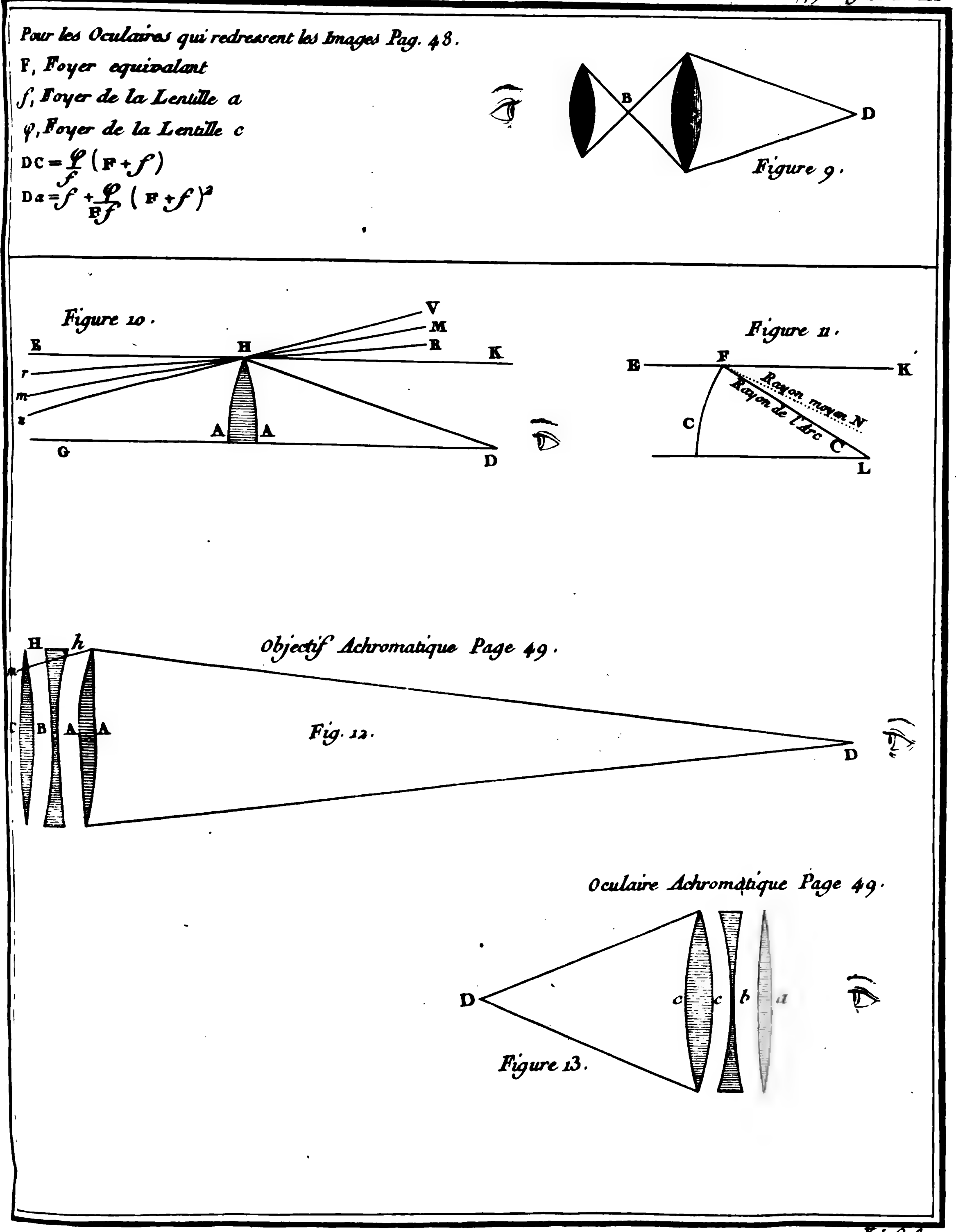


Figure 9.

Figure 10.

Figure 11.

Fig. 12.

Figure 13.

NOUVELLES MÉTHODES ANALYTIQUES
POUR RÉSOUDRE
DIFFÉRENTES QUESTIONS ASTRONOMIQUES.
QUATORZIÈME MÉMOIRE,
Dans lequel on applique l'analyse, à la détermination des orbites des Comètes.

Par M. DIONIS DU SÉJOUR.

Exposition du Sujet.

(1.) DANS mes Essais sur les Comètes, je me suis contenté de jeter un coup-d'œil rapide sur les Méthodes en usage pour déterminer les orbites de ces Astres: je me proposois de revenir sur ce sujet & d'en faire l'objet d'un travail particulier; je le reprends aujourd'hui. Je vais donner l'analyse qui m'a paru la plus simple & la plus directe pour calculer ces orbites.

On sent aisément que pour calculer la route d'une Comète, il faut satisfaire à deux conditions principales; la première, que les points de la trajectoire décrite par la Comète, quelle qu'elle soit, puissent tous appartenir à un seul & même plan, dont il s'agit de déterminer la position; la seconde, que cette trajectoire soit une section conique. Cette distinction simple entre la nature des questions qu'il s'agit de résoudre, m'a paru mettre un ordre naturel dans les discussions auxquelles on doit se livrer. J'ai donc examiné s'il n'étoit pas possible de partager les équations qui résolvent le Problème des Comètes en deux classes, les unes dépendantes uniquement de la position du plan, les autres au contraire dépendantes de la nature de la trajectoire; de manière que l'on pût résoudre particulièrement les questions relatives

à la position du plan, sans les compliquer des difficultés qui appartiennent à la nature des trajectoires.

La simplicité de cette idée m'avoit toujours frappé. Il m'avoit été aisé de démontrer que si, par exemple, on pouvoit par une voie quelconque, déterminer le rapport entre trois distances successives de la Comète à la Terre, correspondantes à trois observations, & que ce rapport fût linéaire, la distinction précédente entre les équations du Problème, s'établissoit naturellement; & que la position du plan de l'orbite se concluoit facilement, sans avoir à résoudre des équations d'un degré supérieur au second. J'avois vu pareillement qu'en faisant usage d'une propriété démontrée par Newton, sur les cordes des trajectoires décrites en vertu de la force centrale, on n'avoit besoin que de connoître le rapport de deux distances de la Comète. L'équation, il est vrai, est alors d'un degré supérieur au second; mais la solution, presque aussi facile dans la pratique, attendu la forme de l'équation, acquert un degré d'exactitude que l'on ne peut regretter d'acheter par un peu plus de calculs. Je m'étois donc appliqué à chercher les rapports entre les distances successives de la Comète à la Terre; j'étois même parvenu à un résultat: je n'ai pas eu de peine à l'abandonner lorsque j'ai eu connoissance des savantes recherches de M. de la Grange sur les Comètes. Il me suffit de dire qu'en adoptant son analyse, la solution en devient plus simple, plus exacte & fondée sur des principes plus lumineux.

Quoique les rapports linéaires entre les distances successives de la Comète à la Terre, ne se trouvent pas directement dans le Mémoire de M. de la Grange, il est si aisé de les déduire de ses principes, que j'ai dû lui en faire hommage: je n'ai d'autre mérite que d'avoir aperçu, que si, au lieu d'employer les équations aux distances démontrées par ce savant Géomètre, l'on veut uniquement conclure le rapport de ces quantités, l'on parvient à des relations du premier degré; en un mot, je crois avoir résolu la question à laquelle me paroissoit

tenir le partage naturel des équations du Problème en deux classes distinctes & séparées.

Les rapports déduits du Mémoire de M. de la Grange, présentoient au premier coup-d'œil une difficulté que la suite des calculs pouvoit rendre plus sensible, celle d'exiger des observations trop prochaines entr'elles. En effet, si d'un côté l'exactitude de la méthode demande des observations peu éloignées, d'un autre côté, l'inconvénient d'avoir à déterminer de très-grands élémens par les différences de quantités, chacunes très-petites, pouvoit jeter beaucoup d'incertitude dans les résultats; j'ai donc cherché à parer à cet inconvénient. J'ai fait voir comment il étoit possible d'employer sans danger des observations notablement distantes, pourvu toutefois que l'on ait des observations intermédiaires qui lient ces observations éloignées; je serois même tenté de croire que cette manière d'envisager le Problème est préférable dans la pratique; que la méthode acquiert par-là le plus grand degré d'exactitude, & que d'ailleurs les erreurs des observations se compensent.

(2.) Après avoir exposé les équations qui peuvent servir à la détermination du plan de l'orbite, je passe à la détermination de la trajectoire : je suppose d'abord que cette trajectoire est une parabole, & je donne les équations pour calculer la parabole particulière qui satisfait aux observations. Les mêmes formules qui déterminent la parabole, peuvent également servir à rectifier la position du plan, s'il s'étoit glissé quelqu'erreur dans les premiers résultats.

Généralement parlant, ces calculs suffisent pour la totalité des Comètes : si cependant la Comète particulière que l'on calcule avoit parcouru un très-grand arc de sa trajectoire; si elle avoit été vue avant & après son passage par le périhélie, & sur-tout, si les observations se refusoient d'une manière sensible à pouvoir être représentées par une seule & même parabole, de manière, qu'en abandonnant le calcul dans l'hypothèse parabolique, on n'eût point à craindre de courir après une exactitude chimérique; alors il faudroit avoir recours au

calcul dans l'ellipse. J'entre dans des détails sur cette partie du Problème; en un mot j'applique aux Comètes les principes généraux de la détermination des orbites des Planètes.

Je fais voir enfin qu'il y a un cas particulier où le Problème rigoureux des Comètes se résout sans faire usage des rapports des distances, & sans néanmoins employer des équations d'un degré supérieur au quatrième; c'est celui où la Comète auroit été observée dans les deux nœuds.

PREMIÈRE PARTIE,

Dans laquelle on suppose que l'orbite des Comètes est parabolique.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

(3.) Le calcul des orbites des Comètes consiste à déterminer, d'après les observations, les élémens suivans:

Le lieu du nœud ascendant sur l'Écliptique;

La distance périhélie de la Comète;

L'inclinaison du plan de l'orbite sur l'Écliptique;

Le sens du mouvement de la Comète dans son orbite, relativement à l'ordre des signes;

La distance du périhélie au nœud ascendant: cette distance se compte sur l'orbite de la Comète;

L'instant du passage de la Comète par le périhélie.

Voyons comment ces élémens se déterminent, d'après les observations.

Équation à la trajectoire de la Comète sur le plan de son orbite.

(4.) Puisque l'équation à la trajectoire de la Comète est une parabole, il faut déterminer d'abord l'équation à la parabole par rapport au foyer.

Fig. 1. Soit AM une parabole; FAD son grand axe; F son foyer; FA la distance du foyer au sommet de la parabole;

ſoit pris ſur FAD une ligne AD égale à FA, & par le point D, ſoit menée la ligne indéfinie DHE, perpendiculaire à la ligne FAD. Du point F, menons un rayon vecteur quelconque FM à la courbe; & du point M, menons la ligne MH perpendiculaire à la ligne DHE. Fig. 1.

On démontre dans la parabole que quelque part que l'on prenne le point M, on a toujours $FM = HM$; d'où il ſuit, que $FA = AD$. Du point M, abaiſſons ſur la ligne FAD la perpendiculaire MN, on aura, en nommant 1 le ſinus total, $FN = FM \operatorname{coſ.} AFM$; d'ailleurs

$$HM = AF + AD - FN = 2AF - FN;$$

donc $$HM + FN = 2AF;$$

donc $$FM + FM \operatorname{coſ.} AFM = 2AF;$$

donc $$FM(1 + \operatorname{coſ.} AFM) = 2AF.$$

Il ſuit de-là, que ſi l'on nomme

R le rayon vecteur de la parabole,

v l'angle traverſé depuis le périhélie,

1 le ſinus total,

D la diſtance périhélie;

on a

$$(1)\ R(1 + \operatorname{coſ.} v) - 2D = 0.$$

Expreſſion de l'aire de la parabole, & du temps employé par la Comète à parcourir un arc quelconque de ſon orbite.

(5.) Dans toute trajectoire décrite en vertu d'une force centrale, les aires ſont proportionnelles aux temps employés à décrire les arcs correſpondans; il faut donc, avant tout, avoir l'expreſſion de l'aire de la parabole.

On ſait généralement que l'aire d'une courbe dont le

rayon vecteur $= R$, & l'angle traversé $= v$, s'exprime par $\int \frac{R^2 dv}{2}$. Maintenant, si l'on différencie l'équation (1) du *paragraphe précédent*, l'on aura $\frac{2DdR}{R} - R \text{fin.} v dv = 0$, ou à cause de $R \text{fin.} v = 2D^{\frac{1}{2}}\sqrt{(R - D)}$,

$$D^{\frac{1}{2}} dR - R\sqrt{(R - D)}\, dv = 0.$$

Substituant cette valeur dans l'aire de la parabole, on aura

$$\text{Aire de la parabole} = \int \tfrac{1}{2} D^{\frac{1}{2}} \frac{R\, dR}{\sqrt{(R - D)}},$$

& cette dernière quantité, en ajoutant convenablement la constante, a pour intégrale $\frac{1}{3} D^{\frac{1}{2}}(R + 2D)\sqrt{(R - D)}$; donc

$$\text{Aire de la parabole} = \tfrac{1}{3} D^{\frac{1}{2}}(R + 2D)\sqrt{(R - D)}.$$

Cette expression sert à mesurer le temps écoulé depuis le passage de la Comète par le périhélie.

(6.) L'expression que nous venons de déterminer, est bien proportionnelle pour chaque parabole, au temps employé par la Comète à parcourir les différens arcs de cette parabole depuis le périhélie; mais si l'on veut comparer les temps employés par différentes Comètes, à parcourir les différens arcs respectifs de leurs différentes paraboles, afin d'avoir une expression générale qui convienne à toutes les paraboles, à tous les arcs & à tous les temps, il faut multiplier l'expression précédente de l'aire de la parabole, par un coëfficient qu'il s'agit de déterminer.

(7.) On démontre qu'une Comète dont la distance périhélie est égale à la moyenne distance du Soleil à la Terre, emploie $109^j\ 14^h\ 46'\frac{1}{3}$ ou $157846'\frac{1}{3}$ à décrire 90^d d'anomalie; que de plus les carrés des temps employés à parcourir une même anomalie dans les différentes paraboles, sont comme les cubes des distances périhélies; & qu'enfin le

rayon

rayon vecteur qui répond à 90 degrés d'anomalie, est double de la distance périhélie.

Il suit de-là que si l'on nomme en général,

δ le nombre de minutes de temps employées dans chaque parabole à parcourir 90 degrés d'anomalie,

X le nombre de minutes de temps qui répond au temps employé à parcourir les différentes anomalies,

R le rayon vecteur de la Comète,

r la moyenne distance de la Terre au Soleil,

D la distance périhélie;

on a généralement

$$X = \frac{1}{4} \frac{(R + 2D)\sqrt{(R - D)}\,\delta}{D^{\frac{1}{2}}}.$$

Mais, par ce qui vient d'être remarqué précédemment,

$$\delta : 157846'\tfrac{1}{3} :: D^{\frac{3}{2}} : r^{\frac{3}{2}};$$

donc généralement

$$(1)\ X = \frac{1}{4} \frac{(R + 2D)\sqrt{(R - D)}\ 157846'\tfrac{1}{3}}{r^{\frac{3}{2}}}.$$

(8.) Nous remarquerons que si l'on suppose avec les Astronomes, $r = 100000$, dont le logarithme égale 10,0000000, l'on aura — 10,4038259 pour logarithme de $\frac{1}{4} \times \frac{157846'\frac{1}{3}}{r^{\frac{3}{2}}}$.

(9.) Au moyen des équations du *paragraphe précédent*, on peut connoître non-seulement le temps employé par la Comète à parcourir ses différentes anomalies, mais on peut encore déterminer le temps qu'elle emploie à parcourir les différens arcs de sa trajectoire. Soit en effet,

R' le rayon vecteur qui commence l'arc de la trajectoire;

R'' le rayon vecteur qui termine cet arc;

t le nombre de minutes employées à parcourir l'arc;

on aura évidemment

$$(1)\ t = [(R'' + 2D)\sqrt{(R'' - D)} \mp \sqrt{(R' + 2D)}\sqrt{(R' - D)}] \times \frac{157846'\frac{1}{4}}{4 r^{\frac{1}{2}}};$$

& si l'on nommoit

R''' un troisième rayon vecteur qui termine un nouvel arc,

t' le nombre de minutes employées à parcourir ce nouvel arc,

ϑ le nombre de minutes écoulées entre la première & la troisième observation;

l'on aura pareillement

$$(2)\ t' = [(R''' + 2D)\sqrt{(R''' - D)} \mp (R'' + 2D)\sqrt{(R'' - D)}] \times \frac{157846'\frac{1}{4}}{4 r^{\frac{1}{2}}};$$

$$(3)\ \vartheta = [(R''' + 2D)\sqrt{(R''' - D)} \mp (R' + 2D)\sqrt{(R' - D)}] \times \frac{157846'\frac{1}{4}}{4 r^{\frac{1}{2}}}.$$

Dans chacune de ces équations, on fera usage des signes inférieurs si, dans l'intervalle des observations, la Comète a passé par son périhélie; on fera usage des signes supérieurs dans le cas contraire.

Expression de la corde comprise entre deux rayons vecteurs R', R''.

(10.) Soit dans une courbe quelconque,

R' un premier rayon vecteur;

R'' un second rayon vecteur;

v' l'angle compris entre le rayon vecteur R' & une ligne donnée de position, que l'on prend pour l'origine des angles traversés;

v'' l'angle compris entre le rayon vecteur R'' & la même ligne origine des angles traversés;

c la corde de la courbe comprise entre les rayons R', R'';

il est évident que l'on a

$$c^2 = (R'' \operatorname{cos.} v'' - R' \operatorname{cos.} v')^2 + (R'' \operatorname{sin.} v'' \mp R' \operatorname{sin.} v')^2,$$

suivant que les angles v'', v', sont pris du même côté ou de côté différent, par rapport à l'origine des angles traversés;

donc

(1) $c^2 = R''^2 + R'^2 - 2R''R'$ (cos. v'' cos. $v' \pm$ sin. v'' sin. v');

& comme cos. v'' cos. $v' \pm$ sin. v'' sin. v' est toujours égal au cosinus de l'angle compris entre les deux rayons vecteurs,

(2) $c^2 = R''^2 + R'^2 - 2R''R'$ cos. (angle compris entre les deux rayons R'', R').

De la relation entre les Observations géocentriques & la longueur de la corde correspondante de la Parabole.

(11.) Je supposerai dans ces recherches que l'on connoît avec précision les élémens suivans:

La longitude du Soleil;

La distance du Soleil à la Terre;

La longitude géocentrique de la Comète; c'est-à-dire sa distance au premier point d'*Ariès*, comptée sur l'Écliptique & vue de la Terre;

La latitude géocentrique de la Comète.

Je nommerai

A la longitude du Soleil;

T la distance du Soleil à la Terre;

B la longitude géocentrique de la Comète;

L la latitude géocentrique de la Comète.

Je supposerai que l'origine des angles *A*, *B* est au premier point d'*Ariès*, & qu'ils sont comptés de suite depuis 0^d jusqu'à 360^d; je supposerai pareillement que la latitude géocentrique de la Comète est boréale; de sorte que si elle étoit australe, le sinus de cette latitude deviendroit négatif, le cosinus restant toujours positif.

(12.) Soit ω un angle tel que

$$\text{cos. } \omega = \frac{\sqrt{[\text{cos.}^2 \tfrac{1}{2}(90^d + \text{asc. dr. Com.}) \times (\text{sin. obliq. Éclipt.}) \text{ cos. (décl. Com.)}]}}{\text{sin. } \tfrac{1}{2} (\text{obliq. de l'Éclipt.} + \text{dist. Comète au pôle boréal de l'Équateur})};$$

on a

(1) sin. $\frac{1}{2}$ (distance de la Comète au pôle boréal de l'Écliptique) = sin. $\frac{1}{2}$ (obliq. Éclipt. + dist. Comète au pôle bor. de l'Équat.) sin. ω;

on a pareillement

(2) cos. (latitude de la Comète) × cos. (longitude de la Comète) − cos. (décl. de la Comète) × cos. (ascens. droite de la Comète) = 0,

On voit par-là comment les longitude & latitude géocentriques de la Comète, se déduisent de la déclinaison & de l'ascension droite, qui sont immédiatement données par les observations.

Fig. 2. (13.) Soit ♈ ♋ ♎ ♑ l'Écliptique rapportée à la sphère des fixes; *S* le Soleil; *EeT* l'orbite de la Terre; *T* le lieu de la Terre dans son orbite, éloigné de 180^d du lieu du Soleil; *Ee* le diamètre de l'orbite terrestre passant par le premier point d'*Ariès; Tt* une parallèle indéfinie à la ligne *Ee; C'* la projection de la Comète sur le plan de l'Écliptique; *C* le lieu de la Comète dans l'espace; *CC'* la distance perpendiculaire de la Comète au plan de l'Écliptique; *TC* la distance de la Terre à la Comète.

De la projection *C'* de la Comète, abaissons sur la ligne *ESe*, la droite *C'P*; & du lieu *T* de la Terre, abaissons sur la même ligne, la droite *Tp*. Nommons

x la distance *SP* du Soleil au point *P*;
y la distance *PC'* du point *P*, à la projection *C'* de la Comète;
z la distance *CC'* de la Comète au plan de l'Écliptique;
ξ la distance *Sp* du Soleil au point *p*;
ν la distance *pT* du point *p*, à la Terre *T*;
Δ la distance *TC* de la Terre à la Comète;
T la distance *TS* de la Terre au Soleil;
A la longitude du Soleil, vue de la Terre;
B la longitude géocentrique de la Comète;
L la latitude géocentrique de la Comète.

Dans le triangle *STp*, l'on a $ST : Sp :: 1 : \text{cof.}\, TSp$; mais $TS = T$, angle $TSp = A$, & $Sp = \xi$; donc $\xi = T \,\text{cof.}\, A$; par une raison semblable, $\nu = T \,\text{fin.}\, A$. Dans le triangle TCC' rectangle en C', on a $TC : TC' :: 1 : \text{cof.}\, CTC'$; $TC : CC' :: 1 : \text{fin.}\, CTC'$; mais $TC = \Delta$, angle $CTC' = L$; donc $TC' = \Delta \,\text{cof.}\, L$; $CC' = \Delta \,\text{fin.}\, L$. Dans le triangle TtC', on a $TC' : C't :: 1 : \text{fin.}\, C'Tt$; $TC' : Tt :: 1 : \text{cof.}\, C'Tt$; mais $TC' = \Delta \,\text{cof.}\, L$; $C't = Pt - PC' = \nu - y$;

$Tt = Sp - SP = \xi - x$; angle $C'Tt = B$; donc Fig. 2.
$\nu - y = \Delta$ cof. L fin. B; $\xi - x = \Delta$ cof. L cof. B;
donc enfin, à cauſe de $\xi = T$ cof. A, de $\nu = T$ fin. A,
& de $z = CC'$,

(1) $x = T$ cof. $A - \Delta$ cof. B cof. L;

(2) $y = T$ fin. $A - \Delta$ fin. B cof. L;

(3) $z = \Delta$ fin. L.

D'où l'on voit, que les trois coordonnées x, y, z, ne dépendent que d'une ſeule inconnue Δ.

(14.) Si l'on cherche maintenant l'expreſſion de la diſtance SC de la Comète au Soleil, & que l'on nomme

R la diſtance de la Comète au Soleil,

on aura évidemment $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$; donc

(1) $R^2 = T^2 + \Delta^2 - 2\Delta T$ cof. L cof. $(B - A)$.

(15.) Conſidérons maintenant deux obſervations, & nommons $x', y', z', \Delta', T', R', A', B', L'$ les quantités qui appartiennent à la première obſervation; $x'', y'', z'', \Delta'', T'', R'', A'', B'', L''$ les quantités qui appartiennent à la ſeconde; on aura pour chacune des obſervations, des équations ſemblables à celles que nous venons de démontrer. De plus, ſi l'on nomme

c la corde compriſe entre les rayons vecteurs R'', R',

on aura

$$c^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2x'x'' - 2y'y'' - 2z'z'';$$

mais

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R'^2;\quad x''^2 + y''^2 + z''^2 = R''^2;$$

donc

$$(1)\ c^2 = R'^2 + R''^2 - 2[T'T'' \text{cof.}(A''-A') - T'\Delta'' \text{cof.} L'' \text{cof.}(B''-A') - T''\Delta' \text{cof.} L' \text{cof.}(B'-A'') + \Delta'\Delta'' \text{cof.} L' \text{cof.} L'' \text{cof.}(b''-B') + \Delta'\Delta'' \text{fin.} L' \text{fin.} L''];$$

bien entendu que l'on a d'ailleurs

$$(2)\ R' = \sqrt{[T'^2 + \Delta'^2 - 2\Delta' T' \text{cof.} L' \text{cof.}(B' - A')]};$$
$$(3)\ R'' = \sqrt{[T''^2 + \Delta''^2 - 2\Delta'' T'' \text{cof.} L'' \text{cof.}(B'' - A'')]}.$$

Et la queſtion propoſée eſt réſolue.

Détermination de l'angle compris entre les deux rayons vecteurs R″ R′.

(16.) Si l'on compare cette dernière valeur de c^2 avec celle que l'on tire de l'équation (2) du §. *10*, & que l'on nomme

N l'angle compris entre les deux rayons vecteurs R' R'';

on aura

$$(1)\ R'R'' \text{cof.} N - T'T'' \text{cof.}(A''-A') + T'\Delta'' \text{cof.} L'' \text{cof.}(B''-A') + T''\Delta' \text{cof.} L' \text{cof.}(B'-A'') - \Delta'\Delta'' \text{cof.} L' \text{cof.} L'' \text{cof.}(B''-B') - \Delta'\Delta'' \text{fin.} L' \text{fin.} L'' = 0.$$

Quoique l'équation (1) donne deux valeurs de l'angle N, puiſqu'un même coſinus appartient à deux angles différens; on ne peut cependant pas être en ſuſpend ſur le choix de cet angle; & c'eſt toujours le plus petit des deux angles qu'il faut choiſir.

Suppoſons en effet que cof. N ſoit poſitif, & qu'il réponde à 10 degrés; le même coſinus répondra auſſi à 350 degrés: or on ne peut pas être en ſuſpend ſur le choix de ces deux angles.

(17.) Il arrive ſouvent, que dans l'équation du *paragraphe précédent*, l'angle N eſt d'un petit nombre de degrés, ce qui rend cette équation peu commode dans ſon uſage, à

cause de la très-grande précision qu'elle exige dans le calcul. Nous remarquerons alors, que puisqu'en général,

$$\text{cos.}\, N = \text{cos.}(\tfrac{1}{2}N + \tfrac{1}{2}N) = \text{cos.}^2\tfrac{1}{2}N - \text{sin.}^2\tfrac{1}{2}N = 1 - 2\,\text{sin.}^2\tfrac{1}{2}N,$$

l'équation devient

$$(1)\; R'R'' - T'T''\,\text{cos.}(A''-A') + T'\Delta''\,\text{cos.}\,L''\,\text{cos.}(B''-A') + T''\Delta'\,\text{cos.}\,L'\,\text{cos.}(B'-A'')$$
$$-\,\Delta'\Delta''\,[\text{cos.}\,L'\,\text{cos.}\,L''\,\text{cos.}(B''-B') + \text{sin.}\,L'\,\text{sin.}\,L''] - 2\,R'R''\,\text{sin.}^2\tfrac{1}{2}N = 0.$$

Par la même raison, l'équation (2) du §. 10, devient

$$(2)\; (R''-R')^2 - c^2 + 4\,R'R''\,\text{sin}^2\tfrac{1}{2}N = 0.$$

Expression de la corde de la parabole, en rayons vecteurs R′, R″ *& en distance périhélie.*

(18.) Les recherches précédentes conduisent naturellement à avoir l'expression de la corde de la parabole, en rayons vecteurs R', R'', & en distance périhélie; en effet, nous avons vu (§. 10) que l'on a l'équation suivante,

$$2\,R'R''\,\text{cos.}\,N - R'^2 - R''^2 + c^2 = 0.$$

Je remarque que l'angle N étant l'angle compris entre les rayons vecteurs R', R''; si l'on nomme v' & v'' les deux anomalies correspondantes de la Comète, l'on a

$$R'R''\,\text{cos.}\,N = R''R'\,\text{cos.}\,v''\,\text{cos.}\,v' + R''R'\,\text{sin.}\,v''\,\text{sin.}\,v';$$

mais, par la propriété de la parabole, si l'on nomme

D la distance périhélie,

à cause des deux équations,

$$R'(1+\text{cos.}\,v') - 2D = 0;\; R''(1+\text{cos.}\,v'') - 2D = 0;$$

l'on a

$$R'R''\,\text{cos.}\,v''\,\text{cos.}\,v' = 4D^2 - 2\,D(R'+R'') + R'R'';$$
$$R'R''\,\text{sin.}\,v''\,\text{sin.}\,v' = \pm\,4D\sqrt{(R'-D)}\sqrt{(R''-D)};$$

donc

$$(1)\; c^2 - (R'-R'')^2 + 4D[2D \pm 2\sqrt{(R'-D)}\sqrt{(R''-D)} - R' - R''] = 0.$$

La valeur de c^2 a un double ſigne; la première a lieu lorſque la corde ne coupe point le grand axe de la parabole; la ſeconde valeur a lieu lorſque la corde coupe le grand axe.

Si l'on compare cette valeur de c^2 avec celle du §. 15, on aura la relation ſuivante entre les élémens de la parabole, & les obſervations priſes deux à deux,

$$(2)\ 2D[2D \pm 2\sqrt{(R' - D)}\sqrt{(R'' - D)} - R' - R'']$$
$$+ R'R'' - T'T''\,\text{coſ.}\,(A'' - A') + T'\Delta''\,\text{coſ.}\,L''\,\text{coſ.}\,(B'' - A')$$
$$+ T''\Delta'\,\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,(B' - A'') - \Delta'\Delta''[\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,L''\,\text{coſ.}\,(B'' - B')$$
$$+ \text{ſin.}\,L'\,\text{ſin.}\,L''] = 0.$$

Si l'on différencie cette dernière équation, & que l'on ſuppoſe

$$f = R'' - 2D \pm \frac{2D(R'' - D)}{\sqrt{(R' - D)}\sqrt{(R'' - D)}}$$

$$f' = R' - 2D \pm \frac{2D(R' - D)}{\sqrt{(R' - D)}\sqrt{(R'' - D)}},$$

$$g = T''\,\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,(B' - A'') - \Delta''[\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,L''\,\text{coſ.}\,(B'' - B') + \text{ſin.}\,L'\,\text{ſin.}\,L''];$$
$$g' = T'\,\text{coſ.}\,L''\,\text{coſ.}\,(B'' - A') - \Delta'[\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,L''\,\text{coſ.}\,(B'' - B') + \text{ſin.}\,L'\,\text{ſin.}\,L''],$$

$$h = 8D - 2(R' + R'') \pm \frac{[8D^2 - 6D(R' + R'') + 4R'R'']}{\sqrt{(R' - D)}\sqrt{(R'' - D)}},$$

l'on aura

$$(3)\ f\,dR' + g\,d\Delta' + f'\,dR'' + g'\,d\Delta'' + h\,dD = 0.$$

Il n'eſt pas même néceſſaire que l'équation (2) ſoit rigoureuſement ſatisfaite par la ſubſtitution des différentes valeurs de R', R'', Δ', Δ'', D, pour que l'on puiſſe employer une équation de la forme précédente; & ſi l'on nomme

γ ce que devient l'équation (2) par les ſubſtitutions des valeurs particulières de R', R'', Δ', Δ'', D,

l'on aura

$$(4)\ f\,dR' + g\,d\Delta' + f'\,dR'' + g'\,d\Delta'' + h\,dD - \gamma = 0.$$

Détermination

Détermination des Équations qui sont indépendantes de la nature de la trajectoire des Comètes.

(19.) J'ai annoncé que les équations qui résolvent le Problème des Comètes, se partagent naturellement en deux classes. Les unes sont indépendantes de la nature de la trajectoire particulière que décrit la Comète & de la force centrale qui l'anime; elles supposent uniquement que la Comète se meut dans un même plan. Les autres équations au contraire, sont dépendantes de la nature de la trajectoire spécifique de la Comète. Comme cette distinction m'a paru jeter beaucoup de jour sur les questions que je me propose d'examiner, & mettre un ordre naturel dans les discussions auxquelles je dois me livrer, j'ai cru devoir l'adopter. Je vais donc m'occuper d'abord des équations indépendantes de la nature des trajectoires des Comètes, & des questions qui en sont les corollaires.

De la relation entre l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comète sur l'Écliptique, la position du nœud ascendant & la distance de la Comète à la Terre, à l'instant de l'observation.

(20.) Soit

R le rayon vecteur de la Comète;

I l'angle d'inclinaison du plan de l'orbite sur l'Écliptique;

u l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds; cet angle est compté sur le plan de l'orbite de la Comète, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de cet astre dans son orbite;

ζ la longitude du nœud ascendant de la Comète;

T la distance du Soleil à la Terre;

Δ la distance de la Comète à la Terre;

A la longitude du Soleil;

B la longitude géocentrique de la Comète;

L la latitude géocentrique de la Comète.

Fig. 3. Soit ♈ ♋ ♎ ♑ l'Écliptique rapportée à la ſphère des fixes; S le Soleil; EeT l'orbite de la Terre; T le lieu de la Terre dans ſon orbite; NSn la ligne des nœuds; N le nœud aſcendant; C le lieu de la Comète dans ſon orbite; SC le rayon vecteur de la Comète; C' la projection de la Comète ſur l'Écliptique; CC' la diſtance perpendiculaire de la Comète au plan de l'Écliptique; CM la perpendiculaire abaiſſée de la Comète ſur la ligne des nœuds dans le plan de ſon orbite; $C'M$ la perpendiculaire abaiſſée de la projection C' de la Comète ſur la ligne des nœuds dans le plan de l'Écliptique; Tm la perpendiculaire abaiſſée de la Terre ſur la ligne des nœuds; TC la diſtance de la Comète à la Terre, ESe le diamètre de l'orbite terreſtre paſſant par le premier point d'*Ariès*. Par la Terre T, menons une parallèle indéfinie Tt' au diamètre ESe de l'orbite de la Terre, paſſant par le premier point d'*Ariès*, & une autre parallèle Tt à la ligne NSn des nœuds de la Comète. Prenons le point t tel que Mt ſoit le prolongement de $C'M$, & que par conſéquent $C'Mt$ ſoit une droite perpendiculaire à la ligne Tt.

Il eſt clair que puiſque l'angle $MSC = u$, & que $SC = R$, l'on a $CM = R \text{ ſin. } u$; $MS = R \text{ coſ. } u$; d'ailleurs puiſque l'angle $CMC' = I$, & que le triangle CMC' eſt rectangle en C', l'on a $CC' = R \text{ ſin. } u \text{ ſin. } I$; $C'M = R \text{ ſin. } u \text{ coſ. } I$; enfin puiſque $TC = \Delta$, que l'angle $CTC' = L$, & que le triangle CTC' eſt rectangle en C', l'on a $CC' = \Delta \text{ ſin. } L$; comparant les deux valeurs de CC', l'on aura

$$(1) \quad R \text{ ſin. } u \text{ ſin. } I - \Delta \text{ ſin. } L = 0.$$

Maintenant, puiſque les droites Tt, NSn ſont parallèles, on a

$$Mt = mT = T \text{ ſin. } (TSm);$$

$$tC' = Mt + MC' = T \text{ ſin. } (TSm) + R \text{ ſin. } u \text{ coſ. } I.$$

De plus, l'angle tTC' eſt évidemment égal à la longitude

géocentrique de la Comète moins la longitude du nœud ascendant, puisqu'en effet il est égal à l'angle $C'Tt'$ moins l'angle tTt'. Par une raison semblable, l'angle STt est égal à la longitude du Soleil moins la longitude du nœud ascendant de la Comète; donc angle $STt =$ angle $TSm = A - \zeta$; donc T sin. $(TSm) = T$ sin. $(A - \zeta)$; donc $tC' = T$ sin. $(A - \zeta) + R$ sin. u cos. I. De plus, à cause du triangle tTC' rectangle en t, on a Fig. 3.

$$TC' \text{ sin. } (C'Tt) - C't = 0;$$

d'ailleurs l'angle $(C'Tt) = B - \zeta$, & $TC' = \Delta$ cos. L; donc

$$(2)\ \Delta \text{ cos. } L \text{ sin. } (B - \zeta) - T \text{sin. } (A - \zeta) - R \text{ sin. } u \text{ cos. } I = 0;$$

ou enfin, à cause de R sin. $u = \frac{\Delta \text{ sin. } L}{\text{sin. } I}$,

$$(3)\ \text{tang. } I [\Delta \text{ cos. } L \text{ sin. } (B - \zeta) - T \text{sin. } (A - \zeta)] - \Delta \text{ sin. } L = 0.$$

Au moyen de cette dernière équation, lorsque l'on connoîtra la distance de la Comète à la Terre & la position du nœud, l'on déterminera l'inclinaison de l'orbite; & réciproquement, si l'on connoissoit l'inclinaison de l'orbite & la position du nœud, l'on détermineroit la distance de la Comète à la Terre.

Détermination de l'inclinaison de l'orbite & de la position du nœud ascendant, lorsque l'on connoît les distances de la Comète à la Terre à l'instant de deux observations.

(21.) Il est évident que, pour chaque observation, l'on a des équations de la forme précédente. Supposons donc que l'on ait trois observations, & que l'on nomme

Δ', A', B', T', L', les quantités qui appartiennent à la 1.re observation,
Δ'', A'', B'', T'', L'', les quantités qui appartiennent à la 2.e observation,
Δ''', A''', B''', T''', L''', les quantités qui appartiennent à la 3.e observation,

l'on aura les trois équations suivantes,

$$(1)\ \text{tang. } I [\Delta' \text{ cos. } L' \text{ sin. } (B' - \zeta) - T' \text{ sin. } (A' - \zeta)] - \Delta' \text{ sin. } L' = 0;$$
$$(2)\ \text{tang. } I [\Delta'' \text{ cos. } L'' \text{ sin. } (B'' - \zeta) - T'' \text{ sin. } (A'' - \zeta)] - \Delta'' \text{ sin. } L'' = 0;$$
$$(3)\ \text{tang. } I [\Delta''' \text{ cos. } L''' \text{ sin. } (B''' - \zeta) - T''' \text{ sin. } (A''' - \zeta)] - \Delta''' \text{ sin. } L''' = 0;$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4)\ \text{tang.}\, I\,[(\Delta'\cos.\, L'\ \sin.\, B' - T'\sin.\, A')\cos.\,\zeta$$
$$-(\Delta'\cos.\, L'\cos.\, B' - T'\cos.\, A')\sin.\,\zeta] - \Delta'\sin.\, L' = 0;$$

$$(5)\ \text{tang.}\, I\,[(\Delta''\cos.\, L''\ \sin.\, B'' - T''\sin.\, A'')\cos.\,\zeta$$
$$-(\Delta''\cos.\, L''\cos.\, B'' - T''\cos.\, A'')\sin.\,\zeta] - \Delta''\sin.\, L'' = 0;$$

$$(6)\ \text{tang.}\, I\,[(\Delta'''\cos.\, L'''\sin.\, B''' - T'''\sin.\, A''')\cos.\,\zeta$$
$$-(\Delta'''\cos.\, L'''\cos.\, B''' - T'''\cos.\, A''')\sin.\,\zeta] - \Delta'''\sin.\, L''' = 0.$$

Combinons maintenant ces équations deux à deux; c'est-à-dire, la quatrième avec la cinquième, & cette même quatrième avec la sixième, l'on aura

$$(7)\ [\Delta''\sin.\, L''\ (\Delta'\cos.\, L'\sin.\, B' - T'\sin.\, A')$$
$$-\Delta'\sin.\, L'(\Delta''\cos.\, L''\ \sin.\, B'' - T''\sin.\, A'')]\cos.\,\zeta$$
$$-[\Delta''\ \sin.\ L''\ (\Delta'\ \cos.\ L'\ \cos.\ B' - T'\cos.\ A')$$
$$-\Delta'\sin.\, L'(\Delta''\cos.\, L''\cos.\, B'' - T''\cos.\, A'')]\sin.\,\zeta = 0;$$

$$(8)\ [\Delta'''\ \sin.\, L'''\ (\Delta'\cos.\, L'\ \sin.\, B' - T'\sin.\, A')$$
$$-\Delta'\sin.\, L'\ (\Delta'''\cos.\, L'''\sin.\, B''' - T'''\sin.\, A''')]\cos.\,\zeta$$
$$-[\Delta'''\ \sin.\ L'''\ (\Delta'\ \cos.\ L'\ \cos.\ B' - T'\cos.\ A')$$
$$-\Delta'\sin.\, L'(\Delta'''\cos.\, L'''\cos.\, B''' - T'''\cos.\, A''')]\sin.\,\zeta = 0;$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9)\ \text{tang.}\,\zeta = \frac{\Delta''\sin.\, L''(\Delta'\cos.\, L'\sin.\, B' - T'\sin.\, A') - \Delta'\sin.\, L'(\Delta''\cos.\, L''\sin.\, B'' - T''\sin.\, A'')}{\Delta''\sin.\, L''(\Delta'\cos.\, L'\cos.\, B' - T'\cos.\, A') - \Delta'\sin.\, L'(\Delta''\cos.\, L''\cos.\, B'' - T''\cos.\, A'')};$$

$$(10)\ \text{tang.}\,\zeta = \frac{\Delta'''\sin.\, L'''(\Delta'\cos.\, L'\sin.\, B' - T'\sin.\, A') - \Delta'\sin.\, L'(\Delta'''\cos.\, L'''\sin.\, B''' - T'''\sin.\, A''')}{\Delta'''\sin.\, L'''(\Delta'\cos.\, L'\cos.\, B' - T'\cos.\, A') - \Delta'\sin.\, L'(\Delta'''\cos.\, L'''\cos.\, B''' - T'''\cos.\, A''')}.$$

Au moyen des équations précédentes, si l'on connoît les distances de la Comète à la Terre à l'instant de deux observations, on déterminera tout de suite la position du plan de son orbite, quelle que soit la nature de sa trajectoire: en effet, les équations donneront la position du nœud ascendant & l'inclinaison du plan de l'orbite.

(22.) L'espèce de l'angle ζ n'est point arbitraire, & cet angle est donné spécifiquement par les équations du *§. 21.* Il doit être employé tel qu'il est donné par l'analyse;

c'eſt-à-dire, qu'il eſt compris entre 0^d & 90^d, ſi le numérateur & le dénominateur de ſon expreſſion ſont tous deux poſitifs ; il eſt compris entre 90^d & 180^d, ſi le numérateur eſt poſitif & le dénominateur négatif ; il eſt compris entre 180^d & 270^d, ſi le numérateur & le dénominateur ſont tous deux négatifs ; il eſt compris entre 270^d & 360^d, ſi le numérateur eſt négatif & le dénominateur poſitif. Cette remarque s'applique en général à tous les angles donnés par une tangente dont l'expreſſion renferme un numérateur & un dénominateur.

Nous ferons une exception à la règle précédente, relativement à l'inclinaiſon du plan de l'orbite : en effet, cette inclinaiſon étant déterminée par ſa tangente, il s'enſuivroit, d'après la règle précédente, que cette inclinaiſon pourroit avoir toutes les valeurs depuis 0^d juſqu'à 360^d. Si cependant l'on fait attention qu'un plan qui fait, par exemple, avec un ſecond plan, un angle de 200^d, n'eſt que le prolongement du plan qui fait avec ce même ſecond plan, un angle de 20^d ; on pourra ne ſuppoſer à l'inclinaiſon du plan de l'orbite, que des valeurs plus petites que 180^d. Si donc tang. I eſt poſitive, l'inclinaiſon ſera entre 0^d & 90^d, & la Comète ſera directe ; ſi tang. I eſt négative, l'inclinaiſon ſera entre 90^d & 180^d, & la Comète ſera rétrograde. Continuons nos recherches.

(23.) Il eſt évident qu'il y a un nombre infini de valeurs de Δ', Δ'', Δ''', qui rendent nulles les équations (7) & (8) du *ſ. 21*, puiſque ces équations renfermant chacune deux variables, il faudroit avoir deux nouvelles équations pour parvenir à une ſolution déterminée ; on peut donc demander, lorſqu'une fois ces équations ſont ſatisfaites par des valeurs particulières de Δ', Δ'', Δ''', quelle doit être la relation entre les variations de Δ', Δ'', Δ''', pour que les équations demeurent toujours ſatisfaites. Rien n'eſt plus ſimple que la ſolution de ce Problème : en effet,

ſi l'on différencie les équations (7) & (8) du §. 21, l'on aura

$$(1)\quad [\Delta'' \cos. L' \sin. L'' \sin. (B' - \zeta) - \Delta'' \sin. L' \cos. L'' \sin. (B'' - \zeta) + T'' \sin. L' \sin. (A'' - \zeta)]\, d\Delta' - [\Delta' \sin. L' \cos. L'' \sin. (B'' - \zeta) - \Delta' \cos. L' \sin. L'' \sin. (B' - \zeta) + T' \sin. L'' \sin. (A' - \zeta)]\, d\Delta'' = 0;$$

$$(2)\quad [\Delta''' \cos. L' \sin. L''' \sin. (B' - \zeta) - \Delta''' \sin. L' \cos. L''' \sin. (B''' - \zeta) + T''' \sin. L' \sin. (A''' - \zeta)]\, d\Delta' - [\Delta' \sin. L' \cos. L''' \sin. (B''' - \zeta) - \Delta' \cos. L' \sin. L''' \sin. (B' - \zeta) + T' \sin. L''' \sin. (A' - \zeta)]\, d\Delta''' = 0.$$

Il n'eſt pas néceſſaire que les équations (7) & (8) du §. 21, ſoient rigoureuſement ſatisfaites par la ſubſtitution des différentes valeurs de Δ', Δ'', Δ''', pour que l'on puiſſe employer des équations de la forme précédente; l'on peut même ſuppoſer quelqu'erreur dans la poſition du nœud. En en mot, ſi l'on nomme

$d\zeta$ l'erreur ſur la poſition du nœud exprimée en ſecondes de degrés,

π' ce que devient l'équation (7) du §. 21, par les ſubſtitutions des valeurs de Δ', Δ'', ζ,

π'' ce que devient l'équation (8) du §. 21, par les ſubſtitutions des valeurs de Δ', Δ''', ζ,

l'on aura

$$(3)\quad [\Delta'' \cos. L' \sin. L'' \sin. (B' - \zeta) - \Delta'' \sin. L' \cos. L'' \sin. (B'' - \zeta) + T'' \sin. L' \sin. (A'' - \zeta)]\, d\Delta' - [\Delta' \sin. L' \cos. L'' \sin. (B'' - \zeta) - \Delta' \cos. L' \sin. L'' \sin. (B' - \zeta) + T' \sin. L'' \sin. (A' - \zeta)]\, d\Delta'' + [\Delta'' T' \sin. L'' \cos. (A' - \zeta) - \Delta' T'' \sin. L' \cos. (A'' - \zeta) - \Delta'\Delta''(\cos. L' \sin. L'' \cos. (B' - \zeta) - \sin. L' \cos. L'' \cos. (B'' - \zeta))] \frac{d\zeta}{206265''} - \pi' = 0;$$

$$(4)\quad [\Delta''' \cos. L' \sin. L''' \sin. (B' - \zeta) - \Delta''' \sin. L' \cos. L''' \sin. (B''' - \zeta) + T''' \sin. L' \sin. (A''' - \zeta)]\, d\Delta' - [\Delta' \sin. L' \cos. L''' \sin. (B''' - \zeta) - \Delta' \cos. L' \sin. L''' \sin. (B' - \zeta) + T' \sin. L''' \sin. (A' - \zeta)]\, d\Delta''' + [\Delta''' T' \sin. L''' \cos. (A' - \zeta) - \Delta' T''' \sin. L' \cos. (A''' - \zeta) - \Delta'\Delta'''(\cos. L' \sin. L''' \cos. (B' - \zeta) - \sin. L' \cos. L''' \cos. (B''' - \zeta))] \frac{d\zeta}{206265''} - \pi'' = 0.$$

De la relation entre les diſtances de la Comète à la Terre, correſpondantes aux Obſervations priſes trois à trois.

(24.) Si l'on combine les équations (9) & (10) du §. 21, l'on aura

$$\left.\begin{aligned}
&[\Delta'' \sin. L'' (\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \\
&- \Delta' \sin. L' (\Delta'' \cos. L'' \sin. B'' - T'' \sin. A'')] \\
&\times [\Delta''' \sin. L''' (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \\
&- \Delta' \sin. L' (\Delta''' \cos. L''' \cos. B''' - T''' \cos. A''')] \\
&- [\Delta''' \sin. L''' (\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \\
&- \Delta' \sin. L' (\Delta''' \cos. L''' \sin. B''' - T''' \sin. A''')] \\
&\times [\Delta'' \sin. L'' (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \\
&- \Delta' \sin. L' (\Delta'' \cos. L'' \cos. B'' - T'' \cos. A'')]
\end{aligned}\right\} = 0.$$

Cette dernière équation peut être miſe ſous la forme ſuivante,

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta' \sin. L' [(\Delta'' \cos. L'' \sin. B'' - T'' \sin. A'') \times (\Delta''' \cos. L''' \cos. B''' - T''' \cos. A''') \\
&- (\Delta''' \cos. L''' \sin. B''' - T''' \sin. A''') \times (\Delta'' \cos. L'' \cos. B'' - T'' \cos. A'')] \\
&+ \Delta'' \sin. L'' [(\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \times (\Delta''' \cos. L''' \sin. B''' - T''' \sin. A''') \\
&- (\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \times (\Delta''' \cos. L''' \cos. B''' - T''' \cos. A''')] \\
&+ \Delta''' \sin. L''' [(\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \times (\Delta'' \cos. L'' \cos. B'' - T'' \cos. A'') \\
&- (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \times (\Delta'' \cos. L'' \sin. B'' - T'' \sin. A'')]
\end{aligned}\right\} = 0;$$

ou enfin,

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta' \sin. L' [\Delta'' \Delta''' \cos. L'' \cos. L''' \sin. (B'' - B''') - \Delta'' \cos. L'' T''' \sin. (B'' - A''') \\
&- \Delta''' \cos. L''' T'' \sin. (A'' - B''') + T'' T''' \sin. (A'' - A''')] \\
&+ \Delta'' \sin. L'' [\Delta' \Delta''' \cos. L' \cos. L''' \sin. (B''' - B') - \Delta' \cos. L' T''' \sin. (A''' - B') \\
&- \Delta''' \cos. L''' T' \sin. (B''' - A') + T' T''' \sin. (A''' - A')] \\
&+ \Delta''' \sin. L''' [\Delta' \Delta'' \cos. L' \cos. L'' \sin. (B' - B'') - \Delta' \cos. L' T'' \sin. (B' - A'') \\
&- \Delta'' \cos. L'' T' \sin. (A' - B'') + T' T'' \sin. (A' - A'')]
\end{aligned}\right\} = 0;$$

Si donc l'on ſuppoſe

$$\begin{aligned}
C &= \sin. L' \cos. L'' \cos. L''' \sin. (B'' - B''') + \sin. L'' \cos. L' \cos. L''' \sin. (B''' - B') \\
&\qquad + \sin. L''' \cos. L' \cos. L'' \sin. (B' - B''), \\
D' &= T''' [\sin. L' \cos. L'' \sin. (B'' - A''') + \sin. L'' \cos. L' \sin. (A''' - B')], \\
E' &= T'' [\sin. L' \cos. L''' \sin. (A'' - B''') + \sin. L''' \cos. L' \sin. (B' - A'')], \\
F &= T' [\sin. L'' \cos. L''' \sin. (B''' - A') + \sin. L''' \cos. L'' \sin. (A' - B'')],
\end{aligned}$$

$$G = T''T''' \text{ ſin. } L' \text{ ſin. } (A'' - A'''),$$
$$H = T'T''' \text{ ſin. } L'' \text{ ſin. } (A''' - A'),$$
$$K = T'T'' \text{ ſin. } L''' \text{ ſin. } (A' - A''),$$

l'on aura

$$(1)\quad C\Delta'\Delta''\Delta''' - D'\Delta'\Delta'' - E'\Delta'\Delta''' - F\Delta''\Delta''' + G\Delta' + H\Delta'' + K\Delta''' = 0.$$

Que l'équation qui réſout le Problème des Comètes ſe rabaiſſe au ſecond degré, lorſque l'on connoît d'ailleurs les rapports des diſtances de la Comète à la Terre, correſpondantes à trois obſervations.

(25.) Au moyen de l'équation (1) du *paragraphe précédent,* on voit que dans tous les cas, l'équation qui réſout le Problème des Comètes ſe rabaiſſe au ſecond degré, lorſque l'on a d'ailleurs des équations de la forme ſuivante,

$$\Delta''' = P\Delta',\ \Delta'' = P'\Delta',$$

P, P' étant des quantités connues. En effet, ſi dans l'équation du *paragraphe précédent* l'on ſubſtitue $P\Delta'$ à Δ''', $P'\Delta'$ à Δ'', elle deviendra, à cauſe de la diviſion par Δ',

$$(1)\ PP'C\Delta'^2 - (P'D' + PE' + PP'F)\Delta' + G + P'H + PK = 0.$$

Des uſages de l'Équation (1) du §. 24.

(26.) L'équation du *§. 24* eſt une des plus importantes de cette théorie; & l'on ne doit employer dans le calcul, aucunes diſtances de la Comète à la Terre qui ne ſatisferoient point à cette équation. En effet, une des conditions principales à remplir, eſt que la Comète ſe meuve dans un même plan; or cette condition n'auroit pas lieu, ſi les diſtances employées ne rendoient pas nulle l'équation dont il s'agit. Comme cette équation eſt rigoureuſe, qu'elle s'applique à toutes les diſtances, & qu'elle eſt indépendante de la nature de la trajectoire de la Comète, on doit ſentir l'utilité de la méthode. Suppoſons, en effet, que l'on calcule des obſervations très-éloignées, & que l'on ſoit en doute ſur la nature de

de la trajectoire; il faut avant tout, constater si les distances que l'on emploie, donnent un plan unique pour le plan de l'orbite.

Un second usage, non moins utile de l'équation précédente, est la facilité de connoître la distance intermédiaire Δ'', lorsque l'on connoît les distances extrêmes Δ', Δ'''. Les Astronomes qui ont calculé des orbites de Comètes, savent combien, en général, il est utile d'avoir exactement cette seconde distance intermédiaire: or il est évident qu'elle se déduit avec la plus grande facilité de l'équation (1) du *§. 24.* En effet, on tire de cette équation,

$$(1)\quad \Delta'' = \frac{E'\Delta'\Delta''' - G\Delta' - K\Delta'''}{C\Delta'\Delta''' - D'\Delta' - F\Delta''' + H}.$$

(27.) Indépendamment des usages précédens, les équations dont nous nous occupons, peuvent résoudre beaucoup d'autres questions importantes. Nous avons vu, par exemple *(§. 25)* que lorsque l'on connoît le rapport des distances de la Comète à la Terre, lors de trois observations, l'on peut déterminer l'une quelconque de ces distances par une équation du second degré; & nous avons donné cette équation. On peut être curieux maintenant de voir combien les erreurs sur les rapports des distances peuvent faire varier les résultats.

Pour y parvenir, je différencie l'équation (1) du *§. 25;* & j'ai, en conservant toutes les définitions des *paragraphes précédens*,

$$\begin{aligned}(1)\quad & (2PP'C\Delta' - P'D' - PE' - PP'F)\,d\Delta' \\ & + (P'C\Delta'^2 - E'\Delta' - P'F\Delta' + K)\,dP \\ & + (PC\Delta'^2 - D'\Delta' - PF\Delta' + H)\,dP' = 0.\end{aligned}$$

L'on a donc la relation entre les variations des rapports des distances, & la variation de la distance conclue par l'équation (1) du *§. 25.*

(28.) Il est évident qu'il y a un nombre infini de valeurs de Δ', Δ'', Δ''' qui rendent nulle l'équation (1) du *§. 24*, puisque cette équation renfermant trois variables, il faudroit

avoir deux nouvelles équations, pour parvenir à une ſolution déterminée; lors donc que cette équation eſt ſatisfaite par des valeurs particulières de Δ', Δ'', Δ''', on peut demander, quelle doit être la relation entre les variations de Δ', Δ'', Δ''', pour que l'équation demeure toujours ſatisfaite? Rien n'eſt plus ſimple que la ſolution de ce Problème. En effet, ſi l'on différencie l'équation (1) du §. 24, l'on aura

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & (C\Delta''\Delta''' - E'\Delta''' - D'\Delta'' + G)\, d\Delta' \\
& + (C\Delta'\Delta''' - F\,\Delta''' - D'\Delta' + H)\, d\Delta'' \\
& + (C\Delta'\Delta'' - E'\Delta' - F\,\Delta'' + K)\, d\Delta''' = 0.
\end{aligned}
$$

Il n'eſt pas même néceſſaire que l'équation (1) du §. 24, ſoit rigoureuſement ſatisfaite par la ſubſtitution des différentes valeurs de Δ', Δ'', Δ''', pour que l'on puiſſe employer une équation de la forme précédente; & ſi l'on nomme

α ce qui devient l'équation (1) du §. 24 par les ſubſtitutions des valeurs de Δ', Δ'', Δ''',

l'on aura

$$
\begin{aligned}
(2)\quad & (C\Delta''\Delta''' - E'\Delta''' - D'\Delta'' + G)\, d\Delta' \\
& + (C\Delta'\Delta''' - F\,\Delta''' - D'\Delta' + H)\, d\Delta'' \\
& + (C\Delta'\Delta'' - E'\Delta' - F\,\Delta'' + K)\, d\Delta''' - \alpha = 0.
\end{aligned}
$$

Remarque ſur les Équations du §. 21.

(29.) Si, par exemple, dans l'équation (8) du §. 21, l'on ſubſtitue à Δ''', ſa valeur $P\Delta'$, elle deviendra

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & [P\,\text{ſin.}\,L'''\,(\Delta'\,\text{coſ.}\,L'\,\text{ſin.}\,B' - T'\,\text{ſin.}\,A') \\
& - \text{ſin.}\,L'\,(P\Delta'\,\text{coſ.}\,L'''\,\text{ſin.}\,B''' - T'''\,\text{ſin.}\,A''')]\,\text{coſ.}\,\zeta \\
& - [P\,\text{ſin.}\,L'''\,(\Delta'\,\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,B' - T'\,\text{coſ.}\,A') \\
& - \text{ſin.}\,L'\,(P\Delta'\,\text{coſ.}\,L'''\,\text{coſ.}\,B''' - T'''\,\text{coſ.}\,A''')]\,\text{ſin.}\,\zeta = 0.
\end{aligned}
$$

On voit donc que ſi l'on connoiſſoit d'avance la poſition du nœud, & le rapport des diſtances de la Comète à la Terre correſpondantes à deux obſervations, l'on connoîtroit la première diſtance par une ſimple équation du premier degré. En général, les relations entre les quantités P, Δ', ζ, qui entrent dans l'équation (1), ſont du premier degré, & par conſéquent faciles à réſoudre.

Si l'on différencie cette dernière équation, & que l'on nomme

ϖ ce qu'elle devient par les ſubſtitutions des valeurs hypothétiques de Δ', ζ, P,

$d\zeta$ l'erreur ſur la poſition du nœud exprimée en ſecondes de degrés,

dP l'erreur du rapport des diſtances Δ', Δ''',

l'on aura

$$\begin{aligned}(2)\ \{&P\Delta' \text{coſ.}\, L' \text{ſin.}\, L''' \text{ſin.}\, (B'-\zeta) - P\Delta' \text{ſin.}\, L' \text{coſ.}\, L''' \text{ſin.}\, (B'''-\zeta)\\ &+ T''' \text{ſin.}\, L' \text{ſin.}\, (A'''-\zeta) - P[\Delta' \text{ſin.}\, L' \text{coſ.}\, L''' \text{ſin.}\, (B'''-\zeta)\\ &- \Delta' \text{coſ.}\, L' \text{ſin.}\, L''' \text{ſin.}\, (B'-\zeta) + T' \text{ſin.}\, L''' \text{ſin.}\, (A'-\zeta)]\}\, d\Delta'\\ &- [\Delta' \text{ſin.}\, L' \text{coſ.}\, L''' \text{ſin.}\, (B'''-\zeta) - \Delta' \text{coſ.}\, L' \text{ſin.}\, L''' \text{ſin.}\, (B'-\zeta)\\ &+ T' \text{ſin.}\, L''' \text{ſin.}\, (A'-\zeta)]\, \Delta'\, dP + \{P\Delta' T' \text{ſin.}\, L''' \text{coſ.}\, (A'-\zeta)\\ &- \Delta' T''' \text{ſin.}\, L' \text{coſ.}\, (A'''-\zeta) - P\Delta'^2 [\text{coſ.}\, L' \text{ſin.}\, L''' \text{coſ.}\, (B'-\zeta)\\ &- \text{ſin.}\, L' \text{coſ.}\, L''' \text{coſ.}\, (B'''-\zeta)]\} \frac{d\zeta}{206265''} - \varpi = 0.\end{aligned}$$

Ces équations trouveront leur application par la ſuite. J'ai cru ne pouvoir trop les multiplier, attendu leur uſage pour faciliter la détermination de la poſition du plan des Comètes.

De la forme la plus générale que l'on peut donner à l'Équation (2) du §. 28.

(30.) On pourroit donner une forme plus générale à l'équation (2) du *ſ. 28*, & faire entrer dans le calcul, les erreurs des obſervations; c'eſt-à-dire, que ſuppoſant ſatisfaite l'équation (1) du *ſ. 24*, on peut demander quelle doit être la relation entre les variations de Δ', Δ'', Δ''', & les erreurs des obſervations pour que l'équation demeure toujours ſatisfaite?

Pour réſoudre cette queſtion, je reprends l'équation (1) du *ſ. 24*, & je la différencie de toutes les manières; il eſt aiſé de voir que l'on parviendra à l'équation ſuivante,

$$(1)\quad (C\Delta'\Delta'' - E'\Delta' - F\Delta'' + K)\,d\Delta'''$$
$$+ (C\Delta''\Delta''' - E'\Delta''' - D'\Delta'' + G)\,d\Delta'$$
$$+ (C\Delta'\Delta''' - F\Delta''' - D'\Delta' + H)\,d\Delta''$$
$$+ \Delta'\Delta''\Delta'''\,dC - \Delta'\Delta''\,dD' - \Delta'\Delta'''\,dE'$$
$$- \Delta''\Delta'''\,dF + \Delta'\,dG + \Delta''\,dH + \Delta'''\,dK - \alpha = 0;$$

mais

$$dC = [\cos. L' \cos. L'' \cos. L''' \sin. (B'' - B''')$$
$$- \sin. L' \sin. L'' \cos. L''' \sin. (B''' - B')$$
$$- \sin. L' \cos. L'' \sin. L''' \sin. (B' - B'')]\,\frac{dL'}{206265''}$$
$$- [\sin. L' \sin. L'' \cos. L''' \sin. (B'' - B''')$$
$$- \cos. L' \cos. L'' \cos. L''' \sin. (B''' - B')$$
$$+ \cos. L' \sin. L'' \sin. L''' \sin. (B' - B'')]\,\frac{dL''}{206265''}$$
$$- [\sin. L' \cos. L'' \sin. L''' \sin. (B'' - B''')$$
$$+ \cos. L' \sin. L'' \sin. L''' \sin. (B''' - B')$$
$$- \cos. L' \cos. L'' \cos. L''' \sin. (B' - B'')]\,\frac{dL'''}{206265''}$$
$$+ [\sin. L' \cos. L'' \cos. L''' \cos. (B'' - B''')$$
$$- \sin. L''' \cos. L' \cos. L'' \cos. (B' - B'')]\,\frac{dB''}{206265''}$$
$$+ [\sin. L''' \cos. L' \cos. L'' \cos. (B' - B'')$$
$$- \sin. L'' \cos. L' \cos. L''' \cos. (B''' - B')]\,\frac{dB'}{206265''}$$
$$+ [\sin. L'' \cos. L' \cos. L''' \cos. (B''' - B')$$
$$- \sin. L' \cos. L'' \cos. L''' \cos. (B'' - B''')]\,\frac{dB'''}{206265''},$$

$$dD' = T'''\,[\cos. L' \cos. L'' \sin. (B'' - A''') - \sin. L' \sin. L'' \sin. (A''' - B')]\,\frac{dL'}{206265''}$$
$$+ T'''\,[\cos. L' \cos. L'' \sin. (A''' - B') - \sin. L' \sin. L'' \sin. (B'' - A''')]\,\frac{dL''}{206265''}$$
$$+ T''' \sin. L' \cos. L'' \cos. (B'' - A''')\,\frac{dB''}{206265''}$$
$$- T''' \sin. L'' \cos. L' \cos. (A''' - B')\,\frac{dB'}{206265''},$$

$$dE = T'' \,[\text{cof.}\, L' \,\text{cof.}\, L''' \text{fin.}\, (A'' - B''') - \text{fin.}\, L' \,\text{fin.}\, L''' \text{fin.}\, (B' - A'')] \,\frac{d\,L'}{206265''}$$
$$+\, T'' \,[\text{cof.}\, L''' \text{cof.}\, L' \,\text{fin.}\, (B' - A'') - \text{fin.}\, L' \,\text{fin.}\, L''' \text{fin.}\, (A'' - B''')] \,\frac{d\,L'''}{206265''}$$
$$+\, T'' \,[\,\text{fin.}\, L''' \,\text{cof.}\, L' \,\text{cof.}\, (B' - A'')] \,\frac{d\,B'}{206265''}$$
$$-\, T'' \;\text{fin.}\, L' \,\text{cof.}\, L''' \text{cof.}\, (A'' - B''') \;\frac{d\,B'''}{206265''},$$

$$dF = T' \,[\text{cof.}\, L'' \text{cof.}\, L''' \text{fin.}\, (B''' - A') - \text{fin.}\, L'' \text{fin.}\, L''' \text{fin.}\, (A' - B'')] \,\frac{d\,L''}{206265''}$$
$$+\, T' \,[\text{cof.}\, L'' \,\text{cof.}\, L''' \text{fin.}\, (A' - B'') - \text{fin.}\, L'' \,\text{fin.}\, L''' \text{fin.}\, (B''' - A')] \,\frac{d\,L'''}{206265''}$$
$$+\, T' \,[\,\text{fin.}\, L'' \,\text{cof.}\, L''' \,\text{cof.}\, (B''' - A')] \,\frac{d\,B'''}{206265''}$$
$$-\, T' \;\text{cof.}\, L'' \,\text{fin.}\, L''' \,\text{cof.}\, (A' - B'') \;\frac{d\,B''}{206265''},$$

$$d\,G = T'' \,T''' \,\text{cof.}\, L' \,\text{fin.}\, (A'' - A''') \;\frac{d\,L'}{206265''},$$
$$d\,H = T' \;T''' \,\text{cof.}\, L'' \,\text{fin.}\, (A''' - A') \;\frac{d\,L''}{206265''},$$
$$d\,K = T' \;T'' \,\text{cof.}\, L''' \,\text{fin.}\, (A' - A'') \;\frac{d\,L'''}{206265''}.$$

Au moyen de ces équations, l'on pourra apprécier l'influence des obſervations ſur les réſultats. Il eſt ſuperflu d'avertir que dL', dL'', dL''', dB', dB'', dB''', ſont les erreurs des obſervations évaluées en ſecondes de degré.

Qu'il exiſte entre les diſtances ſucceſſives de la Comète à la Terre, des équations de la forme de celles dont il a été queſtion dans le §. 25.

(31.) Si l'on conſidère trois obſervations ſucceſſives, je vais faire voir qu'il exiſte entre les diſtances correſpondantes de la Comète à la Terre, des équations de la forme ſuivante,

$$\Delta'' = P' \Delta', \qquad\qquad \Delta''' = P \Delta',$$

P & P' étant des quantités connues. Il n'eſt pas même indiſpenſable que les obſervations aient été faites dans des

intervalles très-prochains, pourvu toutefois que l'on puiſſe lier les obſervations éloignées par des obſervations prochaines. Je ne m'aſtreindrai donc pas pour réſoudre le Problème des Comètes, à ne conſidérer rigoureuſement que trois obſervations; j'en emploîrai réellement quatre ou même un plus grand nombre; je combinerai les obſervations ſucceſſives trois à trois; j'en conclurai les diſtances correſpondantes de la Comète à la Terre; en un mot, je ferai réſulter de ces premières obſervations un ſyſtème de deux obſervations, & je les comparerai à une obſervation éloignée pour rectifier les élémens.

Dans le calcul des élémens de l'orbite, j'emploîrai toujours la première & la dernière obſervation faite dans des intervalles proches, lorſqu'il s'agira de la comparer à l'obſervation éloignée dont il vient d'être queſtion; j'appellerai

Δ', R', T', A', B', L', les quantités qui appartiennent à la première obſervation;

Δ''', R''', T''', A''', B''', L''', les quantités qui appartiennent à la dernière des obſervations faites dans des intervalles proches.

Je nommerai

Δ'', R'', T'', A'', B'', L'', les quantités analogues de l'obſervation qu'il eſt néceſſaire d'introduire pour déterminer les rapports de Δ' à Δ'', de Δ' à Δ'''.

Je nommerai enfin

Δ'''', R'''', T'''', A'''', B'''', L'''', les quantités qui appartiennent à la quatrième obſervation éloignée;

t le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſervation Δ' & Δ'';

t' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſervation Δ'' & Δ''';

ϑ le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſervation Δ' & Δ'''.

Dans ces dernières définitions, j'ai déſigné chacune des obſervations par la valeur de Δ correſpondante; ainſi, par exemple, j'ai nommé obſervation Δ', la première obſervation; obſervation Δ'', la ſeconde obſervation; & ainſi de ſuite. J'emploîrai toujours cette déſignation.

(32.) Soit

$$\mu' = \text{ſin. } L''' \text{ coſ. } L'' \text{ ſin. } (B''-A'') - \text{ſin. } L'' \text{ coſ. } L''' \text{ ſin. } (B'''-A'');$$
$$\mu'' = \text{ſin. } L''' \text{ coſ. } L' \text{ ſin. } (B'-A'') - \text{ſin. } L' \text{ coſ. } L''' \text{ ſin. } (B'''-A'');$$
$$\mu''' = \text{ſin. } L'' \text{ coſ. } L' \text{ ſin. } (B'-A'') - \text{ſin. } L' \text{ coſ. } L'' \text{ ſin. } (B''-A'');$$

on conclura facilement de la ſavante analyſe de M. de la Grange, les équations ſuivantes,

$$(1)\quad t'\mu''\Delta' - \vartheta\mu'\Delta'' = 0,$$
$$(2)\quad t'\mu'''\Delta' - t\,\mu'\Delta''' = 0,$$
$$(3)\quad t\,\mu''\Delta''' - \vartheta\mu'''\Delta'' = 0.$$

Si donc l'on ſuppoſe

$$(4)\quad P = \frac{t'\mu'''}{t\,\mu'},$$
$$(5)\quad P' = \frac{t'\mu''}{\vartheta\mu'},$$

l'on aura

$$(6)\quad \Delta'' - P'\Delta';$$
$$(7)\quad \Delta''' - P\Delta'.$$

J'aurois pu renvoyer pour la démonſtration de ces propoſitions, à l'Ouvrage même de M. de la Grange; mais comme l'énoncé ne ſe trouve pas préciſément dans l'Ouvrage dont il s'agit, qui d'ailleurs pourroit n'être pas entre les mains du Lecteur, j'ai cru que l'on verroit avec plaiſir un abrégé de ſon analyſe; j'ai penſé auſſi, que pour ne pas interrompre la ſuite des propoſitions relatives à la détermination des orbites des Comètes, il convenoit de renvoyer cette diſcuſſion à la fin du Mémoire.

On peut donc, quant à préſent, regarder les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) comme autant de Lemmes dont on aura la démonſtration.

(33.) Quoique les déterminations précédentes ſoient fondées ſur des conſidérations qui ſuppoſent des obſervations peu éloignées entr'elles, il eſt cependant poſſible d'employer ſans danger des obſervations notablement diſtantes, pourvu

toutefois que l'on ait des obſervations intermédiaires qui lient enſemble ces obſervations éloignées. Je ſerois même tenté de croire que cette manière d'envifager le Problème eſt préférable dans la pratique, attendu que la méthode acquiert par-là le plus grand degré d'exactitude qu'elle puiſſe avoir, & que d'ailleurs les erreurs des obſervations ſe compenſent.

Pour me faire entendre, je ſuppoſe que l'obſervation Δ''' ſoit notablement éloignée de l'obſervation Δ'; & qu'il en eſt de même de l'obſervation Δ''; j'imagine d'ailleurs que l'on a des obſervations intermédiaires. Je remarque qu'en général ſi des quantités Δ', ε, ε', ε'', ε''', &c. ſont telles que l'on ait $\Delta' : \varepsilon :: m : n$; $\varepsilon : \varepsilon' :: m' : n'$; $\varepsilon' : \varepsilon'' :: m'' : n''$; $\varepsilon'' : \varepsilon''' :: m''' : n'''$, & ainſi de ſuite; l'on aura $\Delta' n = \varepsilon m$; $\Delta' n n' = \varepsilon' m m'$; $\Delta' n n' n'' = \varepsilon'' m m' m''$, & ainſi de ſuite. Soient donc

Δ', ε, ε', ε'', ε''', &c. Δ''' les obſervations que je déſigne par les diſtances Δ', ε, ε', ε'', ε''' &c. Δ''' de la Comète à la Terre, lors de ces obſervations;

ε, ε', ε'', ε''', &c. les diſtances correſpondantes aux obſervations intermédiaires entre l'obſerv. Δ' & l'obſerv. Δ'''.

Par les équations du *paragraphe précédent,* je détermine les rapports entre les diſtances Δ', ε; ε', ε'', &c. Δ''; ε''', ε'''', &c. Δ''', & j'ai, en nommant $\frac{n}{m}$, $\frac{n'}{m'}$, $\frac{n''}{m''}$, &c. ces rapports ſucceſſifs,

$$(1)\ \Delta''' = \frac{n\,n'\,n''\,n''', \&c.}{m\,m'\,m''\,m''', \&c.}, \Delta'. \qquad (2)\ \Delta'' = \frac{n\,n'\,n'', \&c.}{m\,m'\,m'', \&c.}, \Delta'.$$

On voit par-là que quoique les obſervations Δ', Δ'', Δ''' ſoient éloignées entr'elles, le véritable eſprit de la méthode eſt conſervé ſans augmenter infiniment le calcul.

En général, ſoit que l'on ſe contente d'évaluer les quantités P, P' au moyen des équations (4) & (5) du §. 32, ce qui peut être inexact, ſoit que l'on ſuppoſe

$$(3)\ P' = \frac{n\,n'\,n''}{m\,m'\,m''}, \&c. \qquad (4)\ P = \frac{n\,n'\,n''\,n'''\,n''''}{m\,m'\,m''\,m'''\,m''''}, \&c.$$

je

je supposerai toujours que l'on a

$$(5)\ \Delta'' = P'\Delta', \qquad (6)\ \Delta''' = P\Delta'.$$

Détermination des valeurs de Δ', Δ'', Δ'''.

Première Méthode pour avoir ces valeurs.

(34.) Le but que nous nous sommes proposés dans les dernières recherches, a été de connoître les valeurs de Δ', Δ'', Δ'''; & si nous avons donné les rapports entre ces quantités, nous n'avons regardé ces déterminations que comme un acheminement à la connoissance de ces valeurs; il faut donc nous occuper plus particulièrement de ce dernier objet. Nous remarquerons ici, qu'il suffira de connoître la valeur de Δ', puisque quand cette valeur sera connue, on concluera facilement les valeurs de Δ'' & Δ''', au moyen des équations (5) & (6) du *§. 33.*

(35.) J'emprunterai la première valeur de Δ' de l'équation (1) du *§. 25.* Comme l'équation dont elle se déduit est rigoureuse, quels que soient les intervalles entre les observations, elle peut s'appliquer à des observations éloignées entr'elles, pourvu toutefois, que l'on évalue les quantités P, P', au moyen des équations du *§. 33*; & dans tous les cas, les résultats présentent le même degré d'exactitude que les évaluations des quantités P, P'. Si donc l'on conserve les définitions du *§. 24*, l'on aura l'équation suivante,

$$(1)\ PP'C\Delta'^2 - (P'D' + PE' + PP'F)\Delta' + G + P'H + PK = 0.$$

Cette équation n'est que du second degré, & par-là, elle a l'avantage de pouvoir être résolue par les méthodes ordinaires; mais en même temps elle présente une difficulté qu'il s'agit d'éclaircir. Voici comment on peut présenter la question.

Les deux racines de l'équation satisfont-elles au Problème des Comètes!

Pour résoudre cette difficulté, on se rappellera que pour

déterminer l'orbite des Comètes, il faut ſatisfaire à deux conditions; la première, que la trajectoire ſoit dans un même plan; la ſeconde, que la corde compriſe entre les deux rayons vecteurs extrêmes ſoutende un arc qui puiſſe être décrit en vertu des forces centrales qui animent la Comète. L'équation (1) eſt abſolument indépendante de la nature des forces centrales, puiſque l'équation (1) du *ſ. 24* ne dépend nullement de ces forces, & que les valeurs de P, P', en ſont également indépendantes. Lors donc que l'on a ſatisfait à cette éq ation, l'on n'a encore rempli qu'une des conditions, celle que la trajectoire ſoit dans un même plan, & cette condition admet deux ſolutions. Mais ſi l'on veut que la corde compriſe entre les deux rayons vecteurs extrêmes, ſoutende un arc qui puiſſe être décrit en vertu des forces centrales; il faut que cette corde puiſſe avoir pour expreſſion celle que je vais développer dans les paragraphes ſuivans. Ce ne ſont donc que les valeurs communes entre l'équation (1) du *préſent aragraphe*, & une nouvelle équation que je vais déterminer, qui réſolvent véritablement le Problème, puiſque ces valeurs ſont les ſeules qui réuniſſent toutes les conditions néceſſaires. Cette propoſition demande cependant quelqu'explication, ainſi que nous le ferons voir dans le *ſ. 42*.

Seconde Méthode.

(36.) Voici une ſeconde approximation de Δ', tirée des propriétés de la parabole, & qui eſt analogue à la *Méthode des Principes mathématiques*. Cette méthode eſt le complément de la précédente; & elle me paroît préférable dans la pratique, en ce qu'elle permet d'employer des obſervations plus éloignées entr'elles, pourvu toutefois, que l'on ait l'attention d'évaluer les quantités P', P, au moyen des équations (3) & (4) du *ſ. 33*.

Il ſuit du *ſ. 15*, que ſi l'on nomme

c la corde interceptée entre les rayons vecteurs R', R''',

on a

$$(1)\ \Delta'^2 + \Delta'''^2 - 2\Delta'\Delta''' [\text{cof.} L' \text{cof.} L''' \text{cof.} (B''' - B') + \text{fin.} L' \text{fin.} L''']$$
$$- 2\Delta' \text{cof.} L' [T' \text{cof.} (B' - A') - T''' \text{cof.} (B' - A''')]$$
$$- 2\Delta''' \text{cof.} L''' [T''' \text{cof.} (B''' - A''') - T' \text{cof.} (B''' - A')]$$
$$+ T'^2 + T'''^2 - 2T'T''' \text{cof.} (A''' - A') - c^2 = 0.$$

Mais $\Delta''' = P\Delta'$; donc, fi l'on fuppofe

$$F = 1 + P^2 - 2P[\text{cof.} L' \text{cof.} L''' \text{cof.} (B''' - B') + \text{fin.} L' \text{fin.} L'''],$$
$$G = \text{cof.} L' [T' \text{cof.} (B' - A') - T''' \text{cof.} (B' - A''')]$$
$$+ P \text{cof.} L''' [T''' \text{cof.} (B''' - A''') - T' \text{cof.} (B''' - A')],$$
$$H = T'^2 - 2T'T''' \text{cof.} (A''' - A') + T'''^2,$$

l'on aura

$$(2)\ \Delta' (\Delta' - \frac{2}{F} G) + \frac{1}{F} (H - c^2) = 0.$$

Maintenant, fi l'on fuppofe

$$R' = \sqrt{[\Delta' (\Delta' - 2T' \text{cof.} L' \text{cof.} (B' - A')) + T'^2]},$$
$$R''' = \sqrt{[\Delta' (P^2\Delta' - 2PT''' \text{cof.} L''' \text{cof.} (B''' - A''')) + T'''^2]},$$

ϑ = le nombre de minutes de temps écoulées entre les obfervations,

r la moyenne diftance du Soleil à la Terre,

s l'efpace que la Terre décrit dans fon orbite, pendant une minute de temps, lorfqu'elle eft à fa moyenne diftance du Soleil,

& que l'on détermine convenablement une quantité Ω, que j'introduis dans le calcul, pour l'éliminer enfuite, l'on aura

$$(3)\ c^2 = \frac{4\vartheta^2 s^2 r}{R' + R'''} (1 + \Omega);$$

donc

$$(4)\ \Delta' (\Delta' - \frac{2}{F} G) + \frac{1}{F} [H - \frac{4\vartheta^2 s^2 r}{R' + R'''} (1 + \Omega)] = 0.$$

Il ne s'agit plus que d'évaluer convenablement la quantité Ω.

(37.) Si l'on nomme

c la corde de la parabole,

R', R''' les rayons vecteurs extrêmes,

ρ le rayon vecteur correfpondant au fommet du diamètre qui coupe la corde en deux parties égales,

$\varkappa$ la flèche comprife fur le rayon vecteur ρ, entre la corde & le fommet du diamètre,

l'on a, d'après Newton,

$$(1)\ x = \frac{c^2}{16\rho}; \qquad (2)\ \rho = \tfrac{1}{2}(R' + R''') - x;$$

$$(3)\ c = \frac{\vartheta s \sqrt{2}\sqrt{r}}{\sqrt{\left(\frac{R' + R'''}{2} - \frac{1}{3}x\right)}}.$$

Des équations (1) & (2), l'on tire

$$x = \frac{R' + R''' - \sqrt{[(R' + R''')^2 - c^2]}}{4};$$

& si l'on porte cette valeur de x dans l'équation (3), l'on aura

$$c^2 = \frac{24\,\vartheta^2 s^2 r}{5(R' + R''') + \sqrt{[(R' + R''')^2 - c^2]}};$$

donc en réduisant en série, l'on aura

$$(4)\ c^2 = \frac{4\,\vartheta^2 s^2 r}{R' + R'''}\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{\vartheta^2 s^2 r}{(R' + R''')^3}\right);$$

& cette approximation est très-grande, même pour une corde assez considérable.

Si l'on suppose que les intervalles entre les observations, sont assez petits pour que dans les équations (2) & (3) du *présent paragraphe*, l'on puisse négliger la quantité x, vis-à-vis de la quantité $\frac{R' + R'''}{2}$, l'on aura $c^2 = \frac{2\,\vartheta^2 s^2 r}{\rho}$; mais

$$\rho = \sqrt{\{\Delta'[P'^2\Delta' - 2P'T''\,\text{cos.}\,L''\,\text{cos.}\,(B'' - A'')] + T''^2\}}.$$

l'équation (4) du *§. 36* deviendra donc

$$(5)\ \Delta'\left(\Delta' - \frac{2}{F}G\right) + \frac{1}{F}\left\{H - \frac{2\,\vartheta^2 s^2 r}{\sqrt{[\Delta'[P'^2\Delta' - 2P'T''\,\text{cos.}\,L''\,\text{cos.}\,(B'' - A'')] + T''^2]}}\right\} = 0.$$

Nous remarquerons seulement que dans ce cas, la formule perd l'avantage de pouvoir être appliquée à des observations éloignées entr'elles.

Nous remarquerons enfin, que comme la révolution ſidérale de la Terre eſt de $365^j\,6^h\,9'\,11''$, on a

$$\text{Log. } s = 5{,}0772198; \qquad \text{Log. } s^2 r = 20{,}1544396.$$

(38.) Si dans l'équation (1) du ſ. 36, l'on ſubſtitue à c^2 ſa valeur tirée de l'équation (4) du ſ. 37, elle deviendra

$$\begin{aligned}(1)\ &\Delta'^2 + \Delta'''^2 - 2\Delta'\Delta'''[\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,L'''\,\text{coſ.}\,(B''' - B') + \text{ſin.}\,L'\,\text{ſin.}\,L''']\\ &- 2\Delta'\,\text{coſ.}\,L'\ [T'\ \text{coſ.}\,(B' - A') - T'''\,\text{coſ.}\,(B' - A''')]\\ &- 2\Delta'''\,\text{coſ.}\,L'''\ [T'''\,\text{coſ.}\,(B''' - A''') - T'\ \text{coſ.}\,(B''' - A')]\\ &+ T'^2 + T'''^2 - 2T'T'''\,\text{coſ.}\,(A''' - A')\\ &- \frac{4\,\vartheta^2 s^2 r}{R' + R'''}\left[1 + \frac{1}{3}\,\frac{\vartheta^2 s^2 r}{(R' + R''')^3}\right] = 0.\end{aligned}$$

Si l'on différencie cette équation, & que l'on ſuppoſe

$$\begin{aligned}f &= \text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,L'''\,\text{coſ.}\,(B''' - B') + \text{ſin.}\,L'\,\text{ſin.}\,L''',\\ g &= \text{coſ.}\,L'\ [T'\ \text{coſ.}\,(B' - A') - T'''\,\text{coſ.}\,(B' - A''')],\\ g' &= \text{coſ.}\,L'''\ [T'''\,\text{coſ.}\,(B''' - A''') - T'\,\text{coſ.}\,(B''' - A')],\\ h &= \frac{2\,\vartheta^2 s^2 r}{(R' + R''')^2}\left[1 + \frac{4}{3}\,\frac{\vartheta^2 s^2 r}{(R' + R''')^3}\right],\end{aligned}$$

l'on aura

$$(2)\ (\Delta' - f\Delta''' - g)\,d\Delta' + (\Delta''' - f\Delta' - g')\,d\Delta''' + h\,dR' + h\,dR''' = 0.$$

Il n'eſt pas même néceſſaire que l'équation (1) ſoit rigoureuſement ſatisfaite par la ſubſtitution des différentes valeurs de Δ', Δ''', R', R''', &c, pour que l'on puiſſe employer une équation de la forme précédente; & ſi l'on nomme

γ' ce que devient l'équation (1) par les ſubſtitutions des valeurs particulières de R', R''', Δ', Δ''', &c,

l'on aura

$$(3)\ (\Delta' - f\Delta''' - g)\,d\Delta' + (\Delta''' - f\Delta' - g')\,d\Delta''' + h\,dR' + h\,dR''' - \gamma' = 0.$$

Détermination des rayons vecteurs R', R'', R''', R'''', *&c. correſpondans aux diſtances* Δ', Δ'', Δ''', Δ'''', *&c. de la Comète à la Terre.*

(39.) Lorſque l'on connoît les diſtances Δ', Δ'', Δ''', &c.

de la Comète à la Terre, il eſt facile de déterminer les rayons vecteurs correſpondans.

Soient

R' le rayon vecteur de la Comète correſpondant à la diſtance Δ';
R'' le rayon vecteur de la Comète correſpondant à la diſtance Δ'';
R''' le rayon vecteur de la Comète correſpondant à la diſtance Δ''';
R'''' le rayon vecteur de la Comète correſpondant à la diſtance Δ'''';

& conſervons les définitions précédentes de T', T'', T''', T'''', &c. l'on a

$$(1)\ R' = \sqrt{[T'^2 + \Delta'^2 - 2\Delta' T' \text{ coſ. } L' \text{ coſ. } (B' - A')]};$$
$$(2)\ R'' = \sqrt{[T''^2 + \Delta''^2 - 2\Delta'' T'' \text{ coſ. } L'' \text{ coſ. } (B'' - A'')]};$$
$$(3)\ R''' = \sqrt{[T'''^2 + \Delta'''^2 - 2\Delta''' T''' \text{ coſ. } L''' \text{ coſ. } (B''' - A''')]};$$
$$(4)\ R'''' = \sqrt{[T''''^2 + \Delta''''^2 - 2\Delta'''' T'''' \text{ coſ. } L'''' \text{ coſ. } (B'''' - A'''')]}.$$

Maintenant ſi l'on différencie ces équations, & que l'on ſuppoſe

$$m' = \Delta' - T' \text{ coſ. } L' \text{ coſ. } (B' - A'),$$
$$m'' = \Delta'' - T'' \text{ coſ. } L'' \text{ coſ. } (B'' - A''),$$
$$m''' = \Delta''' - T''' \text{ coſ. } L''' \text{ coſ. } (B''' - A'''),$$
$$m'''' = \Delta'''' - T'''' \text{ coſ. } L'''' \text{ coſ. } (B'''' - A''''),$$

l'on aura

$$(5)\ R'\,dR' - m'\,d\Delta' = 0;$$
$$(6)\ R''\,dR'' - m''\,d\Delta'' = 0;$$
$$(7)\ R'''\,dR''' - m'''\,d\Delta''' = 0;$$
$$(8)\ R''''\,dR'''' - m''''\,d\Delta'''' = 0.$$

Méthode pour faciliter la réſolution de l'équation (4) du paragraphe 36.

(40.) L'équation (4) du *§. 36* préſente quelques difficultés dans la pratique. En effet, quoique ſous la forme du ſecond degré, elle eſt néanmoins d'un degré plus élevé; ce

qui peut faire naître quelques embarras dans l'usage de cette équation. Il est donc à propos d'avoir une méthode qui fasse trouver tout de suite la véritable valeur de Δ', lorsque cette valeur sera à peu-près connue.

Pour y parvenir, je reprends l'équation (3) du §. 38; je substitue à Δ''' & à $d\Delta'''$ leurs valeurs $P\Delta'$, $Pd\Delta'$; je substitue pareillement à dR' & à dR''', leurs valeurs $\frac{m' d\Delta'}{R'}$, $\frac{m''' P d\Delta'}{R'''}$; bien entendu que l'on supposera, comme dans le §. 36,

$$R' = \sqrt{[\Delta'[\Delta' - 2T' \text{ cos. } L' \text{ cos. } (B' - A')] + T'^2]},$$
$$R''' = \sqrt{[\Delta'[P^2\Delta' - 2PT''' \text{ cos. } L''' \text{ cos. } (B''' - A''')] + T'''^2]},$$

& que dans ces dernières expressions, l'on prendra pour Δ' sa valeur approchée, déjà connue par la supposition. Au moyen de ces substitutions, l'équation (3) du §. 38 deviendra

$$(1)\ [(1 + P^2 - 2fP)\Delta' - g - Pg' + h(\frac{m'}{R'} + \frac{m'''P}{R'''})]d\Delta' - \gamma' = 0;$$

d'où l'on conclura tout de suite la valeur de $d\Delta'$, & par conséquent la véritable valeur de Δ'.

On pourroit même donner à cette dernière équation une forme plus générale, en faisant varier le rapport P; l'on auroit alors $d\Delta''' = Pd\Delta' + \Delta' dP$, $dR''' = \frac{m'''}{R'''}(Pd\Delta' + \Delta' dP)$; & l'équation (1) deviendroit

$$(2)\ [(1 + P^2 - 2fP)\Delta' - g - Pg' + h(\frac{m'}{R'} + \frac{m'''}{R'''}P)]d\Delta'$$
$$+ [(P - f + \frac{hm'''}{R'''})\Delta' - g']\Delta' dP - \gamma' = 0.$$

De l'angle compris sur le plan de la trajectoire, entre les rayons vecteurs extrêmes R', R'''.

(41.) Si l'on nomme

N l'angle compris entre les rayons vecteurs extrêmes R', R''',

on aura (*§. 17*),

$$(1)\quad 4\,R'R'''\,\text{fin.}^2\tfrac{1}{2}N + (R''' - R')^2 - c^2 = 0;$$

bien entendu que ſi les intervalles entre les obſervations ne ſont pas fort grands, on pourra ſuppoſer ſans erreur ſenſible,

$$(2)\quad c^2 = \frac{4\,\vartheta^2 s^2 r^2}{R' + R'''}\left(1 + \tfrac{1}{3}\,\frac{\vartheta^2 s^2 r}{(R' + R''')^3}\right).$$

Cette dernière équation eſt fondée ſur une approximation de la corde, & par conſéquent la valeur de $\text{ſin.}^2\tfrac{1}{2}N$ n'eſt elle-même qu'approchée. Voici une expreſſion rigoureuſe du même angle N, & qui eſt indépendante de la nature de la trajectoire,

$$\begin{aligned}(3)\quad & 2\,R'R'''\,\text{ſinus}^2\tfrac{1}{2}N - R'R''' + T'T'''\,\text{coſinus}\,(A''' - A') \\ & - T'\Delta'''\,\text{coſ.}\,L'''\,\text{coſ.}\,(B''' - A') - T'''\Delta'\,\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,(B' - A''') \\ & + \Delta'\Delta'''\,[\text{coſ.}\,L'\,\text{coſ.}\,L'''\,\text{coſ.}\,(B''' - B') + \text{ſin.}\,L'\,\text{ſin.}\,L'''] = 0.\end{aligned}$$

(42.) Il ſuit de ce qui vient d'être démontré dans les *paragraphes précédens*, qu'il eſt poſſible que les équations (1) du *§. 35*, & (4) du *§. 36*, n'ayent pas, rigoureuſement parlant, des valeurs communes. En effet, l'équation (4) du *§. 36* eſt fondée ſur des propriétés de la parabole; elle ſuppoſe donc que l'arc décrit par la Comète, s'identifie ſenſiblement avec un arc de parabole; l'équation (1) du *§. 35*, au contraire, eſt abſolument indépendante de la trajectoire. De plus, cette dernière équation dépend beaucoup plus de l'exactitude des valeurs de P, P', que l'équation du *§. 36*: enfin les erreurs des latitudes de la Lune influent d'une manière bien plus ſenſible ſur l'équation (1) du *§. 35*, que ſur l'équation (4) du *§. 36*. Ces raiſons réunies doivent donc modifier la propoſition qui termine le *§. 35*, & tendent toutes à faire préférer l'équation (4) du *§. 36*.

Des Équations dépendantes de la nature de la trajectoire parabolique des Comètes; & des Queſtions qui en ſont les Corollaires.

(43.) Dans les paragraphes précédens, nous avons diſtingué les équations indépendantes de la nature de la trajectoire

trajectoire des Comètes, d'avec celles qui sont dépendantes de cette trajectoire, & nous nous sommes occupés particulièrement des questions qui supposent uniquement que le mouvement des Comètes se fait dans un même plan; nous devons maintenant résoudre celles dans lesquelles on doit faire entrer la considération particulière de la trajectoire.

Dans cette partie du Mémoire, nous donnerons des méthodes pour résoudre quelques questions que nous avons déjà résolues par d'autres méthodes; nous n'avons pas cru cependant devoir négliger ces solutions, & nous avons pensé que l'on verroit avec plaisir les différentes manières d'envisager les mêmes Problèmes.

De l'anomalie de la Comète à l'instant des observations; de la distance périhélie; & de l'instant du passage par le périhélie.

(44.) Si l'on nomme

R' le rayon vecteur de la Comète,

D la distance périhélie,

v' l'angle traversé depuis le périhélie jusqu'à l'instant de la première observation,

R''' le rayon vecteur de la Comète à l'instant de la troisième observation,

v''' l'angle traversé depuis le périhélie jusqu'à l'instant de la troisième observation,

N l'angle compris entre les deux rayons R', R''',

il est évident que l'on a (*§. 4*)

$$(1)\quad R'(1 + \text{cof.}\, v') - 2D = 0,$$
$$(2)\quad R'''(1 + \text{cof.}\, v''') - 2D = 0,$$
$$(3)\quad v''' = v' + N.$$

Si l'on compare les équations (1) & (2), l'on aura

$$R'(1 + \text{cof.}\, v') - R'''(1 + \text{cof.}\, v''') = 0,$$

ou, à cause de $v''' = v' + N$,

$$R'(1 + \text{cof.}\, v') - R'''[1 + \text{cof.}(v' + N)] = 0;$$

ou, enfin

$$R' - R''' + R''' \text{fin.} N \text{fin.} v' + (R' - R''' \text{cof.} N) \text{cof.} v' = 0.$$

Soit maintenant

M un angle tel que l'on ait (4) tang. $M = \frac{R' - R''' \text{cof.} N}{R''' \text{fin.} N}$;

l'équation précédente deviendra

$$(5) \ \text{fin.} (v' + M) = \frac{(R''' - R') \text{cof.} M}{R''' \text{fin.} N}.$$

Cette équation fera connoître l'anomalie de la Comète à l'instant de la première observation.

L'espèce de l'angle M n'est point arbitraire, & cet angle est déterminé spécifiquement par l'équation (4) du *présent paragraphe ;* il doit être employé tel qu'il est donné par l'analyse. Il faut relire, au surplus, ce que nous avons dit à ce sujet dans le *§. 22.*

La détermination de la distance périhélie ne présente plus maintenant aucune difficulté ; en effet, puisque l'on connoît le rayon vecteur de la Comète & son anomalie, à l'instant de la première observation, l'on conclura tout de suite la distance périhélie, au moyen de l'équation (1)

On déterminera pareillement l'instant du passage de la Comète par le périhélie, au moyen de l'équation suivante,

(6) Nombre de minutes de temps écoulées entre l'instant du passage de la Comète par le périhélie & la première observation

$$= \tfrac{1}{4} (R' + 2D) \sqrt{(R' - D)} \ \frac{157846'\frac{1}{2}}{r^{\frac{3}{2}}};$$

Quoique cette dernière équation ne donne par elle-même aucune lumière sur la question de savoir si, à l'instant de la première observation, la Comète tend à son périhélie, ou si elle s'en éloigne, puisque la forme de l'équation est absolument la même dans les deux cas, il est cependant évident que l'on ne peut point être embarrassé sur la solution de cette difficulté. En effet, puisque l'on connoît l'anomalie de-

la Comète lors de la première obſervation, on fait ſi la Comète s'éloignoit du périhélie, ou ſi elle s'en approchoit lors de la première obſervation.

(45.) Dans l'équation (5) du §. 44, l'expreſſion de ſin. $(v' + M)$ appartient également à deux angles. Géométriquement parlant, il n'y a aucune raiſon pour exclure l'un plutôt que l'autre; toutes les deux anomalies commencent deux arcs terminés par des rayons vecteurs de même longueur, & éloignés entr'eux d'un même angle N pris dans le même ſens. Ces deux ſuppoſitions donnent à la vérité des diſtances périhélies différentes, & par conſéquent des paraboles également différentes. Mais quoique les deux paraboles ſatisfaſſent géométriquement aux deux conditions d'où l'on a déduit l'anomalie, il n'eſt pourtant pas exact de dire qu'elles ſatisfont aſtronomiquement au Problème; en effet, des deux anomalies données par l'équation du ſecond degré, l'une eſt toujours telle que l'angle v' étant moindre que 180 degrés, l'angle $v' + N$ eſt plus grand que 180 degrés; il faudroit donc pour que cette ſolution eût lieu, que la Comète pût paſſer d'une branche de la parabole à l'autre branche, par l'aphélie; ce qui eſt impoſſible.

Examen de la légitimité de la première ſuppoſition ſur la valeur de Δ' employée dans le Calcul.

(46.) Pour prononcer ſur la légitimité de la valeur de Δ' employée dans les calculs, il faut avoir une méthode qui puiſſe faire juger ſi la parabole que l'on vient de déterminer, a pu être décrite dans l'intervalle des obſervations. Rien n'eſt plus ſimple que cette méthode: voici en quoi elle conſiſte.

Soit

ϑ le nombre de minutes de temps écoulées entre la première & la dernière obſervation.

Nous avons vu que l'on a

$$(1)\quad \vartheta = [\,(R''' + 2\,D)\,\sqrt{(R''' - D)} \mp (R' + 2\,D)\,\sqrt{(R' - D)}\,]\,\frac{157846' \frac{1}{2}}{4\,r^{\frac{1}{2}}};$$

on verra donc si, substituant dans cette équation les valeurs de R''', R', D trouvées précédemment, l'équation est satisfaite. Dans le premier cas, le Problème est complètement résolu; la double condition que la trajectoire de la Comète soit dans un même plan, & que ce soit une parabole, est remplie, & il n'y a plus rien à chercher; dans le second cas, les deux conditions ne sont pas encore satisfaites, & il faut chercher à les remplir.

Nous avons vu §. 9 ce que signifient les deux suites de signes de l'équation (1); je ne répéterai point ce que j'ai dit à ce sujet.

Détermination de la longitude héliocentrique de la Comète, & du sens de son mouvement.

(47.) Nous connoissons à peu-près les véritables distances de la Comète à la Terre, lors des observations calculées; nous devons maintenant donner une méthode pour connoître le sens du mouvement de la Comète, vu du Soleil; ainsi que sa longitude héliocentrique.

Fig. 2. Pour y parvenir, du Soleil S & par la projection C' de la Comète sur le plan de l'Écliptique, menons le rayon vecteur accourci SC', & conservons les constructions du §. 13; il est évident que si de la projection C' de la Comète sur l'Écliptique, nous abaissons sur le diamètre Ee de l'orbite de la Terre, passant par le premier point d'*Ariès*, la perpendiculaire $C'P$; la ligne SP est celle que nous avons nommée x, & la droite PC' est celle que nous avons nommée y. De plus, l'angle PSC' est égal à la longitude de la Comète, vue du Soleil, augmentée de 180^d; donc

$$\text{Tangente (long. héliocent. de la Comète} + 180^d) = \frac{y}{x};$$

donc

$$\text{Tangente (longitude héliocentrique de la Comète)} = \frac{-y}{-x}.$$

Si, dans cette dernière expression, l'on substitue à $-x$ &

à $-y$, leurs valeurs tirées des équations (1) & (2) du §. 13, l'on aura

$$\text{Tangente (long. héliocent. de la Comète)} = \frac{\Delta \text{cos}.L \,\text{sin}.B - T \text{sin}.A}{\Delta \text{cos}.L \,\text{cos}.B - T \text{cos}.A}.$$

Cette équation a lieu pour toutes les observations; si donc l'on a deux observations consécutives de la Comète, & que l'on désigne par Δ', B', L', T', A', les quantités qui appartiennent à la première observation; par Δ'', B'', L'', T'', A'', les quantités qui appartiennent à la seconde observation, l'on aura

$$(1)\ \text{Tang. (long. héliocent. de la Comète)} = \frac{\Delta' \text{cos}.L' \text{sin}.B' - T' \text{sin}.A'}{\Delta' \text{cos}.L' \text{cos}.B' - T' \text{cos}.A'};$$

$$(2)\ \text{Tang. (long. héliocent. de la Comète)} = \frac{\Delta'' \text{cos}.L'' \text{sin}.B'' - T'' \text{sin}.A''}{\Delta'' \text{cos}.L'' \text{cos}.B'' - T'' \text{cos}.A''}.$$

Il ne s'agit que de vérifier si la seconde équation donne une longitude plus grande ou plus petite que la première. Dans le premier cas, la Comète est directe; dans le second cas, elle est rétrograde.

De la distance du périhélie de la Comète au nœud ascendant, comptée sur l'orbite.

(48.) Soit

R le rayon vecteur de la Comète;

I l'angle d'inclinaison du plan de l'orbite sur l'Écliptique;

π l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds; cet angle est compté sur le plan de l'orbite de la Comète, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de cet Astre dans son orbite;

Ω la distance du périhélie de la Comète au nœud ascendant; cet angle est compté sur le plan de l'orbite, en suivant le sens du mouvement de la Comète;

Δ la distance de la Comète à la Terre;

A la longitude du Soleil;

B la longitude géocentrique de la Comète;

L la latitude géocentrique de la Comète;

il est évident que pour chaque observation, on a d'abord une équation de la forme suivante,

$$R\,[1 + \text{cof.}\,(u - \Omega)] - 2\,D = 0.$$

De plus, on a (§. 20 équation (1))

$$R\ \text{fin.}\ u\ \text{fin.}\ I - \Delta\ \text{fin.}\ L = 0.$$

Si donc l'on compare la première & la troisième observations, on aura les équations suivantes,

$$(1)\quad R'\,[1 + \text{cof.}\,(u' - \Omega)] - 2\,D = 0\,;$$
$$(2)\quad R'''\,[1 + \text{cof.}\,(u''' - \Omega)] - 2\,D = 0\,;$$
$$(3)\quad R'\ \text{fin.}\ u'\ \text{fin.}\ I - \Delta'\ \text{fin.}\ L' = 0\,;$$
$$(4)\quad R'''\ \text{fin.}\ u'''\ \text{fin.}\ I - \Delta'''\ \text{fin.}\ L''' = 0.$$

Des équations (3) & (4), l'on tire

$$\Delta'\,R'''\ \text{fin.}\ L'\ \text{fin.}\ u''' - \Delta'''\,R'\ \text{fin.}\ L'''\ \text{fin.}\ u' = 0.$$

Maintenant si l'on nomme

v' l'anomalie de la Comète lors de la 1.re observation,
v''' l'anomalie de la Comète lors de la 2.e observation,
N l'angle compris entre les deux rayons vecteurs R', R''',

il est évident qu'il y a la même différence entre u''' & u' qu'entre v''' & v', & l'on aura

$$(5)\quad u''' = u' + N.$$

Donc

$$(6)\quad \Delta'\,R'''\ \text{fin.}\ L'\ \text{fin.}\ (u' + N) - \Delta'''\,R'\ \text{fin.}\ L'''\ \text{fin.}\ u' = 0\,;$$

mais $\text{fin.}\ (u' + N) = \text{fin.}\ u'\ \text{cof.}\ N + \text{fin.}\ N\ \text{cof.}\ u'$; donc

$$(7)\quad \text{tangente}\ u' = \frac{R'''\Delta'\ \text{fin.}\ L'\ \text{fin.}\ N}{R'\Delta'''\ \text{fin.}\ L''' - R'''\Delta'\ \text{fin.}\ L'\ \text{cof.}\ N}.$$

Nous connoissons maintenant la valeur de u' qui répond à la première observation; on conclura donc la position du périhélie au moyen de l'équation

$$(8)\quad \text{cof.}\ (u' - \Omega) = \frac{2\,D}{R'} - 1,$$

ou plus simplement, au moyen de l'équation

$$(9)\ \Omega = u' - v'.$$

De l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comète sur l'Écliptique.

(49.) Quoique nous ayons déjà donné une méthode pour conclure l'inclinaison de l'orbite de la Comète sur l'Écliptique, on ne sera pas fâché de voir avec quelle facilité elle se déduit des équations précédentes : en effet, de l'équation (3) du *§. 48,* l'on tire tout de suite

$$(1)\ \text{sin.}\, I = \frac{\Delta' \text{ sin. } L'}{R' \text{ sin. } u'}.$$

Nous remarquerons que sin. I appartient à deux angles; on choisira le plus petit de ces angles, si la Comète est directe; on choisira le plus grand, si la Comète est rétrograde.

Du lieu du Nœud ascendant de la Comète sur l'Écliptique, & de la longitude du Périhélie.

(50.) Nous avons déjà donné une méthode pour déterminer le lieu du nœud ascendant de la Comète sur l'Écliptique; voici une seconde solution du même Problème.

Par la Terre T menons une parallèle indéfinie Tt' au diamètre ESe de l'orbite de la Terre, passant par le premier point d'*Ariès*; & une autre parallèle Tt à la ligne des nœuds. Prenons le point t tel que Mt soit le prolongement de $C'M$, & que par conséquent $C'Mt$ soit perpendiculaire à la ligne Tt; on aura (*§. 20*) Fig. 3.

$$MC' = R \text{ sin. } u \text{ cos. } I;$$

$$Mt = mT = T \text{ sin. } (TSm);$$

$$C't = Mt + MC' = T \text{ sin. } (TSm) + R \text{ sin. } u \text{ cos. } I.$$

$$TC' = \Delta \text{ cos. } L;$$

$$TC' \text{ sin. } (C'Tt) - C't = 0.$$

De plus, l'angle $C'Tt$ est évidemment égal à la longitude

géocentrique de la Comète moins la longitude du nœud ascendant, puisqu'en effet, il est égal à l'angle $C'Tt'$ moins l'angle tTt'; par la même raison, l'angle STt est égal à la longitude du Soleil moins la longitude du nœud ascendant de la Comète. Si donc l'on nomme

ζ la longitude du nœud ascendant de la Comète,
A la longitude du Soleil,
B la longitude géocentrique de la Comète,

l'on aura

angle STt = angle $TSm = A - \zeta$; angle $C'Tt = B - \zeta$;

donc

$$T \text{ sin.} (T'Sm) = T \text{ sin.} (A - \zeta);$$

donc

$$C't = T \text{ sin.} (A - \zeta) + R \text{ sin.} u \text{ cos.} I;$$

donc en rapportant l'équation à la première observation,

(1) $R' \text{ sin.} u' \text{ cos.} I + T' \text{ sin.} (A' - \zeta) - \Delta' \text{ cos.} L' \text{ sin.} (B' - \zeta) = 0$;

ou enfin, à cause de $R' \text{ sin.} u' = \dfrac{\Delta' \text{ sin.} L'}{\text{sin.} I}$,

(2) $\Delta' \text{ sin.} L' \text{ cotang.} I + T' \text{ sin.} (A' - \zeta) - \Delta' \text{ cos.} L' \text{ sin.} (B' - \zeta) = 0$.

(51.) L'équation (2) du *paragraphe précédent* peut être mise sous la forme suivante,

$$\Delta' \text{ sin.} L' \text{ cotang.} I + (T' \text{ sin.} A' - \Delta' \text{ cos.} L' \text{ sin.} B') \text{ cos.} \zeta - (T' \text{ cos.} A' - \Delta' \text{ cos.} L' \text{ cos.} B') \text{ sin.} \zeta = 0.$$

Soit maintenant

M un angle tel que l'on ait (1) tang. $M = \dfrac{\Delta' \text{ cos.} L' \text{ sin.} B' - T' \text{ sin.} A'}{\Delta' \text{ cos.} L' \text{ cos.} B' - T' \text{ cos.} A'}$;

l'équation précédente deviendra

$$(2) \quad \text{sin.} (\zeta - M) = \frac{\Delta' \text{ sin.} L' \text{ cotang.} I \text{ sin.} M}{T' \text{ sin.} A' - \Delta' \text{ cos.} L' \text{ sin.} B'}.$$

Nous remarquerons que l'angle M est égal à la longitude héliocentrique de la Comète, que nous avons déterminée (§. 47).

(52.) Lorsque l'on connoîtra la longitude du nœud ascendant sur l'Écliptique, il sera facile de déterminer la longitude

du

du périhélie. En effet, nous avons déterminé *(§. 48)* la distance du périhélie de la Comète à son nœud, comptée sur l'orbite & prise dans le sens du mouvement de la Comète. On ajoutera cette distance à la longitude du nœud ascendant, si la Comète est directe; on soustraira cette distance de la longitude du nœud ascendant, si la Comète est rétrograde; & l'on aura ce que l'on appelle la *longitude du périhélie.*

(53.) Dans l'équation (2) du *§. 51*, l'expression de sin. $(\zeta - M)$ appartient à deux angles, & il ne paroît d'abord aucune raison pour exclure l'un de ces angles. Si cependant l'on fait réflexion que l'une des deux latitudes géocentriques de la Comète n'entre point dans la formule qui détermine la position du nœud, on verra que les deux angles ne satisfont point astronomiquement au Problème; & l'on ne sera point embarrassé sur le choix. On exclura celui des deux angles qui supposeroit, par exemple, que la seconde latitude géocentrique seroit plus grande que la première, tandis que les observations la donneroient plus petite; & réciproquement.

Examen de ce qui a lieu lorsque l'on combine une Observation éloignée avec les premières Observations.

(54.) Par les méthodes précédentes, nous avons déterminé les élémens qui représentent les premières observations; & ces élémens ne peuvent manquer, par la manière dont ils sont déduits, de convenir à peu-près à la véritable parabole; il s'agit maintenant de vérifier si ces élémens satisfont à une observation éloignée.

Pour y parvenir, on remarquera que relativement à cette observation éloignée, l'on a toutes les mêmes équations qui ont lieu pour les premières observations; l'on a donc, les équations suivantes,

(1) $R''''^2 = T''''^2 + \Delta''''^2 - 2\Delta'''' T'''' \text{ cos. } L'''' \text{ cos. } (B'''' - A'''')$;

(2) $R'''' \text{ sin. } u'''' \text{ sin. } I - \Delta'''' \text{ sin. } L'''' = 0$;

(3) $R'''' \text{ sin. } u'''' \text{ cos. } I + T'''' \text{ sin. } (A'''' - \zeta) - \Delta'''' \text{ cos. } L'''' \text{ sin. } (B'''' - \zeta) = 0.$

Dans ces équations, I & ζ sont des quantités connues, puisqu'elles ont été déterminées précédemment; de plus, les angles A'''', B'''', L'''' & le rayon T'''' dépendent de la dernière observation.

Des équations (2) & (3), l'on tire

$$(4)\ \Delta'''' \text{ fin. } L'''' \text{ cotang. } I + T'''' \text{ fin. } (A'''' - \zeta) - \Delta'''' \text{ cof. } L'''' \text{ fin. } (B'''' - \zeta) = 0;$$

on déterminera donc Δ'''' au moyen de cette dernière équation, & l'on connoîtra R'''' au moyen de l'équation (1).

(55.) L'équation (4) du *paragraphe précédent*, renferme la latitude & la longitude de la Comète à l'instant de la dernière observation. On sait cependant qu'un seul de ces élémens doit déterminer le rayon vecteur de la Comète, & sa distance à la Terre, de sorte que l'équation (4) introduit dans le Problème plus de conditions qu'il n'est nécessaire; il est vrai que si les observations sont exactes, cette condition superflue ne présente aucun inconvénient. Quoi qu'il en soit, je vais donner les formules qui résoudront la question en n'employant qu'une des deux observations.

Fig. 3. Pour parvenir à ce but, je remarque que l'angle tTC' est égal à la longitude géocentrique de la Comète moins la longitude du nœud; cet angle est donc égal à $B'''' - \zeta$. De plus, à cause du triangle tTC' rectangle en t,

$$Tt \text{ tang. } (tTC') - C't = 0;$$

donc $\quad Tt \text{ tang. } (B'''' - \zeta) - C't = 0;$

mais (§. 50)

$$C't = T'''' \text{ fin. } (A'''' - \zeta) + R'''' \text{ fin. } u'''' \text{ cof. } I.$$

De plus, $\quad Tt = MS + Sm;$

$$MS = R'''' \text{ cof. } u''''; \ Sm = T'''' \text{ cof. } (A'''' - \zeta);$$

donc $Tt = R'''' \text{ cof. } u'''' + T'''' \text{ cof. } (A'''' - \zeta);$

donc

$$[R'''' \cos. u'''' + T'''' \cos. (A'''' - \zeta)] \text{ tang. } (B'''' - \zeta) - T'''' \sin. (A'''' - \zeta) - R'''' \sin. u'''' \cos. I = 0.$$

Mais $\text{tang. } (B'''' - \zeta) = \frac{\sin. (B'''' - \zeta)}{\text{coſin. } (B'''' - \zeta)}$; donc

$$R''''[\cos. u'''' \sin. (B'''' - \zeta) - \sin. u'''' \cos. I \cos. (B'''' - \zeta)] + T''''[\cos. (A'''' - \zeta) \sin. (B'''' - \zeta) - \sin. (A'''' - \zeta) \cos. (B'''' - \zeta)] = 0.$$

De plus,

$$\cos. (A'''' - \zeta) \sin. (B'''' - \zeta) - \sin. (A'''' - \zeta) \cos. (B'''' - \zeta) = \sin. (B'''' - A'''');$$

donc

$$(1)\ R''''[\cos. u'''' \sin. (B'''' - \zeta) - \sin. u'''' \cos. I \cos. (B'''' - \zeta)] + T'''' \sin. (B'''' - A'''') = 0.$$

D'ailleurs,

$$(2)\ R''''[1 + \cos. (u'''' - \Omega)] - 2D = 0;$$

donc $$R'''' = \frac{2D}{1 + \cos. \Omega \cos. u'''' + \sin. \Omega \sin. u''''}.$$

Donc enfin, ſi l'on nomme

M un angle tel que l'on ait $(3)\ \text{tang. } M = \frac{2D \sin. (B'''' - \zeta) + T'''' \sin. (B'''' - A'''') \cos. \Omega}{2D \cos. I \cos. (B'''' - \zeta) - T'''' \sin. (B'''' - A'''') \sin. \Omega}$;

l'on aura

$$(4)\ \sin. (u'''' - M) = \frac{T'''' \sin. (B'''' - A'''') \sin. M}{2D \sin. (B'''' - \zeta) + T'''' \cos. \Omega \sin. (B'''' - A'''')}.$$

L'on connoîtra donc la valeur de u'''', d'où l'on conclura la valeur de R'''', au moyen de l'équation (1).

(56.) L'équation précédente donne deux valeurs de u''''; on ne peut jamais être embarraſſé ſur le choix de ces valeurs; on prendra celle qui rend nulle l'équation (2) du §. 54; on ſent aiſément la raiſon de ce procédé. En effet, la dernière équation que nous avons réſolue étant indépendante de la latitude de la Comète, appartient indifféremment aux

deux cas de la latitude auſtrale & de la latitude boréale : il faut donc une nouvelle conſidération pour exclure l'une des deux ſolutions.

(57.) Si toutes les obſervations dont on a fait uſage dans le cours de ces calculs, étoient également exactes, la valeur de R''' déduite par la méthode précédente, ſeroit égale à celle que l'on conclut des équations du ſ. 54; mais s'il s'eſt gliſſé quelqu'inexactitude dans ces obſervations, les deux équations ne peuvent pas être à la fois rigoureuſement ſatisfaites : la comparaiſon des deux réſultats apprendra donc quelle foi l'on doit ajouter aux obſervations.

(58.) Indépendamment des méthodes précédentes, on peut déterminer la diſtance de la Comète à la Terre, lors de la dernière obſervation, par la formule du ſ. 24.

Comme dans les recherches ſuivantes, je ne conſidérerai plus que trois obſervations, 1.° la première de toutes les obſervations; 2.° celle qui réſulte de la comparaiſon des obſervations prochaines (ſ. 31); 3.° l'obſervation éloignée dont il vient d'être queſtion; pour éviter la multiplicité des accens, je nommerai

R', Δ' T', A', B', L',	&c.	les quantités relatives à la première obſervation ;
R'', Δ'', T'', A'', B'', L'',	&c.	les quantités relatives à la ſeconde obſervation ; c'eſt-à-dire à celle qui réſulte de la comparaiſon des obſervations prochaines, & que je laiſſe dans le calcul ;
R''', Δ''', T''', A''', B''', L''',	&c.	les quantités relatives à la troiſième obſervation éloignée.

On déterminera donc facilement la diſtance de la Comète à la Terre, correſpondante à la dernière obſervation, au moyen de l'équation ſuivante (ſ. 24),

$$(1)\quad \Delta''' = \frac{D'\Delta'\Delta'' - G\Delta' - H\Delta''}{C\Delta'\Delta'' - E'\Delta' - F\Delta'' + K}.$$

Cette manière de déterminer les distances de la Comète à la Terre, a l'avantage de rendre nulles les équations de la forme de celles du §. 24.

Détermination des véritables élémens de la Comète.

(59.) Les élémens déduits des calculs précédens, ne peuvent manquer d'être approchés; mais il est très-probable qu'ils ne sont point rigoureusement exacts; il faut donc d'abord s'assurer de la légitimité des premières suppositions.

Si l'on nomme

D la distance périhélie de la Comète,

R', Δ', T', A', B', L', &c. les quantités relatives à la première observation,

R'', Δ'', T'', A'', B'', L'', &c. les quantités relatives à la seconde observation,

R''', Δ''', T''', A''', B''', L''', &c. les quantités relatives à la troisième observation,

t le nombre de minutes de temps écoulées entre la première & la seconde observation,

t' le nombre de minutes écoulées entre la seconde & la troisième observation,

τ le nombre de minutes que l'on conclut de l'équation suivante,

$$(1)\ \tau = [(R''+2D)\sqrt{(R''-D)} \mp (R'+2D)\sqrt{(R'-D)}]\,\frac{157846'\tfrac{1}{3}}{4r^{\frac{3}{2}}},$$

τ' le nombre de minutes que l'on conclut de l'équation suivante,

$$(2)\ \tau' = [(R'''+2D)\sqrt{(R'''-D)} \mp (R''+2D)\sqrt{(R''-D)}]\,\frac{157846'\tfrac{1}{3}}{4r^{\frac{3}{2}}},$$

les déterminations ne seront rigoureuses qu'autant que l'on aura $\tau = t$, $\tau' = t'$. Dans tout autre cas, les élémens ne seront qu'approchés; il est alors nécessaire d'avoir une méthode pour parvenir à la connoissance des véritables élémens.

Nous avons vu, *§. 9*, ce que signifient les deux suites de signes; je ne répéterai point ce que j'ai dit à ce sujet.

(60.) Puisque l'on connoît à peu-près les valeurs de D, R', R'', R'''; si l'on différencie les équations (1) & (2) du *paragraphe précédent*, & que l'on suppose

$$(1)\ d\tau = t - \tau; \qquad (2)\ d\tau' = t' - \tau';$$

il est évident que l'on aura les relations entre les quantités dD, dR', dR'', dR''', $d\tau$, $d\tau'$, qui satisfont au Problème. Soit donc

$$a = \pm \frac{R' \sqrt{(R'' - D)}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$a' = \pm \frac{R'' \sqrt{(R''' - D)}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$b = - \frac{R'' \sqrt{(R' - D)}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$b' = - \frac{R''' \sqrt{(R'' - D)}}{r^{\frac{4}{2}}};$$

$$c = - \frac{(R'' - 2D)\sqrt{(R' - D)} \mp (R' - 2D)\sqrt{(R'' - D)}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$c' = - \frac{(R''' - 2D)\sqrt{(R'' - D)} \mp (R'' - 2D)\sqrt{(R''' - D)}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\ \frac{4\sqrt{(R' - D)}\sqrt{(R'' - D)}}{157846'\frac{1}{3}}$$

$$\varepsilon' = \frac{2}{3}\ \frac{4\sqrt{(R'' - D)}\sqrt{(R''' - D)}}{157846'\frac{1}{3}};$$

l'on aura

$$(3)\ a\,dR' + b\,dR'' + c\,dD + \varepsilon\,r\,d\tau = 0,$$
$$(4)\ a'\,dR'' + b'\,dR''' + c'\,dD + \varepsilon'\,r\,d\tau' = 0.$$

L'équation (3) résulte de la comparaison du véritable temps écoulé entre les deux premières observations, & celui que l'on détermine par l'équation (1) du *§. 59*; l'équation (4)

résulte de la comparaison du véritable temps écoulé entre la seconde & la troisième observation, & celui que l'on détermine par l'équation (2) du ʃ. 59.

Les valeurs de a & de c, de a' & de c', ont un double signe; on emploîra les signes supérieurs, lorsque dans l'intervalle des deux observations que l'on combine, la Comète n'aura point passé par le périhélie ; on emploîra les signes inférieurs dans le cas contraire.

(61.) Des équations (3) & (4) du ʃ. 60, l'on tire

$$(1)\ a c' dR' + (bc' - a'c) dR'' - b'c\, dR''' + \varepsilon c' r\, d\tau - \varepsilon' c r\, d\tau' = 0.$$

Mais si l'on conserve les définitions de m', m'', m''' du ʃ. 39, l'on a

$$dR' = \frac{m' d\Delta'}{R'};\quad dR'' = \frac{m'' d\Delta''}{R''};\quad dR''' = \frac{m''' d\Delta'''}{R'''};$$

donc

$$(2)\ \frac{a c' m'}{R'} d\Delta' + (bc' - a'c)\frac{m'' d\Delta''}{R''} - \frac{b'c\, m''' d\Delta'''}{R'''} + \varepsilon c' r\, d\tau - \varepsilon' c r\, d\tau' = 0.$$

Cette équation est une de celles qu'il faut satisfaire pour avoir les véritables élémens; il n'est plus question maintenant que d'avoir les relations entre $d\Delta'$, $d\Delta''$, $d\Delta'''$.

(62.) Pour avoir la relation entre $d\Delta'$ & $d\Delta''$, je fais usage de l'équation (3) du ʃ. 38, dans laquelle je change Δ''', R''', A''', B''', L''', T''' en Δ'', R'', A'', B'', L'', T'', &c; j'ai donc

$$(1)\ (\Delta' - f\Delta'' - g)\, d\Delta' + (\Delta'' - f\Delta' - g')\, d\Delta'' + h\, dR' + h\, dR'' - \gamma' = 0;$$

mais $\quad dR' = \dfrac{m' d\Delta'}{R'};\qquad dR'' = \dfrac{m'' d\Delta''}{R''};$

donc, si l'on suppose

$$M = \Delta' - f\Delta'' - g + \frac{m' h}{R'},$$

$$M' = \Delta'' - f\Delta' - g' + \frac{m'' h}{R''},$$

l'on aura

$$(2)\ M\, d\Delta' + M'\, d\Delta'' - \gamma' = 0.$$

Quant à la relation entre $d\Delta'''$ & $d\Delta'$, je la tirerai de

l'équation (2) du §. 28, dans laquelle je supposerai

$$d\Delta'' = -\frac{M}{M'}\,d\Delta' + \frac{\gamma'}{M'}.$$

Si donc l'on suppose

$$\begin{aligned} l &= C\Delta'\Delta'' - E'\Delta' - F\Delta'' + K, \\ \lambda &= C\Delta''\Delta''' - E'\Delta''' - D'\Delta'' + G, \\ \lambda' &= C\Delta'\Delta''' - F\Delta''' - D'\Delta' + H, \end{aligned}$$

l'on aura

$$(3)\quad l\,d\Delta''' + \left(\lambda - \frac{\lambda' M}{M'}\right) d\Delta' + \frac{\lambda'\gamma'}{M'} - \alpha = 0.$$

Il est superflu d'avertir que si les équations (1) des §§. 24 & 38, étoient satisfaites, par les suppositions particulières, sur Δ', Δ'', Δ'''; R', R'', R''', &c. les quantités γ' & α disparoîtroient dans les résultats.

(63.) Maintenant si l'on substitue ces valeurs de $d\Delta''$ & de $d\Delta'''$ dans l'équation (2) du §. 61, elle deviendra

$$(1)\quad \left[\frac{ac'm'}{R'} - (bc' - a'c)\frac{Mm''}{M'R''} + \frac{b'cm'''}{lR'''}\left(\lambda - \frac{\lambda' M}{M'}\right)\right] d\Delta'$$
$$+ (bc' - a'c)\frac{\gamma' m''}{M'R''} + \frac{b'cm'''}{lR'''}\left(\frac{\lambda'\gamma'}{M'} - \alpha\right) + \varepsilon c' r\,d\tau - \varepsilon' c r\,d\tau' = 0;$$

& le Problème est résolu. En effet, si l'on nomme

∂', ∂'', ∂''', ρ', ρ'', ρ''' les trois distances de la Terre à la Comète, & les trois rayons vecteurs trouvés précédemment, que l'on ne doit plus regarder que comme des approximations,

Δ', Δ'', Δ''', R', R'', R''' les trois véritables distances de la Terre à la Comète, & les trois véritables rayons vecteurs,

l'on aura

$$(2)\quad \Delta' = \partial' + d\Delta';$$

$$(3)\quad \Delta'' = \partial'' - \frac{M}{M'}\,d\Delta' + \frac{\gamma'}{M'};$$

$$(4)\quad \Delta''' = \partial''' - \left\{\frac{\lambda - \frac{\lambda' M}{M'}}{l}\right\} d\Delta' - \frac{\lambda'\gamma'}{lM'} + \frac{\alpha}{l};$$

$$(5)\ R' = \rho' + \frac{m'\,d\Delta'}{\rho'};$$

$$(6)\ R'' = \rho'' - \frac{m''}{\rho''}\,\frac{M}{M'}\,d\Delta' + \frac{m'}{\rho''}\,\frac{\gamma'}{M'};$$

$$(7)\ R''' = \rho''' - \frac{m''}{l\rho'''}\,(\lambda - \frac{\lambda' M}{M'})\,d\Delta' - \frac{m''}{l\rho'''}\,(\frac{\lambda'\gamma'}{M'} - \alpha).$$

& comme $d\Delta'$ eſt connu par la première équation, on connoîtra les trois véritables diſtances de la Comète à la Terre, & les trois rayons vecteurs correſpondans aux trois obſervations.

(64.) On connoîtra pareillement la véritable diſtance périhélie, au moyen de l'équation ſuivante,

$$(6)\ D = \delta - (\frac{a}{c}\,\frac{m'}{\rho'} - \frac{b\,m''\,M}{c\,\rho''\,M'})\,d\Delta' - \frac{b\,m''\,\gamma'}{c\,\rho''\,M'} - \frac{\varepsilon\,r\,d\tau}{c}.$$

Dans cette équation,

δ eſt l'ancienne expreſſion de la diſtance périhélie.

Cette équation ſe conclut facilement de l'équation (1) du §. 60, dans laquelle on a ſubſtitué à dR' & à dR'' leurs valeurs en $d\Delta'$.

(65.) La détermination des véritables élémens n'a plus aucune difficulté; la diſtance en temps de la première obſervation au paſſage par le périhélie, ſera donnée par l'équation (6) du §. 44; l'inclinaiſon du plan de l'orbite de la Comète ſur l'Écliptique, & la diſtance du périhélie de la Comète au nœud aſcendant, comptée ſur l'Écliptique, ſeront données par les équations (8) & (1) des §§. 48 & 49; on pourra même ſe paſſer de l'équation (1) du §. 17 pour déterminer l'angle N, que l'on fera réſulter, ſi l'on veut, de la différence des angles v'', v', calculés par les équations ſuivantes,

$$(1)\ R'\,(1 + \text{cof.}\,v') - 2D = 0;$$

$$(2)\ R''\,(1 + \text{cof.}\,v'') - 2D = 0.$$

On déterminera enfin la longitude du nœud aſcendant de la Comète, par les équations du §. 51.

(66.) Dans ces dernières recherches, pour avoir la relation entre $d\Delta'$ & $d\Delta''$, j'ai comparé la première & la seconde obſervation, & j'y ai appliqué l'équation (3) du *ſ. 38;* dans les premières recherches, au contraire, j'ai appliqué la même analyſe à la première & à la troiſième obſervation. J'ai cru devoir faire cette permutation. En effet, l'équation du *ſ. 38*, quoique précise dans un grand intervalle de temps, n'eſt pas abſolument rigoureuſe; ſi donc l'intervalle entre la première & la dernière obſervation, eſt conſidérable, ainſi qu'on peut le ſuppoſer dans les dernières recherches, il a été à propos d'appliquer l'équation du *ſ. 38* à des intervalles moins conſidérables, c'eſt-à-dire à la première & à la ſeconde obſervation. Dans nos premières recherches, au contraire, comme les rapports des diſtances de la Comète à la Terre, exigeoient que les intervalles entre les obſervations ne fuſſent pas très-longs, & que d'ailleurs il falloit éviter, autant qu'il étoit poſſible, d'avoir à conclure de très-grandes quantités, par la comparaiſon de petits élémens, j'ai cru devoir préférer de comparer entr'elles la première & la troiſième obſervation.

De l'influence des Erreurs des Obſervations ſur les Réſultats.

(67.) Il eſt poſſible que les obſervations ne ſoient pas rigoureuſement exactes; & l'on peut demander l'influence des erreurs des obſervations ſur les réſultats. Rien n'eſt plus ſimple que ce Problème; il ſe réſout par l'équation (1) du *ſ. 30.*

Détermination de la latitude & de la longitude géocentriques de la Comète à un inſtant quelconque, lorſque l'on connoît les Élémens.

(68.) La détermination de la latitude & de la longitude géocentriques de la Comète à un inſtant quelconque, ne préſente aucune difficulté, lorſque l'on connoît les élémens. Je vais terminer ce qui regarde le calcul des Comètes dans la parabole, par l'application de mes formules à ces queſtions.

Nous appellerons

R' le rayon vecteur de la Comète à l'instant dont il s'agit;

v' l'anomalie de la Comète à cet instant;

Δ' la distance de la Comète à la Terre;

A' la longitude du Soleil;

T' le rayon vecteur de la Terre;

ζ la longitude du nœud ascendant;

I l'inclinaison de l'orbite;

D la distance périhélie;

Ω la distance du périhélie de la Comète au nœud ascendant, comptée sur le plan de l'orbite de la Comète, en suivant le sens du mouvement de la Comète;

u' l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds; cet angle est compté sur le plan de l'orbite, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de la Comète;

B' la longitude géocentrique de la Comète qu'il s'agit de déterminer;

L' la latitude géocentrique;

X le nombre de minutes écoulées depuis le passage de la Comète par son périhélie.

(69.) Il suit des constructions du §. 55, que l'on a l'équation suivante,

$$(1)\; R'\,[\text{cos.}\,u'\,\text{sin.}\,(B'-\zeta) - \text{sin.}\,u'\,\text{cos.}\,I\,\text{cos.}\,(B'-\zeta)] + T'\,\text{sin.}\,(B'-A') = 0;$$

mais

$$\text{sin.}\,(B'-\zeta) = \text{sin.}\,B'\,\text{cos.}\,\zeta - \text{cos.}\,B'\,\text{sin.}\,\zeta;$$
$$\text{cos.}\,(B'-\zeta) = \text{cos.}\,B'\,\text{cos.}\,\zeta + \text{sin.}\,B'\,\text{sin.}\,\zeta;$$
$$\text{sin.}\,(B'-A') = \text{sin.}\,B'\,\text{cos.}\,A' - \text{cos.}\,B'\,\text{sin.}\,A';$$

donc

$$(2)\; \text{tang.}\,B' = \frac{R'\,(\text{cos.}\,u'\,\text{sin.}\,\zeta + \text{sin.}\,u'\,\text{cos.}\,I\,\text{cos.}\,\zeta) + T'\,\text{sin.}\,A'}{R'\,(\text{cos.}\,u'\,\text{cos.}\,\zeta - \text{sin.}\,u'\,\text{cos.}\,I\,\text{sin.}\,\zeta) + T'\,\text{cos.}\,A'};$$

on connoîtra donc la longitude demandée, lorsque l'on aura déterminé R' & u'.

(70.) On connoîtra pareillement la latitude demandée. En effet, il suit des §§. 49 & 50, que l'on a les équations suivantes,

$$R' \text{ fin. } u' \text{ fin. } I - \Delta' \text{ fin. } L' = 0 ;$$

$$R' \text{ fin. } u' \text{ cof. } I + T' \text{ fin. } (A' - \zeta) - \Delta' \text{ cof. } L' \text{ fin. } (B' - \zeta) = 0.$$

Si dans ces équations, l'on élimine la quantité Δ', l'on aura

$$(1) \quad \text{tang. } L' = \frac{R' \text{ fin. } u' \text{ fin. } I \text{ fin. } (B' - \zeta)}{R' \text{ fin. } u' \text{ cof. } I + T' \text{ fin. } (A' - \zeta)}.$$

Quant à la distance de la Comète à la Terre, on la déterminera par l'équation suivante,

$$(2) \quad \Delta' = \frac{R' \text{ fin. } u' \text{ fin. } I}{\text{fin. } L'}.$$

Dans l'usage de ces formules, les angles A', B', ζ, sont comptés depuis 0^d jusqu'à 360^d, à commencer du premier point d'*Ariès ;* l'angle u' est compté sur le plan de l'orbite de la Comète, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de cet Astrè; fin. I est toujours positif; mais cof. I est négatif si la Comète est rétrograde; enfin, tang. L' négative indique que la latitude de la Comète est australe.

Il ne s'agit plus maintenant que de déterminer l'angle u' & le rayon vecteur R'.

(71.) Pour déterminer maintenant l'angle u' & le rayon vecteur R', je remarque que l'on a [*§. 48, équation (9)*]

$$(1) \quad u' - \Omega - v' = 0 ;$$

l'on connoîtra donc u' lorsque l'on aura déterminé v'.

Nous avons vu [*§. 44, équations (1) & (6)*] que

$$(2) \quad R' (1 + \text{cof. } v') - 2 D = 0,$$

$$(3) \quad X = (R' + 2 D) \sqrt{(R' - D)} \, \frac{157846' \frac{1}{7}}{4 r^{\frac{3}{2}}}.$$

Au moyen de cette dernière équation, dans laquelle tout est connu, à l'exception de R', on déterminera facilement R', par la résolution d'une équation du troisième degré. En

effet, si l'on suppose $\sqrt{(R' - D)} = y$, l'équation (3) deviendra

$$(4)\ y^3 + 3Dy - \frac{4r^{\frac{3}{2}}X}{157846'\frac{1}{2}} = 0.$$

L'on déterminera ensuite l'angle v' au moyen de l'équation (2), l'angle u' au moyen de l'équation (1), & les questions proposées seront résolues.

Nous remarquerons ici, que l'équation (4) conduit facilement à l'équation connue,

$$(5)\ \text{tang.}^3 \frac{v'}{2} + 3\ \text{tang.} \frac{v'}{2} - \frac{4r^{\frac{3}{2}}}{D^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{X}{157846'\frac{1}{2}} = 0.$$

En effet, puisque $1 + \text{cos.}\, v' = 2\,\text{cos.}^2 \frac{v'}{2}$, l'équation (2) devient

$$(6)\ R' \text{cos.}^2 \frac{v'}{2} - D = 0;$$

donc

$$y = \sqrt{(R' - D)} = D^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{(1 - \text{cos.}^2 \frac{v'}{2})}}{\text{cos.} \frac{v'}{2}} = \frac{D^{\frac{1}{2}} \text{sin.} \frac{v'}{2}}{\text{cos.} \frac{v'}{2}} = D^{\frac{1}{2}} \text{tang.} \frac{v'}{2};$$

l'équation (5) est donc démontrée.

(72.) On peut s'épargner la résolution de l'équation (5) du §. 71, au moyen de la Table connue en Astronomie, sous le nom de *Table générale du mouvement des Comètes*, & qui se trouve dans l'Astronomie de M. de la Lande, *IIIe Volume, page 335*. Au moyen de cette Table, on trouvera facilement l'anomalie v' d'une Comète, lorsque l'on connoîtra le temps écoulé depuis son passage par le périhélie; l'on conclura ensuite R' par le moyen de l'équation (2) du *paragraphe précédent*, & la valeur de u' au moyen de l'équation (1) du même paragraphe. On pourra même s'assurer si la Table ne renferme point quelqu'inexactitude, en reportant dans l'équation (5) la valeur de $\text{tang.} \frac{v'}{2}$ trouvée précédemment.

Si l'équation eſt ſatisfaite, les calculs ſont exacts. Si l'équation n'eſt pas ſatisfaite; comme on ne peut manquer d'être très-près de la ſolution, on trouvera facilement la véritable valeur qui ſatisfait à la queſtion. En effet, ſi l'on nomme

v l'angle conclu de la Table générale du mouvement des Comètes,

dv l'erreur ſur l'angle exprimée en ſecondes de degré,

x le nombre de minutes que l'on conclut de l'équation (5) en y ſubſtituant la tangente de l'angle $\frac{v}{2}$ déduit de la Table générale du mouvement des Comètes,

X le véritable nombre de minutes écoulées depuis le paſſage par le périhélie juſqu'à l'inſtant pour lequel on calcule,

on aura

$$(1)\ v' = v + dv,$$

dv ayant d'ailleurs pour expreſſion,

$$(2)\ dv = \frac{8\,r^{\frac{1}{2}}}{3\,D^{\frac{1}{2}}}\ \text{coſ.}^4\ \frac{v}{2}\ \frac{(X - x)}{157846'\frac{1}{7}}\ 206265''.$$

Sur un cas particulier où le Problème rigoureux ſe réſout ſans faire uſage des rapports des §§. 31 & ſuivans, *& ſans néanmoins employer des équations d'un degré ſupérieur au quatrième.*

(73.) Je dois parler ici d'un cas ſingulier, lorſque duquel le Problème général ſe réſout rigoureuſement, ſans faire uſage des rapports des *§§. 31 & ſuivans*, & ſans employer des équations d'un degré ſupérieur au quatrième; c'eſt celui où la Comète auroit été obſervée dans les deux nœuds. En voici l'analyſe, d'après mes formules.

Soit

R' le rayon vecteur, lors de la première obſervation;

v' l'anomalie de la Comète;

A' la longitude du Soleil;

B' la longitude géocentrique de la Comète ;

T' le rayon vecteur de la Terre ;

R'' le rayon vecteur, lors de la seconde observation ;

v'' l'anomalie de la Comète ;

A'' la longitude du Soleil ;

B'' la longitude géocentrique de la Comète ;

T'' le rayon vecteur de la Terre ;

ζ la longitude du nœud ascendant ;

I l'inclinaison de l'orbite ;

t le nombre de minutes écoulées entre les deux observations ;

D la distance périhélie ;

r la distance moyenne du Soleil à la Terre.

Il suit de nos recherches, que l'on a les équations suivantes,

$$(1)\quad R'(1 + \text{cos.}\, v') - 2D = 0,$$

$$(2)\quad R''(1 + \text{cos.}\, v'') - 2D = 0,$$

$$(3)\quad t = [(R'' + 2D)\sqrt{(R'' - D)} + (R' + 2D)\sqrt{(R' - D)}]\, \frac{157848''\frac{1}{2}}{4r^{\frac{3}{2}}}$$

$$(4)\quad \pm R'\, \text{fin.}\,(B' - \zeta) + T'\, \text{fin.}\,(B' - A') = 0,$$

$$(5)\quad \mp R''\, \text{fin.}\,(B'' - \zeta) + T''\, \text{fin.}\,(B'' - A'') = 0.$$

Dans l'équation (3) j'ai mis le signe *plus*, parce que dans l'intervalle des deux observations, la Comète a essentiellement passé par le périhélie. Quant aux équations (4) & (5), elles ne sont autre chose que des équations semblables à l'équation (1) du §. 55 ; en observant toutefois, que dans ces équations, la condition des observations faites dans les nœuds, a nécessité celle de $\text{fin.}\, u = 0$, & celle de $\text{cos.}\, u = \pm 1$; c'est-à-dire $\text{cos.}\, u = 1$ pour l'une des observations, celle qui a eu lieu dans le nœud ascendant, & $\text{cos.}\, u = -1$ pour l'observation qui a eu lieu dans le nœud descendant. Au reste, on ne peut jamais être embarrassé sur le choix des signes, car l'on sait toujours laquelle de la première ou de la seconde observation a été faite dans le nœud ascendant.

(74.) Je reprends les équations (1) & (2) du §. 73, & je remarque, qu'attendu que les anomalies de la Comète diffèrent de 180 degrés lors des deux observations, l'on a $\text{cos.}\, v'' = -\text{cos.}\, v'$; donc

$$(1)\quad R' - R'' + (R' + R'')\,\text{cos.}\, v' = 0.$$

Je substitue cette valeur de $\text{cos.}\, v'$ dans l'équation (1) du §. 73, & j'en tire

$$(2)\quad D = \frac{R'\,R''}{R' + R''}.$$

Je substitue cette valeur de D dans l'équation (3) du §. 73, &, à cause de

$$(R' + 2D)\,\surd(R' - D) = \frac{R'^3 + 3R'^2 R''}{(R' + R'')^{\frac{1}{2}}},$$

$$(R'' + 2D)\,\surd(R'' - D) = \frac{R''^3 + 3R''^2 R'}{(R' + R'')^{\frac{1}{2}}},$$

& par conséquent de

$$(R' + 2D)\,\surd(R' - D) + (R'' + 2D)\,\surd(R'' - D) = (R' + R'')^{\frac{5}{2}},$$

j'ai $\qquad R' + R'' = r\left(\frac{4'}{157846'\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{5}}$;

donc si l'on suppose

$$M = r\left(\frac{4'}{157846'\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{5}},$$

l'on aura

$$(3)\quad R' + R'' - M = 0.$$

(75.) Je reprends les équations (4) & (5) du §. 73, & j'en tire

$$R' = \mp \frac{T'\,\text{sin.}\,(B' - A')}{\text{sin.}\,(B' - \zeta)},\quad R'' = \pm \frac{T''\,\text{sin.}\,(B'' - A'')}{\text{sin.}\,(B'' - \zeta)};$$

donc

$$(1)\quad R' + R'' = \mp \frac{T'\,\text{sin.}\,(B' - A')}{\text{sin.}\,(B' - \zeta)} \pm \frac{T''\,\text{sin.}\,(B'' - A'')}{\text{sin.}\,(B'' - \zeta)};$$

donc enfin

$$(2)\quad M\,\text{sin.}\,(B' - \zeta)\,\text{sin.}\,(B'' - \zeta) \pm T'\,\text{sin.}\,(B' - A')\,\text{sin.}\,(B'' - \zeta)$$
$$\mp T''\,\text{sin.}\,(B'' - A'')\,\text{sin.}\,(B' - \zeta) = 0.$$

Soit

Soit maintenant

b la différence des angles B'', B', de sorte que l'on ait $B'' = B' + b$;

l'équation (2) deviendra

$$(3)\ M \text{ fin. } (B' - \zeta) \text{ fin. } (B' - \zeta + b) \pm T' \text{ fin. } (B' - A') \text{ fin. } (B' - \zeta + b) \mp T'' \text{ fin. } (B'' - A'') \text{ fin. } (B' - \zeta) = 0.$$

Mais

$$\text{fin. } (B' - \zeta + b) = \text{fin. } (B' - \zeta) \text{ cof. } b + \text{cof. } (B' - \zeta) \text{ fin. } b;$$

donc enfin, en divisant l'équation par fin. $(B' - \zeta)$,

$$(4)\ M\ [\text{fin. } (B' - \zeta) \text{ cof. } b + \text{cof. } (B' - \zeta) \text{ fin. } b] \pm T' \text{ fin. } (B' - A') \text{ fin. } b \text{ cotangente } (B' - \zeta) \pm T' \text{ fin. } (B' - A') \text{ cof. } b \mp T'' \text{ fin. } (B'' - A'') = 0;$$

équation qui donnera la position du nœud. Lorsque cette position sera déterminée, on connoîtra facilement les rayons vecteurs correspondans aux observations, & en général tous les élémens de la Comète, à l'exception toutefois de l'inclinaison de l'orbite, qui ne pourra être déterminée que par une troisième observation. Dans les équations précédentes, la première suite de signes suppose que lors de la première observation, la Comète étoit dans son nœud ascendant; il faudroit employer la seconde suite si l'on étoit dans le cas contraire.

(76.) L'équation (4) du §. 75 paroît promettre quatre valeurs différentes, qui peuvent satisfaire au Problème, puisque cette équation est du quatrième degré; on pourroit donc penser, au premier coup-d'œil, que l'on a quatre paraboles; mais cette conclusion seroit précipitée. En effet, je vais faire voir que deux des valeurs données par l'équation (4) du §. 75 n'appartiennent point à la question, & que par conséquent, il n'y a que deux paraboles qui satisfassent aux deux premières observations.

Fig. 4. Pour y parvenir, ſoit Nn la ligne des nœuds; S le Soleil; N le lieu de la Comète, lors de la première obſervation; n le lieu de la Comète, lors de la ſeconde obſervation; T le lieu de la Terre, lors de la première obſervation; T' le lieu de la Terre, lors de la ſeconde obſervation; TN la direction du rayon viſuel, dans lequel la Comète eſt vue, lors de la première obſervation; $T'n$ la direction du rayon viſuel, lors de la ſeconde obſervation.

Il eſt évident, que d'après cette conſtruction, $SN = R'$, $Sn = R''$, & que $SN + Sn$ eſt une quantité connue; il eſt également évident, que ſi l'on ſuppoſoit un Obſervateur immobile placé au point t, interſection des lignes TN, $T'n$, cet Obſervateur rapporteroit la Comète aux mêmes points du Ciel, lors des deux obſervations, que l'Obſervateur placé ſur la Terre, & qui a paſſé de T en T'; on ſent également, qu'il eſt facile de déduire des obſervations, la poſition du point t, interſection des deux rayons viſuels, & l'angle Ntn de ces rayons. Le Problème ſe réduit donc à l'énoncé ſuivant.

Étant donnée ſur un plan, la poſition d'un point t, *par rapport à un point* S *pris ſur le même plan, & l'angle* Ntn *formé au point* t *par deux droites indéfinies* tN, tn; *déterminer quelle doit être la poſition des lignes* NSn, N'Sn', *paſſant par le point* S, *pour que les droites* Nn, Nn', *compriſes dans l'angle* Ntn, *ſoient égales à une quantité donnée!*

Or il eſt aiſé de démontrer qu'il n'y a que deux lignes qui ſatisfaſſent à la queſtion; il n'y a donc que deux paraboles qui puiſſent convenir aux deux premières obſervations, & il faudra une troiſième obſervation pour déterminer celle des deux paraboles qu'il conviendra de choiſir, ainſi que l'inclinaiſon du plan de l'orbite.

(77.) Il reſte maintenant à faire voir quel Problème ſe trouve réſolu par les autres racines de l'équation (4) du §. 75. Cette difficulté s'éclaircit facilement par les conſidérations du *paragraphe précédent.* En effet, nous avons

demandé à la Géométrie quelle devoit être la position des lignes NSn, $N'Sn'$, passant par le point S, & terminées par les droites indéfinies $T'tn$, TtN, pour que la partie Nn, $N'n'$, &c, de ces droites, interceptée entre les droites $T'tn$, TtN, fût égale à une quantité donnée? La Géométrie a donc dû donner la solution du Problème, soit que les parties Nn, $N'n'$ fussent comprises dans l'angle Ntn, soit qu'elles fussent comprises dans l'angle NtT', ou dans l'angle ntT. La Géométrie résout donc tous les cas, quoique l'Astronomie restreigne la question au cas particulier où les parties Nn, $N'n'$ sont comprises dans l'angle Ntn; au reste, on ne peut jamais être embarrassé sur le choix de ces valeurs. En effet, nous avons vu (§§. 74 & 75) que si l'on suppose Fig. 4.

$M = r\left(\frac{4\,t}{157846'\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$, l'on a $R' + R'' - M = 0$; que de plus, $R' = \mp \frac{T' \sin.(B' - A')}{\sin.(B' - \zeta)}$, $R'' = \pm \frac{T'' \sin.(B'' - A'')}{\sin.(B'' - \zeta)}$.

Les valeurs de ζ qui satisfont au Problème astronomique, sont donc celles qui, substituées dans les expressions corrélatives R' & de R'', donnent $R' + R'' = M$.

SECONDE PARTIE,

Dans laquelle l'on ne suppose pas que les orbites des Comètes sont paraboliques.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

(78.) On peut étendre les principes développés dans ce Mémoire, au cas où l'on ne supposeroit pas que les orbites des Comètes sont paraboliques; on verra que, sans compliquer infiniment le calcul, il est aisé d'appliquer aux observations, le calcul dans l'ellipse, & de chercher par-là à concilier des observations qui ne s'accorderoient pas dans l'hypothèse parabolique. Avant de passer au développement de la méthode, je commencerai par établir quelques propositions, dont je ferai usage par la suite.

Équation polaire à l'ellipse par rapport au foyer.

(79.) Soit

Fig. 5. β le demi-grand axe AC d'une ellipse;

F le foyer que je prends pour le pôle de l'ellipse;

C le centre;

E la distance FC du foyer au centre de l'ellipse;

$4D$ le paramètre du grand axe;

R le rayon vecteur FM;

v l'angle du rayon vecteur avec le grand axe; le point A correspondant à l'apside inférieure est l'origine de l'angle.

Si l'on prend une troisième proportionnelle CD à FC & AC, cette troisième proportionnelle, qui aura pour expression $\frac{\beta^2}{E}$, sera la distance DC de la directrice DE au centre C de l'ellipse. Par la propriété de l'ellipse, si d'un point M de la courbe l'on abaisse sur la ligne DE la perpendiculaire MH, on a toujours cette proportion, $MH:FM::AD:AF$. Si du même point M l'on abaisse sur AF la perpendiculaire MN, on aura, en vertu des constructions précédentes, $FN = R \operatorname{cof.} v$; d'ailleurs, $AF = AC - FC = \beta - E$; $AD = DC - AC = \frac{\beta^2}{E} - \beta$; mais $MH = AF + AD - FN$; donc $MH = \beta - E + \frac{\beta^2}{E} - \beta - R \operatorname{cof.} v = \frac{\beta^2 - E^2 - ER \operatorname{cof.} v}{E}$; donc la proportion $MH:FM::AD:AF$, donne $R(E \operatorname{cof.} v + \beta) - (\beta^2 - E^2) = 0$; mais $\frac{\beta^2 - E^2}{\beta} = 2D$, puisque, par la propriété de l'ellipse, $\sqrt{(\beta^2 - E^2)}$ = demi-petit axe, & que $4D$ est le paramètre du grand axe; on aura donc

$$(1)\quad R\left(1 + \frac{E}{\beta} \operatorname{cof.} v\right) - 2D = 0.$$

(80.) Si l'on cherche pareillement la distance FA du

foyer à l'apſide inférieure, on aura, en vertu des conſtructions précédentes, Fig. 5.

$$(1)\ FA = \frac{2D}{1 + \frac{E}{\beta}},$$

puiſqu'en effet FA eſt le rayon vecteur qui répond à coſ. $v = 1$.

De l'équation polaire aux ſections coniques par rapport au foyer.

(81.) Si l'on cherche l'équation polaire à l'hyperbole par rapport au foyer, on trouvera les mêmes équations que pour l'ellipſe ; on aura donc généralement

$$(1)\ R\left(1 + \frac{E}{\beta}\,\text{coſ.}\,v\right) - 2D = 0,$$

$$(2)\ FA = \frac{2\beta D}{\beta + E},$$

bien entendu que dans le cas de l'ellipſe, β ſurpaſſe E; dans le cas de la parabole, $\beta = E$; dans le cas de l'hyperbole, β eſt moindre que E.

Du temps que les Comètes emploient à décrire leurs trajectoires.

(82.) On ſait que dans toute trajectoire décrite en vertu d'une force centrale, les aires parcourues par le rayon vecteur ſont proportionnelles au temps employé à parcourir ces aires. Donc dans toute courbe, ſi l'on nomme

R le rayon vecteur,

v l'angle traverſé,

X le temps que nous ſuppoſerons exprimé en minutes,

X ſera proportionnel à $\int \frac{R^2 dv}{2}$, puiſque cette dernière expreſſion eſt celle de l'aire parcourue.

On démontre de plus, que si l'on nomme

ρ un coëfficient constant qu'il s'agira de déterminer,

$4D$ le paramètre de la trajectoire de la Planète attirée,

on aura, dans le cas de la force centrale en raison inverse du carté des distances,

$$(1)\ \rho X = \frac{1}{\sqrt{D}} \int \frac{R^2 dv}{2};$$

on connoîtra donc le nombre de minutes de temps employées par la Comète à parcourir ses différentes anomalies, lorsque l'on aura l'intégrale de $\frac{R^2 dv}{2}$, & que l'on connoîtra ρ.

(83.) Reprenons l'équation générale aux sections coniques, on aura, en différenciant cette équation,

$$(1)\ \frac{2DdR}{R} - \frac{E}{\beta} R \sin. v\, dv = 0.$$

De plus, à cause de l'équation (1) §. 81, & que d'ailleurs (§. 79) $\beta^2 - E^2 - 2\beta D = 0$, on aura

$$(2)\ \frac{E}{\beta} R \sin. v = 2\sqrt{D}\sqrt{(R - D - \frac{R^2}{2\beta})};$$

donc $$dv = \frac{D\,dR}{R\sqrt{D}\sqrt{(R - D - \frac{R^2}{2\beta})}}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (1) du §. 82, elle deviendra

$$(3)\ \rho X = \int \frac{R\,dR}{2\sqrt{(R - D - \frac{R^2}{2\beta})}};$$

donc, en intégrant,

$$(4)\ \rho X = \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \text{arc sin.} [\frac{R-\beta}{\sqrt{(\beta^2 - 2\beta D)}}] - \beta\sqrt{(R - D - \frac{R^2}{2\beta})} + \text{constante}.$$

Mais puisque $\beta^2 - E^2 - 2\beta D = 0$, $\sqrt{(\beta^2 - 2\beta D)} = E$; donc enfin

$$(5)\ \rho X = \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \text{arc sin.} (\frac{R-\beta}{E}) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \sqrt{(2\beta R - 2\beta D - R^2)} + \text{constante}.$$

Il ne s'agit que d'ajouter convenablement la conſtante.

(84.) Pour ajouter convenablement la conſtante, je remarque que ſi l'on veut que le temps X ſoit compté depuis le paſſage de la Comète par le périhélie, ce temps doit être nul lorſque le rayon vecteur eſt égal à la diſtance du foyer à l'apſide inférieure, c'eſt-à-dire, lorſque $R = \beta - E$; mais ſi dans l'équation (5) du *paragraphe précédent* l'on ſubſtitue $\beta - E$ à R, & que l'on ſuppoſe $X = 0$, l'on aura, à cauſe de $R = \beta - E$, & de $\beta^2 - 2\beta D - E^2 = 0$,

$$\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{\text{arc (ſin.} - 1)}{\text{ſin. total}} + \text{conſt.} = 0; \text{ donc conſt.} = \frac{-\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{\text{arc } 270^d}{\text{ſin. total}};$$

donc

$$(1)\ \rho X = \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\text{arc ſin.}\left[\left(\frac{R-\beta}{E}\right)\text{ſin. total}\right] - \text{arc } 270^d}{\text{ſin. total}} \right\}$$

$$- \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \sqrt{(2\beta R - 2\beta D - R^2)}.$$

Je remarque enfin, que ſi l'on nomme

ξ un arc dont le ſinus égale $\frac{R-\beta}{E} \times$ ſin. total, & qui ait par conſéquent pour expreſſion de ſon coſinus, $\frac{\sqrt{(2\beta R - 2\beta D - R^2)}}{E} \times$ ſinus total,

l'équation précédente deviendra

$$(2)\ \rho X = \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\text{arc } \xi - \text{arc } 270^d}{\text{ſin. total}}\right) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{E \text{ coſ. } \xi}{\text{ſin. total}}.$$

(85.) Arrêtons-nous un moment ſur l'uſage de cette dernière équation, & ſuivons une Comète pendant une révolution.

Lors du périhélie, $R = \beta - E$; ſin. $\xi = -1$; $\xi = 270^d$, coſ. $\xi = 0$.

Depuis le périhélie juſqu'à l'extrémité du petit axe, l'arc ξ doit être compris entre 270^d & 360^d, ſon coſinus eſt *poſitif.*

A l'extrémité du petit axe, $R = \beta$; l'arc $\xi = 360^d$; ſon coſinus $=$ ſin. total.

Depuis l'extrémité du petit axe juſqu'à l'aphélie, l'arc ξ eſt compris entre 360^d & $360^d + 90^d$; ſon coſinus eſt poſitif.

Lors de l'aphélie, l'arc ξ eſt de $360^d + 90^d$; ſon coſinus $= 0$.

Depuis l'extrémité du grand axe juſqu'à l'extrémité du petit axe dans la ſeconde branche de la trajectoire, l'arc ξ eſt compris entre $360^d + 90^d$ & $360^d + 180^d$; ſon coſinus eſt négatif.

A l'extrémité du petit axe, l'arc ξ eſt de $360^d + 180^d$; ſon coſinus $= -$ ſin. total.

Depuis l'extrémité du petit axe juſqu'au périhélie, l'arc ξ eſt compris entre $360^d + 180^d$ & $360^d + 270^d$; ſon coſinus eſt négatif.

Détermination du coëfficient ρ.

(86.) Les recherches précédentes fourniſſent un moyen facile d'évaluer la quantité ρ. En effet, appliquons l'équation (2) du §. 84 à la Terre; & nommons

r le demi-grand axe de l'orbite terreſtre.

Il eſt évident que ſi l'on ſuppoſe que la Terre ait fait une révolution entière depuis ſon périhélie, l'on aura $\rho X = \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{\text{arc } 360^d}{\text{ſin. total}}$; mais la révolution ſidérale de la Terre eſt de $365^j\ 6^h\ 9'\ 11''$, ou de $525969'\frac{1}{6}$; donc

$$(1)\ \rho = \frac{2 \times 355}{113 \times 525969'\frac{1}{6}\sqrt{2}}\ r^{\frac{3}{2}}.$$

Si l'on ſubſtitue cette valeur dans l'équation (2) du §. 84, elle deviendra

$$(2)\ rX = \frac{113 \times 525969'\frac{1}{6}}{2 \times 355}\left[\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\text{arc } \xi - \text{arc } 270^d}{\text{ſin. total}}\right) - \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} E \frac{\text{coſ. } \xi}{\text{ſin. total}}\right].$$

Au

(87.) Au moyen de la valeur de ρ du §. 86, combinée avec l'équation (1) du §. 82, on peut facilement déterminer le temps qu'une Comète dont la distance périhélie est égale à la moyenne distance du Soleil à la Terre, emploie à parcourir 90 degrés d'anomalie. Nous avons dit (§. 7) que ce temps égale $109^j\ 14^h\ 46'\frac{1}{3}$, ou $157846'\frac{1}{3}$; en voici la démonstration.

Si l'on substitue dans l'équation (1) du §. 82, la valeur de ρ du *paragraphe précédent*, elle deviendra

$$(1)\quad \frac{2 \times 355\ r^{\frac{3}{2}}}{113 \times 525969'\frac{1}{6}\sqrt{2}}\ X = \frac{1}{\sqrt{D}} \int \frac{R^2 dv}{2}.$$

Nous avons vu (§. 5) que, relativement à la parabole,

$$\int \frac{R^2 dv}{2} = \frac{1}{3} D^{\frac{1}{2}} (R + 2D) \sqrt{(R - D)};$$

l'équation (1) devient donc

$$(2)\quad \frac{2 \times 355 \times r^{\frac{3}{2}}}{113 \times 525969'\frac{1}{6}\sqrt{2}}\ X = \frac{1}{3} (R + 2D) \sqrt{(R - D)}.$$

Si donc l'on suppose $D = r$, $R = 2r$, puisque, par l'hypothèse, la distance périhélie est égale à la moyenne distance du Soleil à la Terre, & que d'ailleurs le rayon vecteur est double de la distance périhélie, lorsque l'anomalie est de 90 degrés; l'on aura, pour expression du temps employé par la Comète à parcourir 90 degrés d'anomalie,

$$X = \frac{2\sqrt{2} \times 113 \times 525969'\frac{1}{6}}{3 \times 355} = 157846'\frac{1}{3}.$$

De la relation entre l'anomalie moyenne & l'anomalie vraie.

(88.) L'équation (2) du §. 86, peut servir à convertir l'anomalie vraie en anomalie moyenne, & réciproquement; ou si l'on veut, étant donné l'angle v du rayon vecteur avec le grand axe, compté depuis le périhélie, elle peut faire connoître le temps écoulé depuis le passage de la Planète par le périhélie; & réciproquement. En effet, à cause de l'équation

$$(1)\quad R\left(1 + \frac{E}{\beta}\cos. v\right) - 2D = 0;$$

étant donné l'angle υ on conclura tout de suite la valeur de R; & par conséquent la valeur de l'arc ξ, au moyen de l'équation

$$(2)\ \text{fin.}\ \xi = \frac{R - \beta}{E}\ \text{fin. total.}$$

On connoîtra donc le temps écoulé depuis le périhélie, au moyen de l'équation (2) du §. 86.

Si au contraire le temps étoit donné, il faudroit conclure d'abord l'arc ξ, au moyen de l'équation (2) du §. 86, qui à la vérité est transcendante, mais qui se résout facilement par les Tables des sinus. On concluroit ensuite la valeur de R par l'équation (2) du *présent paragraphe ;* & enfin l'angle υ du rayon vecteur avec le grand axe, compté depuis le périhélie, par l'équation (1) du même paragraphe.

Du temps employé par la Comète à parcourir les différens arcs de sa trajectoire.

(89.) Il est facile maintenant de connoître le temps employé par la Comète à parcourir les différens arcs de sa trajectoire. Soit en effet

R' le rayon vecteur correspondant au commencement de l'arc;

R'' le rayon vecteur correspondant à la fin de l'arc;

ξ' l'arc dont le sinus $= \frac{R' - \beta}{E}$ fin. total, & dont le

$$\text{cof.} = \frac{\sqrt{(2\beta R' - 2\beta D - R'^2)}\ \text{fin. total}}{E};$$

ξ'' l'arc dont le sinus $= \frac{R'' - \beta}{E}$ fin. total, & dont le

$$\text{cof.} = \frac{\sqrt{(2\beta R'' - 2\beta D - R''^2)}\ \text{fin. total}}{E};$$

t le nombre de minutes de temps employées à parcourir l'arc de la trajectoire, compris entre les rayons vecteurs R'', R';

l'on aura évidemment

$$(1)\ rt = \frac{113 \times 525969'\frac{1}{4}}{2 \times 355}\left[\frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\text{arc}\ \xi'' - \text{arc}\ \xi'}{\text{fin. total}}\right) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} E\left(\frac{\text{cof.}\ \xi'' - \text{cof.}\ \xi'}{\text{fin. total}}\right)\right]$$

Dans l'usage de cette formule, l'arc ξ'' doit être toujours plus grand que l'arc ξ'. Il faut d'ailleurs appliquer à chacun de ces arcs les remarques du *§. 85.*

De la relation entre la différentielle du temps écoulé entre deux observations & les variations des élémens de l'ellipse.

(90.) Il peut être intéressant de connoître la relation entre la différentielle du temps écoulé entre deux observations & les variations des élémens de l'ellipse. Pour résoudre cette question, je nommerai

> dt la différentielle du temps;
>
> dR', dR'', dD, $d\beta$, les variations des rayons vecteurs & des élémens de la trajectoire elliptique.

Je remarque d'abord, qu'à cause de $\beta^2 - 2\beta D - E^2 = 0$, l'on a $(\beta - D)\,d\beta - \beta\,dD - E\,dE = 0$. J'observe ensuite que si l'on différencie l'équation (1) du *§. 89,* l'on aura

$$(1)\; r\,dt = \frac{113 \times 525969''\frac{1}{2}}{2 \times 355} \left\{ \left[\tfrac{3}{2}\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}(\text{arc}\,\xi'' - \text{arc}\,\xi') - \tfrac{1}{2}\frac{E}{\beta^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}}(\text{cof.}\,\xi'' - \text{cof.}\,\xi)\right] d\beta \right.$$

$$\left. + \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}(d\,\text{arc}\,\xi'' - d\,\text{arc}\,\xi') - \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}(d\,E\,\text{cof.}\,\xi'' - d\,E\,\text{cof.}\,\xi') \right\}.$$

Mais

$$d\,E\,\text{cof.}\,\xi' = \frac{(R' - D)}{E\,\text{cof.}\,\xi'}\,d\beta + \frac{(\beta - R')}{E\,\text{cof.}\,\xi'}\,dR' - \frac{\beta\,dD}{E\,\text{cof.}\,\xi'};$$

$$d\,E\,\text{cof.}\,\xi'' = \frac{(R'' - D)}{E\,\text{cof.}\,\xi''}\,d\beta + \frac{(\beta - R'')}{E\,\text{cof.}\,\xi''}\,dR'' - \frac{\beta\,dD}{E\,\text{cof.}\,\xi''};$$

$$d\,\text{arc}\,\xi' = \frac{dR'}{E\,\text{cof.}\,\xi'} + \frac{[R'D - \beta(R' - D)]}{E^3\,\text{cof.}\,\xi'}\,d\beta + \frac{(R' - \beta)\beta}{E^3\,\text{cof.}\,\xi'}\,dD;$$

$$d\,\text{arc}\,\xi'' = \frac{dR''}{E\,\text{cof.}\,\xi''} + \frac{[R''D - \beta(R'' - D)]}{E^3\,\text{cof.}\,\xi''}\,d\beta + \frac{(R'' - \beta)\beta}{E^3\,\text{cof.}\,\xi''}\,dD.$$

Soit donc

$$a' = -\frac{113 \times 525969'\frac{1}{2}}{2 \times 355}\;\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}\;\frac{R'}{E\ \text{cos}.\ \xi'};$$

$$a'' = +\frac{113 \times 525969'\frac{1}{2}}{2 \times 355}\;\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}\;\frac{R''}{E\ \text{cos}.\ \xi''};$$

$$b = +\frac{113 \times 525969'\frac{1}{2}}{2 \times 355}\;\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\beta^2}{E^2}\left[\frac{(R''-2D)}{\text{cos}.\ \xi''} - \frac{(R'-2D)}{\text{cos}.\ \xi'}\right];$$

$$\varepsilon = +\frac{113 \times 525969'\frac{1}{2}}{2 \times 355}\left\{\left[\frac{3}{2}\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}(\text{arc}\,\xi'' - \text{arc}\,\xi') - \frac{1}{2}\frac{E}{\beta^{\frac{1}{2}}\,r^{\frac{1}{2}}}(\text{cos}.\,\xi'' - \text{cos}.\,\xi')\right]\right.$$

$$\left. + \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{(3R''+2\beta-2D)D-2\beta R''}{E^3\ \text{cos}.\ \xi''} - \frac{(3R'+2\beta-2D)D-2\beta R'}{E^3\ \text{cos}.\ \xi'}\right]\right\}$$

l'on aura

$$(2)\quad a'dR' + a''dR'' + b\,dD + \varepsilon\,d\beta - r\,dt = 0.$$

Il faut appliquer à cette formule les remarques du §. 85.

Remarque sur un usage de l'équation (1) du §. 89, *lorsque la trajectoire de la Comète est très-alongée.*

(91). Je ne puis m'empêcher de présenter une remarque sur un usage de l'équation du §. 89, lorsque le grand axe de l'orbite de la Comète est très-grand, & que par conséquent la trajectoire diffère peu de la parabole dans la portion que l'on calcule. Dans ce cas, cette équation donne d'une manière approchée la valeur du grand axe de la section, lorsque l'on emploie des Observations faites de part & d'autre du périhélie. En effet, reprenons l'équation, & supposons $E = \beta$, ce qui est sensiblement vrai, nous aurons

$$(1)\quad t = \frac{113 \times 525969'\frac{1}{2}}{2 \times 355}\;\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\text{arc}\ \xi'' - \text{arc}\ \xi' - \text{cos}.\ \xi'' + \text{cos}.\ \xi'}{\text{sin. total}}\right).$$

Si l'on différencie cette équation, l'on aura

$$(2)\ dt = \frac{113 \times 525969'\frac{1}{2}}{2 \times 355}\left[\frac{2}{3}\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\text{arc}\ \xi'' - \text{arc}\ \xi' - \text{cof.}\ \xi'' + \text{cof.}\ \xi'}{\text{fin. total}}\right)d\beta\right.$$

$$\left. + \frac{\beta^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d\,\text{arc}\ \xi'' - d\ \text{arc}\ \xi' + \frac{\text{fin.}\ \xi''\,d\,\text{arc}\ \xi'' - \text{fin.}\ \xi'\,d\,\text{arc}\ \xi'}{\text{fin. total}}}{\text{fin. total}}\right)\right];$$

Mais dans la fuppofition que nous calculons, les arcs ξ', ξ'' diffèrent peu de 270d; bien entendu (§. 85) que ξ' eft un peu moindre que 270d, & que ξ'' eft un peu plus grand que 270d. Or, dans ces deux cas, les cofinus de ξ' & de ξ'' ont un figne différent, & les finus de ξ' & de ξ'' au contraire font tous deux négatifs & très-près d'être égaux au finus total. Donc la variation de t, dûe à la variation des arcs ξ', ξ'', fe détruit, pour ainfi dire, ou du moins eft infiniment petite par rapport à celle qui réfulte de la variation du grand axe β. L'équation (1) eft donc prefque indépendante des valeurs des arcs ξ', ξ''; cette équation eft donc propre à faire connoître d'une manière approchée la valeur du grand axe de la fection.

(92.) La folution précédente fuppofe que les obfervations que l'on compare, ont été faites de part & d'autre du périhélie; & l'analyfe feroit moins concluante, fi les obfervations avoient été faites du même côté du périhélie. Voici maintenant une équation que l'on peut employer dans ce dernier cas, & qui ne réuffiroit pas dans le premier, attendu que la conftante que l'on feroit alors obligé d'ajouter, feroit reparoître le grand axe de la fection fous une forme embarraffante.

Je remarque, d'après l'analyfe du §. 83, que l'équation (1) du §. 89, peut être mife fous la forme fuivante,

$$(1)\ \rho t = \int \frac{R''\,dR''}{2\sqrt{(R'' - D - \frac{R''^2}{2\beta})}} - \int \frac{R'\,dR'}{2\sqrt{(R' - D - \frac{R'^2}{2\beta})}}.$$

Les orbites des Comètes étant des ellipfes très-alongées, la fraction $\frac{1}{\beta}$ eft néceffairement très-petite; on peut donc

négliger ſon carré & ſes puiſſances ſupérieures. Si l'on développe l'équation (1), d'après ces principes, l'on aura

$$(2)\ \rho t = \int \frac{R''\,dR''}{2\sqrt{(R''-D)}} - \frac{1}{8\beta}\int \frac{R''^3\,dR''}{(R''-D)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{R'\,dR'}{2\sqrt{(R'-D)}} + \frac{1}{8\beta}\int \frac{R'^3\,dR'}{(R'-D)^{\frac{1}{2}}};$$

donc, en intégrant,

$$(3)\ \rho t = \frac{(R''-D)^{\frac{1}{2}}(R''+2D)}{3} - \frac{(R'-D)^{\frac{1}{2}}(R'+2D)}{3} + \frac{1}{8\beta}\left[\frac{\frac{2}{7}(R'-D)^3+2D(R'-D)^2+6D^2(R'-D)-2D^3}{\sqrt{(R'-D)}}\right] - \frac{1}{8}\beta\left[\frac{\frac{2}{7}(R''-D)^3+2D(R''-D)^2+6D^2(R''-D)-2D^3}{\sqrt{(R''-D)}}\right],$$

& il n'y a point de conſtante à ajouter dans le cas que nous conſidérons, puiſque $t = 0$ lorſque $R'' = R'$. Suppoſons donc, qu'en ſubſtituant pour D, R', R'', leurs valeurs tirées d'une parabole très-approchée, & qu'en faiſant $\frac{1}{\beta} = 0$, l'équation précédente ne ſoit pas exactement ſatisfaite, de ſorte que l'on ait, par exemple,

$$(4)\ \frac{(R''-D)^{\frac{1}{2}}(R''+2D)}{3} - \frac{(R'-D)^{\frac{1}{2}}(R'+2D)}{3} = \rho\tau,$$

l'on ſubſtituera cette valeur dans l'équation (3), & elle deviendra

$$(5)\ \rho(t-\tau) - \frac{1}{8}\beta\left[\frac{\frac{2}{7}(R'-D)^3+2D(R'-D)^2+6D^2(R'-D)-2D^3}{\sqrt{(R'-D)}}\right] + \frac{1}{8}\beta\left[\frac{\frac{2}{7}(R''-D)^3+2D(R''-D)^2+6D^2(R''-D)-2D^3}{\sqrt{(R''-D)}}\right] = 0,$$

ce qui donnera une approximation de la valeur de β.

De l'expreſſion de la corde dans la trajectoire elliptique.

(93.) Nous avons donné *(ſ. 18)* l'expreſſion de la corde de la parabole compriſe entre deux rayons vecteurs

R', R'', en valeurs de ces rayons vecteurs & de la distance périhélie; nous devons maintenant faire voir ce que devient cette expression dans le cas de l'orbite elliptique.

Pour y parvenir, nommons

R', R'', les rayons vecteurs qui comprennent la corde dont il s'agit,

N l'angle compris entre ces rayons vecteurs,

v', v'', les anomalies correspondantes aux rayons vecteurs R', R'',

c la corde,

ξ' l'arc dont le sinus $= \frac{R' - \beta}{E}$ sinus total, & dont le cosinus $= \frac{\sqrt{(2\beta R' - 2\beta D - R'^2)}}{E}$ sin: total,

ξ'' l'arc dont le sinus $= \frac{R'' - \beta}{E}$ sinus total, & dont le cosinus $= \frac{\sqrt{(2\beta R'' - 2\beta D - R''^2)}}{E}$ sin. total.

Je remarque d'abord (§. 10) que l'on a

$$(1)\ c^2 = R'^2 + R''^2 - 2R'R'' \text{cos.} N.$$

De plus,

$$(2)\ N = v'' - v';$$

donc

$$R'R'' \text{cos.} N = R'R'' \text{cos.} v'' \text{cos.} v' + R'R'' \text{sin.} v'' \text{sin.} v'.$$

Mais, en vertu de l'équation générale aux sections coniques (§. 81) & de l'équation (2) du §. 83,

$$R'R'' \text{cos.} v'' \text{cos.} v' = \frac{\beta^2}{E^2}[4D^2 - 2D(R' + R'') + R'R''];$$

$$R'R'' \text{sin.} v' \text{sin.} v'' = \frac{2\beta D}{E^2} \sqrt{(2\beta R' - 2\beta D - R'^2)}$$

$$\sqrt{(2\beta R'' - 2\beta D - R''^2)} = 2\beta D \frac{\text{cos.}\xi' \text{cos.}\xi''}{\text{sin.}^2 \text{total}};\ \text{donc}$$

$$(3)\ c^2 = R'^2 + R''^2 - \frac{2\beta^2}{E^2}[4D^2 - 2D(R' + R'') + R'R''] - 4\beta D \frac{\text{cos.}\xi' \text{cos.}\xi''}{\text{sin.}^2 \text{total}}.$$

Si l'on compare cette valeur de c^2 avec celle du §. 15, que l'on conserve toutes les définitions de T', T'', A', A'',

Δ', Δ'', L', L'', B', B'', du *même paragraphe*, que l'on continue de ſuppoſer le ſinus total $= 1$, on aura la relation ſuivante entre les élémens de l'ellipſe, & les obſervations priſes deux à deux,

$$(4)\ \frac{\beta^2}{E^2}[4D^2 - 2D(R' + R'') + R'R''] + 2\beta D \text{coſ.} \xi' \text{coſ.} \xi'' - T'T'' \text{coſ.}(A'' - A') + T'\Delta'' \text{coſ.} L'' \text{coſ.}(B'' - A') + T''\Delta' \text{coſ.} L' \text{coſ.}(B' - A'') - \Delta'\Delta''[\text{coſ.} L' \text{coſ.} L'' \text{coſ.}(B'' - B') + \text{ſin.} L' \text{ſin.} L''] = 0.$$

Dans ces formules, l'on doit appliquer aux arcs ξ', ξ'' & aux ſignes de leurs coſinus, les remarques du §. 85.

(94.) Je remarque d'abord que l'équation (4) du *paragraphe précédent* peut être miſe ſous la forme ſuivante,

$$(1)\ \frac{\beta^2}{E^2}[4D^2 - 2D(R' + R'') + R'R'' + \frac{2D}{\beta}E^2 \text{coſ.} \xi' \text{coſ.} \xi''] - T'T'' \text{coſ.}(A'' - A') + T'\Delta'' \text{coſ.}(B'' - A') + T''\Delta' \text{coſ.} L' \text{coſ.}(B' - A'') - \Delta'\Delta''[\text{coſ.} L' \text{coſ.} L'' \text{coſ.}(B'' - B') + \text{ſin.} L' \text{ſin.} L''] = 0.$$

De plus, ſi l'on ſuppoſe, comme dans le §. 39,

$$m' = \Delta' - T' \text{coſ.} L' \text{coſ.}(B' - A'),$$
$$m'' = \Delta'' - T'' \text{coſ.} L'' \text{coſ.}(B'' - A''),$$

l'on a $R'dR' - m'd\Delta' = 0$; $R''dR'' - m''d\Delta'' = 0$. Enfin, à cauſe de $\beta^2 - 2\beta D - E^2 = 0$, & de $(\beta - D)d\beta - \beta dD - EdE = 0$, l'on a

$$d\frac{\beta^2}{E^2} = \frac{2\beta^3}{E^4}dD - \frac{2\beta^2 D}{E^4}d\beta;$$

d'ailleurs

$$dE \text{coſ.} \xi' = \frac{(R' - D)d\beta}{E \text{coſ.} \xi'} + \frac{(\beta - R')dR'}{E \text{coſ.} \xi'} - \frac{\beta dD}{E \text{coſ.} \xi'},$$
$$dE \text{coſ.} \xi'' = \frac{(R'' - D)d\beta}{E \text{coſ.} \xi''} + \frac{(\beta - R'')dR''}{E \text{coſ.} \xi''} - \frac{\beta dD}{E \text{coſ.} \xi''}.$$

Si

Si donc l'on ſuppoſe

$$f = + \frac{\beta^2}{E^2} \left[R'' - 2D + \frac{2D}{\beta} (\beta - R') \frac{\text{coſ.}\,\xi''}{\text{coſ.}\,\xi'} \right]$$
$$+ \frac{R'}{m'} \{ T'' \text{ coſ. } L' \text{ coſ. } (B' - A'')$$
$$- \Delta'' [\text{coſ. } L' \text{ coſ. } L'' \text{ coſ. } (B'' - B')$$
$$+ \text{ſin. } L' \text{ ſin. } L''] \},$$

$$g = + \frac{\beta^2}{E^2} \left[R' - 2D + \frac{2D}{\beta} (\beta - R'') \frac{\text{coſ.}\,\xi'}{\text{coſ.}\,\xi''} \right]$$
$$+ \frac{R''}{m''} \{ T' \text{ coſ. } L'' \text{ coſ. } (B'' - A')$$
$$- \Delta' [\text{coſ. } L' \text{ coſ. } L'' \text{ coſ. } (B'' - B')$$
$$+ \text{ſin. } L' \text{ ſin. } L''] \},$$

$$h = + \frac{2\beta^3}{E^4} [4D^2 - 2D(R' + R'') + R'R'']$$
$$+ \frac{\beta^2}{E^2} [8D - 2(R' + R'') + 2\beta \text{ coſ. } \xi' \text{ coſ. } \xi''$$
$$- 2D \left(\frac{\text{coſ.}\,\xi'}{\text{coſ.}\,\xi''} + \frac{\text{coſ.}\,\xi''}{\text{coſ.}\,\xi'} \right)],$$

$$l = - \frac{2\beta^2 D}{E^4} [4D^2 - 2D(R' + R'') + R'R'']$$
$$+ \frac{\beta^2}{E^2} \{ - 2D \text{ coſ. } \xi' \text{ coſ. } \xi''$$
$$+ \frac{2D}{\beta} \left[(R' - D) \frac{\text{coſ.}\,\xi''}{\text{coſ.}\,\xi'} + (R'' - D) \frac{\text{coſ.}\,\xi'}{\text{coſ.}\,\xi''} \right] \},$$

l'on aura

$$(2)\quad f\,dR' + g\,dR'' + h\,dD + l\,d\beta = 0.$$

Il n'eſt pas néceſſaire que l'équation (1) ſoit rigoureuſement ſatisfaite par la ſubſtitution des différentes valeurs de β, E, D, R', R'', &c. pour que l'on puiſſe employer une équation de la forme précédente; & ſi l'on nomme

λ ce que devient l'équation (1) par la ſubſtitution des valeurs ci-deſſus,

l'on aura

$$(3)\quad f\,dR' + g\,dR'' + h\,dD + l\,d\beta - \lambda = 0.$$

Du Calcul des trajectoires des Comètes, en supposant leurs orbites elliptiques.

(95.) Je vais faire voir maintenant comme on peut calculer les orbites des Comètes, en les supposant elliptiques. Il est superflu d'avertir que l'on ne doit entreprendre ce calcul que quand l'hypothèse parabolique se refuse d'une manière sensible à représenter les observations; car s'il n'y avoit que quelques légères différences entre les observations & les résultats, difficilement pourroit-on se flatter de recueillir un fruit bien satisfaisant d'un travail très-pénible Au reste, ce que je vais exposer, est l'analyse rigoureuse de la détermination des orbites des Planètes; & sous ce point de vue, mon travail peut mériter quelqu'attention.

Dans ces recherches, je nommerai

Δ', Δ'', Δ''', Δ'''', &c. les distances de la Comète à la Terre;
R', R'', R''', R'''', &c. les rayons vecteurs;
B', B'', B''', B'''', &c. les longitudes géocentriques de la Comète;
A', A'', A''', A'''', &c. les longitudes du Soleil;
L', L'', L''', L'''', &c. les latitudes géocentriques de la Comète;
v', v'', v''', v'''', &c. les anomalies de la Comète;
N l'angle compris sur le plan de l'orbite de la Comète entre les rayons vecteurs R', R'';
N' l'angle compris entre les rayons vecteurs R', R''';
N'' l'angle compris entre les rayons vecteurs R', R'''';

& ainsi de suite. Je supposerai donc que l'on a les équations suivantes,

$$(1)\quad v'' = v' + N,$$
$$(2)\quad v''' = v' + N',$$
$$(3)\quad v'''' = v' + N'',$$

& ainsi de suite.

Je supposerai que l'on connoît trois distances de la Comète à la Terre; ou du moins deux distances correspondantes à deux bonnes observations, & que l'on combine ces deux observations avec une troisième, également exacte. En effet

cette dernière condition équivaut à la connoissance de trois distances de la Comète à la Terre; puisque la troisième distance se conclut des deux premières, au moyen de l'équation (1) du *§. 26.* Je proposerai, *§. 106 & suiv.* quelques vues sur les méthodes qui doivent être employées de préférence, pour connoître ces distances.

Lorsque l'on connoîtra les trois distances de la Comète à la Terre, on conclura facilement les rayons vecteurs, au moyen des équations du *§. 39.* On conclura les différens angles N, N', N'', au moyen des équations des *§§. 16* & *17*; on déterminera enfin le lieu du nœud ascendant & l'inclinaison de l'orbite, par les équations du *§. 21.* Nous pouvons donc supposer toutes ces quantités connues.

(96.) Si l'on combine trois observations, il est évident que l'on aura les équations suivantes,

$$(1)\ R'\left(1 + \frac{E}{\beta}\text{cof.}\, v'\right) - 2D = 0,$$

$$(2)\ R''\left(1 + \frac{E}{\beta}\text{cof.}\, v''\right) - 2D = 0,$$

$$(3)\ R'''\left(1 + \frac{E}{\beta}\text{cof.}\, v'''\right) - 2D = 0.$$

De ces équations, l'on tire

$$(4)\ R'\left(\frac{\beta}{E} + \text{cof.}\, v'\right) - R''\left(\frac{\beta}{E} + \text{cof.}\, v''\right) = 0,$$

$$(5)\ R'\left(\frac{\beta}{E} + \text{cof.}\, v'\right) - R'''\left(\frac{\beta}{E} + \text{cof.}\, v'''\right) = 0;$$

& de ces deux dernières, l'on conclura

$$(6)\ (R''' - R'')\, R' \text{cof.}\, v' - (R''' - R')\, R'' \text{cof.}\, v'' + (R'' - R')\, R''' \text{cof.}\, v''' = 0;$$

donc enfin, puisque $\text{cof.}\, v'' = \text{cof.}\, v' \,\text{cof.}\, N - \text{fin.}\, v' \,\text{fin.}\, N$, $\text{cof.}\, v''' = \text{cof.}\, v' \,\text{cof.}\, N' - \text{fin.}\, v' \,\text{fin.}\, N'$,

$$(7)\ [(R''' - R')\, R'' \text{fin.}\, N - (R'' - R')\, R''' \text{fin.}\, N'] \,\text{tang.}\, v' + (R''' - R'')\, R' - (R''' - R')\, R'' \text{cof.}\, N + (R'' - R')\, R''' \text{cof.}\, N' = 0.$$

(97.) Si l'on combinoit un plus grand nombre d'observations, l'on auroit par une analyse semblable,

$$(1)\ R''''\left(1+\frac{E}{\beta}\,\text{coſ.}\,v''''\right)-2\,D=0,$$

$$(2)\ R'''''\left(1+\frac{E}{\beta}\,\text{coſ.}\,v'''''\right)-2\,D=0,$$

$$(3)\ R'\left(\frac{\beta}{E}+\text{coſ.}\,v'\right)-R''''\left(\frac{\beta}{E}+\text{coſ.}\,v''''\right)=0;$$

$$(4)\ R'\left(\frac{\beta}{E}+\text{coſ.}\,v'\right)-R'''''\left(\frac{\beta}{E}+\text{coſ.}\,v'''''\right)=0,$$

$$(5)\ (R''''-R'')\,R'\,\text{coſ.}\,v'-(R''''-R')\,R''\,\text{coſ.}\,v''+(R''-R')\,R''''\,\text{coſ.}\,v''''=0,$$

$$(6)\ (R'''''-R'')\,R'\,\text{coſ.}\,v'-(R'''''-R')\,R''\,\text{coſ.}\,v''+(R''-R')\,R'''''\,\text{coſ.}\,v'''''=0,$$

$$(7)\ [(R''''-R')\,R''\,\text{ſin.}\,N-(R''-R')\,R''''\,\text{ſin.}\,N'']\,\text{tang.}\,v'$$
$$+(R''''-R'')R'-(R''''-R')R''\,\text{coſ.}\,N+(R''-R')R''''\,\text{coſ.}\,N''=0,$$

$$(8)\ [(R'''''-R')\,R''\,\text{ſin.}\,N-(R''-R')\,R'''''\,\text{ſin.}\,N'']\,\text{tang.}\,v'$$
$$+(R'''''-R'')R'-(R'''''-R')R''\,\text{coſ.}\,N+(R''-R')R'''''\,\text{coſ.}\,N''=0,$$

& ainſi de ſuite.

(98.) Au moyen de l'équation (7) du §. 96, l'on déterminera v'; l'on conclura v'' & v''' au moyen des équations (1) & (2) du §. 95; l'on conclura $\frac{\beta}{E}$, au moyen de l'équation (4) du §. 96; D au moyen de l'équation (1) du *même paragraphe;* & E au moyen de l'équation

$$(1)\ \beta^2-2\,\beta D-E^2=0,$$

dans laquelle la valeur abſolue de D & le rapport de β à E ſont donnés. Nous remarquerons que

β eſt le demi-grand axe de la trajectoire;

E eſt la diſtance du foyer au centre de la trajectoire;

$\sqrt{2\,\beta D}$ eſt le demi-petit axe.

Quant à la diſtance périhélie, elle n'eſt point égale à D, comme dans la parabole, mais on a

$$(2)\ \text{diſtance périhélie}=\beta-E.$$

(99.) La détermination des autres élémens de l'orbite ne préſente aucune difficulté; l'équation (2) du §. 84 fera

connoître l'instant du passage par le périhélie; & si l'on nomme, comme dans le §. 48,

u' l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds lors de la première observation; cet angle est compté sur le plan de la Comète, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de cet Astre dans son orbite,

Ω la distance du périhélie de la Comète au nœud ascendant; cet angle est compté sur le plan de l'orbite, en suivant le sens du mouvement de la Comète,

on aura (§. 48)

$$(1)\quad \text{tang. } u' = \frac{R''\,\Delta'\,\text{sin. } L'\,\text{sin. } N}{R'\,\Delta''\,\text{sin. } L'' - R''\,\Delta'\,\text{sin. } L'\,\text{cos. } N},$$

$$(2)\quad u' - \Omega - v' = 0.$$

REMARQUE *sur les solutions précédentes.*

(100.) Si l'on connoissoit d'avance le temps de la révolution de l'Astre dont on cherche la trajectoire, on concluroit facilement le grand axe de cette trajectoire; puisque, dans le cas de la force centrale, en raison inverse du carré des distances, les cubes des grands axes sont comme les carrés des temps périodiques. Comme cette circonstance apporte une simplification dans les calculs, nous allons nous en occuper.

Nous avons vu (§. 96) que l'on a les équations suivantes,

$$(1)\quad R'\left(1 + \frac{E}{\beta}\,\text{cos. } v'\right) - 2D = 0,$$

$$(2)\quad R'\left(\frac{\beta}{E} + \text{cos. } v'\right) - R''\left(\frac{\beta}{E} + \text{cos. } v''\right) = 0;$$

d'ailleurs

$$(3)\quad \beta^2 - 2\beta D - E^2 = 0,$$

$$(4)\quad v'' = v' + N,$$

& par conséquent $\text{cos. } v'' = \text{cos. } v'\,\text{cos. } N - \text{sin. } v'\,\text{sin. } N$. De ces équations, l'on tire

$$(5)\ (R' - R'')^2 \beta + [(R'' \text{cof. } N - R') \text{cof. } v' - R'' \text{fin. } N \text{ fin. } v']^2 (R' - \beta) + R'(R' - R'') \text{cof. } v' [(R'' \text{cof. } N - R') \text{cof. } v' - R'' \text{fin. } N \text{ fin. } v'] = 0;$$

on n'aura donc beſoin que de deux obſervations pour déterminer l'anomalie correſpondante à la première obſervation; l'on déterminera enſuite v'' au moyen de l'équation (4), E au moyen de l'équation (2), & enfin D au moyen de l'équation (3).

(101.) Les mêmes recherches font voir que, pour déterminer l'orbite elliptique d'une Comète, par des équations purement algébriques, il eſt néceſſaire d'avoir cinq obſervations. Aſtronomiquement parlant, ce nombre d'obſervations n'eſt point néceſſaire, & la queſtion peut être réſolue avec trois obſervations; mais alors il faut avoir recours aux équations entre le temps & les élémens de l'ellipſe, équations qui ſont tranſcendantes. On peut au contraire réſoudre algébriquement le Problème par cinq obſervations. En effet, ſi l'on compare l'équation (7) du *ſ. 96*, avec les équations (7) & (8) du *ſ. 97*, il en réſultera deux équations entre $R', R'', R''', R'''', R''''', N, N', N'', N''', N''''$; mais au moyen des équations des *ſſ. 16 & 17*, il eſt évident que l'on peut éliminer fin. N, fin. N', fin. N'', fin. N''', fin. N'''', cof. N, cof. N', cof. N'', cof. N''', cof. N''''; l'on aura donc alors deux équations entre $\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta'''', \Delta'''''$; & comme le *ſ. 24* fournit encore trois autres équations entre $\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta'''', \Delta'''''$, & que l'on ne peut en tirer d'ailleurs, il faut cinq obſervations pour déterminer algébriquement l'orbite elliptique d'une Comète.

Détermination des véritables élémens de la Comète.

(102.) Nous connoiſſons maintenant, à très-peu-près, les véritables élémens de l'orbite de la Comète, & nous voulons nous aſſurer ſi ces ſuppoſitions ſont rigoureuſes.

Pour y parvenir, conſervons toutes les définitions précédentes, & nommons

t le nombre de minutes de temps écoulées réellement entre la première & la seconde observation ;

ϑ le nombre de minutes de temps écoulées entre la première & la troisième observation ;

$\left.\begin{matrix}\tau \\ \tau'\end{matrix}\right\}$ le nombre de minutes de temps que l'on conclut des équations suivantes ;

$$(1)\ \tau = \frac{113 \times 525969' \div}{2 \times 355} \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\text{arc}\,\xi'' - \text{arc}\,\xi'}{\text{sin. total}}\right) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}} E}{r^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\text{cos}.\,\xi'' - \text{cos}.\,\xi'}{\text{sin. total}}\right)\Big];$$

$$(2)\ \tau' = \frac{113 \times 525969' \div}{2 \times 355} \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\text{arc}\,\xi''' - \text{arc}\,\xi'}{\text{sin. total}}\right) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}} E}{r^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\text{cos}.\,\xi''' - \text{cos}.\,\xi'}{\text{sin. total}}\right)\Big].$$

Il est évident que les élémens ne seront rigoureux qu'autant que l'on aura $\tau = t$, $\tau' = \vartheta$. Dans tout autre cas, les élémens ne seront qu'approchés.

Maintenant si l'on différencie les équations (1) & (2) ; que l'on emploie pour l'équation (1) les valeurs de a', a'', b, ι du *§. 90* ; que l'on fasse usage des valeurs analogues a', a''', b', ι' pour l'équation (2), & que l'on suppose

$$(3)\ d\tau = t - \tau; \qquad (4)\ d\tau' = \vartheta - \tau';$$

l'on aura

$$(5)\ a'dR' + a''dR'' + bdD + \iota d\beta - rd\tau = 0;$$
$$(6)\ a'dR' + a'''dR''' + b'dD + \iota'd\beta - rd\tau' = 0.$$

Maintenant si l'on conserve les définitions des quantités C, D', E', F, G, H, K du *§. 24*, & que l'on nomme, comme dans le *§. 28*,

α ce que devient l'équation (1) du *§. 24*, par la substitution des valeurs Δ', Δ'', Δ''' employées dans les calculs précédens ;

que l'on conserve les définitions de m', m'', m''' du *§. 39*, & que l'on suppose

$$M = (C\Delta''\Delta''' - E'\Delta''' - D'\Delta'' + G)\ \frac{R'}{m'};$$

$$M' = (C\Delta'\Delta''' - F\Delta''' - D'\Delta' + H)\ \frac{R''}{m''};$$

$$M'' = (C\Delta'\Delta'' - E'\Delta' - F\Delta'' + K)\ \frac{R'''}{m'''};$$

l'on aura

$$(7)\ M dR' + M' dR'' + M'' dR''' - \alpha = 0.$$

Enfin, ſi l'on porte les mêmes valeurs de β, E, D, R', R'', &c. dans l'équation (1) du *ſ. 94*, & dans une équation analogue réſultante de la comparaiſon de la première & de la troiſième obſervation; que l'on nomme

λ ce que devient la première équation par la ſubſtitution des valeurs ci-deſſus;

λ' ce que devient la ſeconde équation par une ſubſtitution analogue;

que l'on conſerve les expreſſions de f, g, h, l, du *ſ. 94*, & que l'on forme des valeurs analogues f', g', h', l', pour la ſeconde équation; l'on aura

$$(8)\ f\,dR' + g\,dR'' + h\,dD + l\,d\beta - \lambda = 0,$$
$$(9)\ f'\,dR' + g'\,dR''' + h'\,dD + l'\,d\beta - \lambda' = 0.$$

Il ne s'agit que d'éliminer entre les équations (5), (6), (7), (8) & (9).

(103.) De la combinaiſon des équations (5) & (6) du *paragraphe précédent*, l'on tire

$$(1)\ d\beta = \frac{d(b - b')\,dR' - a''b'\,dR'' + a'''b\,dR''' + b'r\,d\tau - b r\,d\tau'}{b'c - bc'};$$

$$(2)\ dD = \frac{d(c' - c)\,dR' + a''c'\,dR'' - a'''c\,dR''' - c'r\,d\tau + c r\,d\tau'}{b'c - bc'};$$

De

De la combinaiſon des équations (8) & (9), l'on tire pareillement

$$(3)\ d\beta = \frac{(f'h - fh')\,dR' - gh'\,dR'' + g'h\,dR''' + h'\lambda - h\lambda'}{h'l - hl'},$$

$$(4)\ dD = \frac{(fl' - f'l)\,dR' + gl'\,dR'' - g'l\,dR''' + \lambda'l - \lambda l'}{h'l - hl'}.$$

Maintenant ſi l'on égale les deux valeurs de $d\beta$ & de dD, & que l'on ſuppoſe

$$P' = (b'\epsilon - b\epsilon')(f'h - fh') - (h'l - hl')(a'b - a'b),$$
$$Q' = a''b'(h'l - hl') - gh'(b'\epsilon - b\epsilon'),$$
$$S' = g'h\,(b'\epsilon - b\epsilon') - a'''b(h'l - hl'),$$
$$p' = (b'\epsilon - b\epsilon')(h'\lambda - h\lambda'),$$
$$q' = (h'l - hl')\,b',$$
$$s' = (h'l - hl')\,b,$$
$$P'' = (b'\epsilon - b\epsilon')(fl' - f'l) - (h'l - hl')(a'\epsilon' - a'\epsilon),$$
$$Q'' = (b'\epsilon - b\epsilon')\,gl' - (h'l - hl')\,a''\epsilon',$$
$$S'' = (h'l - hl')\,a'''\epsilon - (b'\epsilon - b\epsilon')\,g'l,$$
$$p'' = (b'\epsilon - b\epsilon')(\lambda'l - \lambda l'),$$
$$q'' = (h'l - hl')\,\epsilon',$$
$$s'' = (h'l - hl')\,\epsilon,$$

l'on aura

$$(5)\ P'dR' + Q'dR'' + S'dR''' - q'r\,d\tau + s'r\,d\tau' + p' = 0,$$
$$(6)\ P''dR' + Q''dR'' + S''dR''' + q''r\,d\tau - s''r\,d\tau' + p'' = 0.$$

Il ne s'agit que d'éliminer entre les équations (5) & (6) du *préſent paragraphe*, & l'équation (7) du *paragraphe précédent*.

(104.) Si l'on combine ces équations, l'on aura

$$(1)\ (P' - \frac{MS'}{M''})dR' + (Q' - \frac{M'S'}{M''})dR'' - q'rd\tau + s'rd\tau' + p' + \frac{aS'}{M''} = 0,$$

$$(2)\ (P'' - \frac{MS''}{M''})dR' + (Q'' - \frac{M'S''}{M''})dR'' + q''rd\tau - s''rd\tau' + p'' + \frac{aS''}{M''} = 0,$$

d'où l'on tire enfin,

$$(3)\ (P'' - \frac{MS''}{M''})(Q' - \frac{M'S'}{M''}) - (P' - \frac{MS'}{M''})(Q'' - \frac{M'S''}{M''})dR'$$
$$+ [q''(Q' - \frac{M'S'}{M''}) - q'(Q'' - \frac{M'S''}{M''})]rd\tau + [s'(Q'' - \frac{M'S''}{M''}) - s''(Q' - \frac{M'S'}{M''})]rd\tau'$$
$$+ (p'' + \frac{aS''}{M''})(Q' - \frac{M'S'}{M''}) - (p' + \frac{aS'}{M''})(Q'' - \frac{M'S''}{M''}) = 0.$$

On connoîtra donc la valeur de dR'; on conclura ensuite les valeurs de dR'' au moyen de l'équation (1) du *présent paragraphe ;* la valeur de dR''' au moyen de l'équation (5) du *paragraphe précédent ;* on aura enfin les valeurs de $d\beta$ & de dD au moyen des équations (1) & (2) du *§. 103*, & le problème est résolu. En effet, connoissant les véritables valeurs de R', R'', R''', β, D, la détermination des élémens n'a plus de difficultés. On connoîtra la valeur de E au moyen de l'équation (3) du *§. 100 ;* l'inclinaison du plan de l'orbite & la position du nœud se détermineront par les équations du *§. 21 ;* l'instant du passage par le périhélie se connoîtra par l'équation du *§. 86;* les différentes anomalies v', v'', v''', & les angles N, N', se connoîtront par les équations (1), (2) & (3) des *§. 95 & 96;* enfin la distance du périhélie de la Comète au nœud ascendant sur l'Écliptique, sera donné par les équations du *§. 48.*

Simplification que la connoissance de la valeur de β apporte dans les calculs.

(105.) Si l'on connoissoit d'avance la quantité β, les calculs se simplifieroient. Dans les équations (5), (6), (8) & (9) du *§. 102*, l'on feroit $\epsilon = 0$, $\epsilon' = 0$, $l = 0$, $l' = 0$; & de la combinaison de ces équations, ainsi réduites, l'on tireroit

$$(1)\ a'(b - b')\,dR' - a''b'\,dR'' + a'''b\,dR''' + b'r\,d\tau - br\,d\tau' = 0,$$

$$(2)\ (f'h - fh')\,dR' - gh'\,dR'' + g'h\,dR''' + h'\varkappa - h\varkappa' = 0.$$

L'on auroit de plus,

$$(3)\ M\,dR' + M'\,dR'' + M''\,dR''' - a = 0.$$

De la combinaison de ces trois équations, l'on tireroit

$$(4)\ [a'(b - b') - a'''b\frac{M}{M''}]\,dR' - (a''b' + a'''b\frac{M'}{M''})\,dR'' + \frac{a'''ba}{M''} + b'r\,d\tau - br\,d\tau' = 0,$$

$$(5)\ (f'h - fh' - g'h\frac{M}{M''})\,dR' - (gh' + g'h\frac{M'}{M''})\,dR'' + \frac{g'ha}{M''} + h'\varkappa - h\varkappa' = 0;$$

d'où l'on concluroit enfin,

$$(6)\ [(a'b - ab' - a'''b\frac{M}{M''})(gh' + g'h\frac{M'}{M''}) - (f'h - fh' - g'h\frac{M}{M''})(a''b' + a'''b\frac{M'}{M''})]\,dR' + (a'''b\frac{a}{M''} + b'r\,d\tau - br\,d\tau')(gh' + g'h\frac{M'}{M''}) - (g'h\frac{a}{M''} + h'\varkappa - h\varkappa')(a''b' + a'''b\frac{M'}{M''}) = 0.$$

Sur les méthodes qui peuvent être employées pour connoître les distances de la Comète à la Terre, dont on doit faire usage dans les §§. 95 & suivans.

(106.) Les calculs des *§§. 95 & suivans*, supposent que l'on connoît, d'une manière très-approchée, les distances de la Comète à la Terre. Voici les méthodes qui me paroissent préférables pour parvenir à ce but.

La théorie & les calculs que l'on a entrepris sur les orbites des Comètes, ont également fait voir, que pour déterminer les trajectoires elliptiques, il faut que l'on ait un grand nombre de bonnes observations; que la Comète ait parcouru

un très-grand arc de ſa trajectoire; qu'elle ait été vue avant & après ſon paſſage par le périhélie; que les obſervations ſe refuſent d'une manière ſenſible à pouvoir être repréſentées par une ſeule & même parabole; autrement, ou l'on auroit peu de priſe pour diſtinguer la nature rigoureuſe de l'orbite, ou il ſeroit à craindre, qu'en abandonnant le calcul dans la parabole, on ne courût après une exactitude chimérique, & que les erreurs inſéparables des obſervations ne miſſent dans les réſultats, une incertitude infiniment plus grande que celle que l'on cherche à éviter. D'ailleurs, les obſervations étant liées à des poſitions d'Étoiles, qui ne ſont pas toutes parfaitement connues, on doit plus ſonger à accorder l'enſemble des obſervations, qu'à repréſenter rigoureuſement quelques obſervations iſolées, au haſard de rendre les autres diſcordantes.

Ces remarques m'ont conduit à penſer que lorſque les conditions du Problème ſe réuniſſent pour exiger un calcul dans l'ellipſe, on ne peut mieux faire que de claſſer toutes les obſervations, & d'en former différens ſyſtèmes réſultans de la réunion de pluſieurs obſervations aſſez prochaines entr'elles pour employer les méthodes des *§§. 31 & ſuivans*. On conclura donc par ces méthodes, & pour chacun de ces différens ſyſtèmes, les diſtances de la Comète à la Terre, lors d'une obſervation moyenne qui ſera le réſultat de chaque ſyſtème particulier; on traitera enſuite ces diſtances moyennes comme ſi elles étoient données immédiatement par les obſervations.

Suppoſons donc que l'on ait un certain nombre de ces diſtances, on portera les deux premières dans l'équation (1) du *§. 24*, & l'on cherchera ſucceſſivement les autres diſtances par des équations de la forme de celle du *§. 26:* l'on comparera les réſultats avec ceux que l'on aura déduits des méthodes des *§§. 31 & ſuivans*. Si ces réſultats coïncident, le Problème eſt réſolu, & l'on a ſatisfait à la condition que toutes les poſitions de la Comète ſoient dans un même plan; ſi

les résultats ne coïncident point, il ne sera pas difficile, par des équations différentielles de la forme de celles du *§. 28*, de trouver la loi qui rend ces distances, sinon rigoureusement cohérentes entr'elles, du moins d'une manière très-approchée.

(107.) Si l'on connoissoit d'avance la position du nœud, il seroit plus facile de déterminer rapidement la loi des distances. En effet, on auroit alors des équations de la forme de celles (7) (8) du *§. 21*, (3) (4) du *§. 23*; & comme l'on suppose que l'angle ζ est connu à très-peu près, l'on auroit facilement les limites des variations probables de Δ', Δ'', Δ''', &c.

(108.) Lorsque par les procédés que nous venons d'indiquer, on aura déterminé les différentes valeurs approchées de Δ', Δ'', Δ''', &c. on emploîra les méthodes des *§§. 95 & suivans;* peut-être même, au lieu de regarder β comme inconnu, seroit-il plus à propos de supposer cette quantité connue, & de simplifier ainsi les calculs, conformément à la remarque du *§. 105*, sauf à les répéter un plus grand nombre de fois. On pourroit alors employer pour première valeur de β celle qui seroit donnée par les considérations des *§§. 91 & 92*.

Telles sont les méthodes que je croirois devoir employer de préférence pour déterminer les distances de la Comète à la Terre, dont on doit faire usage dans les *§§. 95 & suivans.* La longueur de ce Mémoire m'empêche de les développer avec quelqu'étendue; mais ce qui a été dit ci-dessus ne laisse rien à desirer sur le véritable esprit de cette solution.

Je me suis attaché principalement à séparer les équations qui dépendent de la nature de la trajectoire d'avec celles qui en sont indépendantes, & qui supposent uniquement que les mouvemens de la Comète se passent tous dans un même plan. Cette manière d'envisager le problème, me paroît une chose intéressante dans la détermination des orbites des Comètes.

Du cas où la trajectoire de la Comète seroit circulaire.

(109.) Je terminerai cette seconde partie par l'examen du cas particulier où la trajectoire de la Comète seroit circulaire : je supposerai dans ces recherches que l'on a des équations de la forme de celles du §. 31. Je nommerai, comme dans ce paragraphe,

Δ', R', T', A', B', L', les quantités qui appartiennent à la première observation ;

Δ''', R''', T''', A''', B''', L''', les quantités qui appartiennent à la dernière des observations, faites dans des intervalles proches, & que je suppose liées ensemble par les considérations du §. 33 ;

ϑ le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ' & Δ'''.

Je nommerai d'ailleurs, comme dans les *paragraphes précédens*,

I l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comète sur l'Écliptique ;

ζ la longitude du nœud ascendant de la Comète ;

u' l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds, lors de la première observation ; cet angle est compté sur le plan de l'orbite de la Comète, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de la Comète dans son orbite ;

u''' l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds, lors de la seconde observation ;

N un angle qu'il s'agira de déterminer, & qui est tel que l'on ait

$$(1)\ u''' = u' + N.$$

Je supposerai enfin que l'on a une équation de la forme suivante,

$$(2)\ \Delta''' = P\Delta'.$$

(110.) Il est facile, d'après ce qui a été dit dans ce Mémoire, de déterminer les distances de la Comète à la Terre lors des deux Observations Δ', Δ''', ainsi que le

rayon du cercle qu'elle décrit. En effet, il suit des recherches précédentes, que l'on a les deux équations

$$(1)\ R'^2 - \Delta'^2 + 2\,\Delta' T' \text{ cos. } L' \text{ cos. } (B' - A') - T'^2 = 0,$$
$$(2)\ R'''^2 - \Delta'''^2 + 2\,\Delta''' T''' \text{ cos. } L''' \text{ cos. } (B''' - A''') - T'''^2 = 0.$$

Mais, par la supposition, la trajectoire de la Comète est circulaire; donc $R''' = R'$; d'ailleurs, $\Delta''' = P\Delta'$; donc

$$(3)\ (1 - P^2)\,\Delta'^2 + 2\,[PT''' \text{ cos. } L''' \text{ cos. } (B''' - A''') - T' \text{ cos. } L' \text{ cos. } (B' - A')]\,\Delta' + T'^2 - T'''^2 = 0.$$

Au moyen de cette dernière équation, l'on connoîtra la distance Δ'; d'où l'on conclura la distance Δ''' au moyen de l'équation (2) du *§. 109;* & enfin le rayon de l'orbite circulaire de la Comète, au moyen de l'équation (1) du *présent paragraphe.*

(111.) La détermination de l'inclinaison du plan de l'orbite & de l'angle que fait le premier rayon vecteur avec la ligne des nœuds compté sur le plan de l'orbite, ne présente pas beaucoup plus de difficultés. En effet, l'on a *(§. 48)* les deux équations suivantes,

$$(1)\ R' \text{ sin. } u' \text{ sin. } I - \Delta' \text{ sin. } L' = 0,$$
$$(2)\ R''' \text{ sin. } u''' \text{ sin. } I - \Delta''' \text{ sin. } L''' = 0;$$

& de ces équations, l'on tire à cause de $R' = R'''$,

$$(3)\ \Delta' \text{ sin. } L' \text{ sin. } u''' - \Delta''' \text{ sin. } L''' \text{ sin. } u' = 0;$$

mais *[§. 109, équat. (1)]* $u''' = u' + N$; donc

$$(4)\ \text{tangente } u' = \frac{\Delta' \text{ sin. } L' \text{ sin. } N}{\Delta''' \text{ sin. } L''' - \Delta' \text{ sin. } L' \text{ cos. } N}.$$

On voit donc que l'on connoîtra l'angle u' du premier rayon vecteur avec la ligne des nœuds, & par conséquent *[équat. (1)]* l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comète, lorsque l'on connoîtra l'angle N.

(112.) Il n'est pas difficile de déterminer l'angle N. Pour

y parvenir, on se rappellera que les recherches du *§. 110*, ont fait connoître le rayon de la trajectoire circulaire de la Comète; d'ailleurs on connoît le temps ϑ écoulé entre les deux observations que l'on compare.

Si donc l'on nomme

r la moyenne distance du Soleil à la Terre,

s l'arc que la Terre décrit dans son orbite pendant une minute de temps, lorsqu'elle est à sa moyenne distance du Soleil,

ϑ le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ' & Δ''',

il est évident que l'arc décrit par la Terre, pendant le temps ϑ, sera égal à ϑs, & que par conséquent ce même arc aura pour son expression en secondes de degré $\frac{\vartheta s}{r} \times 206265''$; mais l'arc décrit par la Comète, dans son orbite circulaire, est à l'arc moyen de la Terre, décrit dans le même temps, comme $r^{\frac{1}{2}}$ est à $R'^{\frac{1}{2}}$; donc

$$(1)\ N = \frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}}\ 206265''.$$

(113.) Puisque l'angle N est connu, l'angle que fait le premier rayon vecteur avec la ligne des nœuds, compté sur le plan de l'Écliptique, ainsi que l'inclinaison du plan de l'orbite sont pareillement connus; on déterminera donc facilement la longitude du nœud ascendant, au moyen des équations du *§. 51*.

(114.) Il n'est pas même indispensablement nécessaire d'avoir recours à l'équation (1) du *§. 112*, pour déterminer l'angle N. On peut se rappeler que nous avons donné *(§. 16)* l'expression générale de cet angle; expression qui, dans le cas que nous considérons, devient

$$(1)\ R'^2 \text{cos. } N - T'T''' \text{cos. } (A''' - A') + T'\Delta''' \text{cos. } L''' \text{cos. } (B''' - A') + T'''\Delta' \text{cos. } L' \text{cos. } (B' - A''') - \Delta'\Delta''' [\text{cos. } L' \text{cos. } L''' \text{cos. } (B''' - B') + \text{sin. } L' \text{sin. } L'''] = 0.$$

Cette

Cette expreſſion eſt moins commode que celle du §. 112.

(115.) Si l'expreſſion de l'angle N du *paragraphe précédent* eſt plus compliquée que celle du §. 112, elle eſt au moins très-utile pour vérifier l'hypothèſe circulaire. En effet, ſi cette hypothèſe eſt la véritable, les deux valeurs de l'angle N doivent donner le même réſultat; on a donc

$$(1)\ R'^2 \text{ coſ. angle } \left(\frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}}\, 206265''\right) - T'T''' \text{ coſ. } (A''' - A') \\ + T'\Delta''' \text{ coſ. } L''' \text{ coſ. } (B''' - A') + T'''\Delta' \text{ coſ. } L' \text{ coſ. } (B' - A''') \\ - \Delta'\Delta''' [\text{coſ. } L' \text{ coſ. } L''' \text{ coſ. } (B''' - B') + \text{ſin. } L' \text{ ſin. } L'''] = 0.$$

Il ne s'agit que de vérifier ſi cette équation eſt ſatisfaite.

(116.) L'équation (1) du *paragraphe précédent* préſente encore une utilité remarquable, celle de faire trouver facilement le rayon du cercle qui ſatisfait au Problème, lorſque l'on connoît à peu-près la valeur de ce rayon. En effet, ſi l'on différencie cette équation, l'on aura

$$2R' \text{ coſ. ang. } \left(\frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}}\, 206265''\right) dR + R'^2\, d\text{coſ. ang. } \left(\frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}}\, 206265''\right) \\ + T' \text{ coſ. } L''' \text{ coſ. } (B''' - A')\, d\Delta''' + T''' \text{ coſ. } L' \text{ coſ. } (B' - A''')\, d\Delta \\ - \Delta''' [\text{coſ. } L' \text{ coſ. } L''' \text{ coſ. } (B''' - B') + \text{ſin. } L' \text{ ſin. } L''']\, d\Delta \\ - \Delta' [\text{coſ. } L' \text{ coſ. } L''' \text{ coſ. } (B''' - B') + \text{ſin. } L' \text{ ſin. } L''']\, d\Delta''' = 0$$

Soit maintenant, comme dans le §. 39,

$$m' = \Delta' - T' \text{ coſ. } L' \text{ coſ. } (B' - A'),$$
$$m''' = \Delta''' - T''' \text{ coſ. } L''' \text{ coſ. } (B''' - A''');$$

l'on aura, dans le cas du cercle,

$$d\Delta' = \frac{R'dR'}{m'};\ d\Delta''' = \frac{R'dR'}{m'''}.$$ De plus,

$$d\text{coſ. ang. } \left(\frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}}\, 206265''\right) = \tfrac{3}{2} \text{ ſin. ang. } \left(\frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}}\, 206265''\right) \frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{5}{2}}}\, dR'.$$

donc si l'on nomme

λ ce que devient l'équation (1) du §. 115, par la substitution des valeurs de R', T', Δ', A', B', L'; T''', Δ''', A''', B''', L''';

l'on aura

$$\Big\{ 2R' \text{cos. ang.} \Big(\frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}} 206265'' \Big) + \tfrac{3}{2} \text{sin. ang.} \Big(\frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}} 206265'' \Big) \frac{\vartheta s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}}$$
$$+ [T''' \text{cos.} L' \text{cos.} (B' - A''') - \Delta''' [\text{cos.} L' \text{cos.} L''' \text{cos.} (B''' - B')$$
$$+ \text{sin.} L' \text{sin.} L''']] \frac{R'}{m'} + [T' \text{cos.} L''' \text{cos.} (B''' - A')$$
$$- \Delta' [\text{cos.} L' \text{cos.} L''' \text{cos.} (B''' - B') + \text{sin.} L' \text{sin.} L''']] \frac{R'}{m'''} \Big\} dR' - \lambda = 0.$$

(117.) Il pourroit être intéressant de connoître l'influence de la variation de la valeur de P, dont il a été parlé dans le §. 109, sur l'expression du rayon de la trajectoire circulaire; rien de plus simple que la solution de cette question. En effet, on a tout de suite

$$[(1 - P^2)\Delta' + 2[PT''' \text{cos.} L''' \text{cos.} (B''' - A''')$$
$$- T' \text{cos.} L' \text{cos.} (B' - A')]] d\Delta' - [\Delta'^2 P$$
$$- \Delta' T''' \text{cos.} L''' \text{cos.} (B''' - A''')] dP = 0,$$

ou à cause de $d\Delta' = \frac{R' dR'}{m'}$,

$$(1)\ [(1-P^2)\Delta' + 2[PT''' \text{cos.} L''' \text{cos.} (B''' - A''') - T' \text{cos.} L' \text{cos.} (B' - A')]] \frac{R'}{m'} dR'$$
$$- [\Delta'^2 P - \Delta' T''' \text{cos.} L''' \text{cos.} (B''' - A''')] dP = 0.$$

(118.) Par les méthodes précédentes, nous avons déterminé le rayon de la trajectoire circulaire, & en général, les élémens qui représentent les premières observations dans le cercle; on peut être curieux de vérifier si ces élémens satisfont à une observation éloignée. Pour y parvenir, je remarque que si l'on nomme

Δ'''', T'''', A'''', L'''', B'''', u'''', &c. les grandeurs qui appartiennent à cette observation,

l'on a (§. 54)

$$(1)\ \Delta'''' \sin. L'''' \cot. I + T'''' \sin. (A'''' - \zeta) - \Delta'''' \cos. L'''' \sin. (B'''' - \zeta) = 0,$$

$$(2)\ R' \sin. u'''' \sin. I - \Delta'''' \sin. L'''' = 0.$$

On déterminera donc la valeur de Δ'''' au moyen de l'équation (1), & la valeur de u'''', au moyen de l'équation (2).

(119.) Maintenant, il eſt évident que ſi l'on nomme

N' l'angle compris entre les deux rayons vecteurs de la Comète, correſpondans aux obſervations Δ', Δ'''',

ϑ' le nombre de minutes de temps écoulées entre la première & la quatrième obſervation,

l'on a $N' = \frac{\vartheta' s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}} 206265''$; de plus, $N' = u'''' - u'$;

il s'agit donc de vérifier ſi l'on a

$$(1)\ u'''' - u' = \frac{\vartheta' s r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{3}{2}}} 206265''.$$

Dans le premier cas, les élémens ſont bien déterminés, & l'orbite eſt circulaire; dans le ſecond cas, l'orbite n'eſt point circulaire. C'eſt une ſeconde manière de vérifier l'hypothèſe circulaire.

(120.) Je terminerai ce qui regarde l'orbite circulaire, par une remarque analogue à celle du §. 101. Aſtronomiquement parlant, il ne faut que deux obſervations pour déterminer cette orbite; en effet, à cauſe de $R' = R''''$, il ſuit du §. 39, que

$$\Delta' = T' \cos. L' \cos. (B' - A') \pm \sqrt{[T'^2 \cos.^2 L' \cos.^2 (B' - A') - T'^2 + R'^2]},$$

$$\Delta''' = T''' \cos. L''' \cos. (B''' - A''') \pm \sqrt{[T'''^2 \cos.^2 L''' \cos.^2 (B''' - A''') - T'''^2 + R'^2]},$$

il eſt donc évident que l'équation (1) du §. 115 eſt déterminée;

mais d'un autre côté, cette équation est transcendante. Si l'on veut éviter cet inconvénient, & n'avoir à résoudre qu'une équation algébrique, il est nécessaire d'employer trois observations; l'on a alors, en conservant les définitions de C, D', E', F, G, H, K du *§. 24*, une équation de la forme suivante,

$$(1)\ C\Delta'\Delta''\Delta''' - D'\Delta'\Delta'' - E'\Delta'\Delta''' - F\Delta''\Delta''' + G\Delta' + H\Delta'' + K\Delta''' = 0.$$

De plus, à cause de l'égalité des rayons vecteurs, l'on a

$$(2)\ \Delta'' = T''\,\text{cos}.\,L''\,\text{cos}.(B'' - A'') \pm \sqrt{[T''^2\,\text{cos}.^2 L''\,\text{cos}.^2(B'' - A'') - T''^2 + \Delta'^2 + T'^2 - 2\Delta' T'\,\text{cos}.\,L'\,\text{cos}.(B' - A')]},$$

$$(3)\ \Delta''' = T'''\,\text{cos}.\,L'''\,\text{cos}.(B''' - A''') \pm \sqrt{[T'''^2\,\text{cos}.^2 L'''\,\text{cos}.^2(B''' - A''') - T'''^2 + \Delta'^2 + T'^2 - 2\Delta' T'\,\text{cos}.\,L'\,\text{cos}.(B' - A')]}.$$

Le Problème est donc résolu, par une équation purement algébrique; mais il est plus que déterminé, puisque l'on a en outre deux équations de la forme de l'équation (1) du *§. 114*.

TROISIÈME PARTIE,

Dans laquelle on démontre ce qui est relatif aux équations de la forme de celles dont il a été parlé dans les §§. 31 & suivans.

(121.) Il me reste maintenant à démontrer ce qui est relatif aux équations de la forme de celles dont il a été parlé dans les *§§. 31* & *suivans*. Je ferai voir la formation de ces équations; le degré de leur exactitude; dans quel cas on doit les employer de préférence, & par quel moyen on peut y suppléer, lorsque les circonstances du Problème peuvent laisser quelque doute sur la légitimité de leur usage.

Soit donc, comme dans les *§§. 31* & *32*,

t le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ' & Δ''';

t' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ' & Δ'';

ϑ le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ'' & Δ''';

$\mu' = \text{ſin.}\, L''' \,\text{coſ.}\, L'' \,\text{ſin.}\, (B'' - A'') - \text{ſin.}\, L'' \,\text{coſ.}\, L''' \,\text{ſin.}\, (B''' - A'')$;
$\mu'' = \text{ſin.}\, L''' \,\text{coſ.}\, L' \,\text{ſin.}\, (B' - A'') - \text{ſin.}\, L' \,\text{coſ.}\, L''' \,\text{ſin.}\, (B''' - A'')$;
$\mu''' = \text{ſin.}\, L'' \,\text{coſ.}\, L' \,\text{ſin.}\, (B' - A'') - \text{ſin.}\, L' \,\text{coſ.}\, L'' \,\text{ſin.}\, (B'' - A'')$.

Je vais démontrer que l'on a les équations ſuivantes,

$$(1)\quad t'\mu''\Delta' - \vartheta\mu'\Delta'' = 0,$$
$$(2)\quad t'\mu'''\Delta' - t\mu'\Delta''' = 0,$$
$$(3)\quad t\mu''\Delta''' - \vartheta\mu'''\Delta'' = 0.$$

Comme ces réſultats ſuppoſent quelques connoiſſances préliminaires, je commence par l'établiſſement de ces propoſitions.

De la relation entre les coordonnées de la trajectoire de la Comète, priſes ſur le plan de la trajectoire, & les coordonnées perpendiculaires x, y, z *du* §. 13.

(122.) Soit

I l'inclinaiſon du plan de l'orbite de la Comète ſur l'Écliptique;

ζ la longitude du nœud aſcendant de la Comète;

Ω l'angle de la ligne des abſciſſes de l'orbite de la Comète priſes ſur le plan de cette orbite, avec la ligne des nœuds;

[illegible] l'abſciſſe, υ l'ordonnée } à l'orbite de la Comète, priſes dans le plan de cette orbite; ces coordonnées ſont ſuppoſées perpendiculaires entr'elles;

x, y, z les coordonnées à l'orbite de la Comète, & qui ſont priſes, ſavoir x & y ſur le plan de l'Écliptique, & z ſur un plan perpendiculaire à l'Écliptique.

Je vais faire voir que ſi l'on ſuppoſe

$$a = +\, \text{coſ.}\, \Omega \,\text{coſ.}\, \zeta - \text{coſ.}\, I \,\text{ſin.}\, \Omega \,\text{ſin.}\, \zeta,$$
$$b = -\, \text{ſin.}\, \Omega \,\text{coſ.}\, \zeta - \text{coſ.}\, I \,\text{coſ.}\, \Omega \,\text{ſin.}\, \zeta,$$
$$c = +\, \text{coſ.}\, \Omega \,\text{ſin.}\, \zeta + \text{coſ.}\, I \,\text{ſin.}\, \Omega \,\text{coſ.}\, \zeta,$$
$$e = -\, \text{ſin.}\, \Omega \,\text{ſin.}\, \zeta + \text{coſ.}\, I \,\text{coſ.}\, \Omega \,\text{coſ.}\, \zeta,$$
$$f = +\, \text{ſin.}\, \Omega \,\text{ſin.}\, I,$$
$$g = +\, \text{coſ.}\, \Omega \,\text{ſin.}\, I,$$

l'on a en général

$$(1)\ x = a\theta + bv;$$
$$(2)\ y = c\theta + ev;$$
$$(3)\ z = f\theta + gv.$$

Fig. 6. (123.) Pour le démontrer, soit S le Soleil; SEC' le plan de l'Écliptique; SE la ligne passant par le premier point d'*Ariès* ; SN la ligne des nœuds de l'orbite de la Comète; $SNMC$ le plan de l'orbite de la Comète; C le lieu de la Comète dans son orbite; C' la projection de la Comète sur l'Écliptique ; SD la ligne des abscisses de l'orbite de la Comète, prise sur le plan de cette orbite. Abaissons de la Comète C la perpendiculaire CM sur la ligne SNM des nœuds; conservons les définitions du *paragraphe précédent* & cherchons l'équation à l'orbite de la Comète, par rapport à l'abscisse SM, prise sur la ligne des nœuds, & à l'ordonnée perpendiculaire MC. Nommons

K l'abscisse SM,
V l'ordonnée correspondante MC,

& soit ∂ le point où l'ordonnée MC rencontre la ligne des abscisses SD, prise sur le plan de l'orbite de la Comète.

On voit d'abord que les triangles ∂SM, $DC\partial$ sont semblables, puisque ces triangles ont chacun les angles en ∂ opposés au sommet, & que d'ailleurs ils sont rectangles; l'angle $DC\partial$ est donc égal à l'angle ∂SM, c'est-à-dire à l'angle Ω; & chacun des angles en ∂ est complément de Ω; donc, $SM = S\partial \operatorname{cos}. \Omega$. Mais $S\partial = SD - \partial D$, & $\partial D = DC \operatorname{tang}. \Omega$; de plus, $SD = \theta$, & $DC = v$; donc $S\partial = \theta - v \operatorname{tang}. \Omega$; donc $SM = \theta \operatorname{cos}. \Omega - v \operatorname{tang}. \Omega \operatorname{cos}. \Omega$; donc

$$K = \theta \operatorname{cos}. \Omega - v \operatorname{sin}. \Omega.$$

De même, à cause de $MC = M\partial + \partial C$; que de plus $M\partial = K \operatorname{tang}. \Omega$, & que $\partial C = \frac{DC}{\operatorname{cos}. \Omega}$; on a

$$V = \theta \operatorname{sin}. \Omega + v \operatorname{cos}. \Omega.$$

Maintenant dans le triangle CMC' rectangle en C', on a $CC' = MC$ sin. $I = V$ sin. I; on a de plus $MC' = MC$ cos. I; d'ailleurs, $CC' = z$; donc Fig. 6.

$$z = \theta \text{ sin. } \Omega \text{ sin. } I + v \text{ cos. } \Omega \text{ sin. } I,$$
$$MC' = \theta \text{ sin. } \Omega \text{ cos. } I + v \text{ cos. } \Omega \text{ cos. } I.$$

Considérons maintenant les triangles semblables SEN, $NC'M$, rectangles en E & en M, & dont les angles ESN, $MC'N$, sont chacun égaux à l'angle que nous avons nommé ζ; on aura par une analyse semblable à la précédente,

$$x = K \text{ cos. } \zeta - MC' \text{ sin. } \zeta; \quad y = K \text{ sin. } \zeta + MC' \text{ cos. } \zeta.$$

Substituant donc dans ces équations à K & à MC', leurs valeurs, on aura

$$x = \theta (\text{cos. } \Omega \text{ cos. } \zeta - \text{sin. } \Omega \text{ cos. } I \text{ sin. } \zeta) = v (\text{sin. } \Omega \text{ cos. } \zeta + \text{cos. } \Omega \text{ cos. } I \text{ sin. } \zeta),$$
$$y = \theta (\text{cos. } \Omega \text{ sin. } \zeta + \text{sin. } \Omega \text{ cos. } I \text{ cos. } \zeta) + v (\text{cos. } \Omega \text{ cos. } I \text{ cos. } \zeta - \text{sin. } \Omega \text{ sin. } \zeta);$$

on a donc les équations (1), (2) & (3) du *§. 122.*

(124.) Il suit de ces recherches, que pour trois observations différentes on aura les neuf équations suivantes,

(1) $x' = a\theta' + bv'$, (4) $y' = e\theta' + cv'$, (7) $z' = f\theta' + gv'$,
(2) $x'' = a\theta'' + bv''$, (5) $y'' = e\theta'' + cv''$, (8) $z'' = f\theta'' + gv''$,
(3) $x''' = a\theta''' + bv'''$, (6) $y''' = e\theta''' + cv'''$, (9) $z''' = f\theta''' + gv'''$.

Des relations entre les trois distances successives de la Comète à la Terre, & les aires rectilignes de la trajectoire de la Comète, comprises entre les rayons vecteurs & les cordes correspondantes, prises sur le plan de l'orbite de la Comète.

(125.) Il faut faire voir maintenant qu'il existe des relations entre les trois distances successives de la Comète à la Terre & les aires rectilignes de la trajectoire, comprises

entre les rayons vecteurs & les cordes correſpondantes, priſes ſur le plan de l'orbite de la Comète.

Pour déterminer ces relations, éliminons a & b, au moyen des équations (1), (2) & (3) du *paragraphe précédent; c* & *e*, au moyen des équations (4), (5) & (6); *f* & *g*, au moyen des équations (7), (8) & (9); on parviendra aux trois réſultats ſuivans,

$$(1)\quad (\theta'''v'' - \theta''v''')x' - (\theta'''v' - \theta'v''')x'' + (\theta''v' - \theta'v'')x''' = 0;$$
$$(2)\quad (\theta'''v'' - \theta''v''')y' - (\theta'''v' - \theta'v''')y'' + (\theta''v' - \theta'v'')y''' = 0,$$
$$(3)\quad (\theta'''v'' - \theta''v''')z' - (\theta'''v' - \theta'v''')z'' + (\theta''v' - \theta'v'')z''' = 0.$$

Donc, ſi l'on fait pour abréger

$$H = \theta''v' - \theta'v''; \quad M = \theta'''v' - \theta'v'''; \quad Q = \theta'''v'' - \theta''v''';$$

on aura les trois équations ſemblables,

$$(4)\quad Qx' - Mx'' + Hx''' = 0,$$
$$(5)\quad Qy' - My'' + Hy''' = 0,$$
$$(6)\quad Qz' - Mz'' + Hz''' = 0.$$

Maintenant, ſi l'on conſerve les définitions du *§. 13*, il eſt évident que l'on a

$$x' = T' \operatorname{coſ.} A' - \Delta' \operatorname{coſ.} B' \operatorname{coſ.} L',$$
$$x'' = T'' \operatorname{coſ.} A'' - \Delta'' \operatorname{coſ.} B'' \operatorname{coſ.} L'',$$
$$x''' = T''' \operatorname{coſ.} A''' - \Delta''' \operatorname{coſ.} B''' \operatorname{coſ.} L''',$$
$$y' = T' \operatorname{ſin.} A' - \Delta' \operatorname{ſin.} B' \operatorname{coſ.} L',$$
$$y'' = T'' \operatorname{ſin.} A'' - \Delta'' \operatorname{ſin.} B'' \operatorname{coſ.} L'',$$
$$y''' = T''' \operatorname{ſin.} A''' - \Delta''' \operatorname{ſin.} B''' \operatorname{coſ.} L''',$$
$$z' = \Delta' \operatorname{ſin.} L',$$
$$z'' = \Delta'' \operatorname{ſin.} L'',$$
$$z''' = \Delta''' \operatorname{ſin.} L'''.$$

Subſtituant ces valeurs dans les équations (4), (5) & (6) du

du *présent paragraphe*, elles deviendront

$$(7)\ \left.\begin{array}{l} QT'\ \text{cos.}\ A' - MT''\ \text{cos.}\ A'' + HT'''\ \text{cos.}\ A''' \\ - Q\Delta'\ \text{cos.}\ B'\ \text{cos.}\ L' + M\Delta''\ \text{cos.}\ B''\ \text{cos.}\ L'' - H\Delta'''\ \text{cos.}\ B'''\ \text{cos.}\ L''' \end{array}\right\} = 0,$$

$$(8)\ \left.\begin{array}{l} QT'\ \text{sin.}\ A' - MT''\ \text{sin.}\ A'' + HT'''\ \text{sin.}\ A''' \\ - Q\Delta'\ \text{sin.}\ B'\ \text{cos.}\ L' + M\Delta''\ \text{sin.}\ B''\ \text{cos.}\ L'' - H\Delta'''\ \text{sin.}\ B'''\ \text{cos.}\ L''' \end{array}\right\} = 0,$$

$$(9)\ Q\Delta'\ \text{sin.}\ L' - M\Delta''\ \text{sin.}\ L'' + H\Delta'''\ \text{sin.}\ L''' = 0.$$

(126.) Il eſt aiſé de démontrer que les quantités $Q, M, H,$ ſont reſpectivement proportionnelles aux aires rectilignes $C'SC''$, CSC'', CSC' de la trajectoire de la Comète, compriſes entre les rayons vecteurs & les cordes correſpondantes, priſes ſur le plan de l'orbite de la Comète. Pour le prouver, prenons, par exemple, la quantité M; ce que l'on dira ſur cette quantité s'appliquera facilement, avec quelques légers changemens, aux quantités Q, H. Nous avons vu *(parag. précéd.)* que $M = \theta''' v' - \theta' v'''$; or $\theta''' v' - \theta' v'''$ eſt l'expreſſion de l'aire CSC'' compriſe entre les rayons vecteurs SC, SC'' & la corde CC''. En effet, des points C, C'' de la trajectoire, abaiſſons ſur la ligne des abſciſſes ASP, les perpendiculaires CP, $C''P'$; & du point C, abaiſſons ſur l'ordonnée $P'C''$, la perpendiculaire Cp'; l'aire CSC'' ſera évidemment égale à la ſurface du triangle CSP, *plus* la ſurface du triangle $Cp'C''$, *plus* la ſurface du parallélogramme $CPP'p'$, *moins* la ſurface du triangle $SP'C''$; mais $SP = \theta$, $PC = v$, $SP' = \theta'''$, $C''P' = v'''$, $Cp' = \theta''' - \theta'$, $P'p' = v''' - v'$; donc l'aire $CSC'' = \frac{1}{2}\theta' v' + \frac{1}{2}(\theta''' - \theta')(v''' - v') + (\theta''' - \theta')v' - \frac{1}{2}\theta''' v''' = \frac{1}{2}(\theta''' v' - \theta' v''')$; donc $M = 2 \times \text{aire}\ CSC''$. Et comme l'on démontre des propriétés analogues, relativement aux quantités Q, H; la propoſition relative à la proportionnalité des grandeurs Q, M, H aux aires rectilignes $C'SC''$, CSC'', CSC' eſt établie. Fig. 7.

(127.) Si l'on multiplie l'équation (7) du *§. 125* par le facteur $QT'\ \text{sin.}\ A' - MT''\ \text{sin.}\ A'' + HT'''\ \text{sin.}\ A'''$; que l'on multiplie pareillement l'équation (8) *du même*

paragraphe, par le facteur $QT' \cos. A' - MT'' \cos. A'' + HT''' \cos. A'''$, & que l'on soustraie ces deux produits l'un de l'autre, l'on aura

$$(1)\quad \begin{aligned} &Q\Delta' \cos. L' [QT' \sin. (B'-A') - MT'' \sin. (B'-A'') + HT''' \sin. (B'-A''')] \\ &- M\Delta'' \cos. L'' [QT' \sin. (B''-A') - MT'' \sin. (B''-A'') + HT''' \sin. (B''-A''')] \\ &+ H\Delta''' \cos. L''' [QT' \sin. (B'''-A') - MT'' \sin. (B'''-A'') + HT''' \sin. (B'''-A''')] = 0, \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2)\quad Q\Delta' \cos. L'\Gamma' - M\Delta'' \cos. L''\Gamma'' + H\Delta''' \cos. L'''\Gamma''' = 0,$$

en supposant d'ailleurs

$$\begin{aligned} \Gamma' &= QT' \sin. (B'-A') - MT'' \sin. (B'-A'') + HT''' \sin. (B'-A'''), \\ \Gamma'' &= QT' \sin. (B''-A') - MT'' \sin. (B''-A'') + HT''' \sin. (B''-A'''), \\ \Gamma''' &= QT' \sin. (B'''-A') - MT'' \sin. (B'''-A'') + HT''' \sin. (B'''-A'''). \end{aligned}$$

Maintenant si, dans l'équation (2), l'on élimine successivement Δ''', Δ'', Δ', au moyen de l'équation (9) du §. *125*, l'on aura

$$(3)\quad \begin{aligned} &Q\Delta' (\sin. L' \cos. L''' \Gamma''' - \sin. L''' \cos. L' \Gamma') \\ &\qquad - M\Delta'' (\sin. L'' \cos. L''' \Gamma''' - \sin. L''' \cos. L'' \Gamma'') = 0; \end{aligned}$$

$$(4)\quad \begin{aligned} &Q\Delta' (\sin. L' \cos. L'' \Gamma'' - \sin. L'' \cos. L' \Gamma') \\ &\qquad - H\Delta''' (\sin. L'' \cos. L''' \Gamma''' - \sin. L''' \cos. L'' \Gamma'') = 0; \end{aligned}$$

$$(5)\quad \begin{aligned} &M\Delta'' (\sin. L'' \cos. L' \Gamma' - \sin. L' \cos. L'' \Gamma'') \\ &\qquad - H\Delta''' (\sin. L''' \cos. L' \Gamma' - \sin. L' \cos. L''' \Gamma''') = 0. \end{aligned}$$

Fig. 7. (128.) Les équations (3), (4) & (5) du *paragraphe précédent*, sont rigoureuses quels que soient les intervalles entre les observations; & si les quantités Q, M, H étoient, par exemple, proportionnelles au temps, le Problème des Comètes seroit complétement résolu avec la dernière facilité. Comme ces mêmes quantités Q, M, H, sont respectivement proportionnelles aux aires rectilignes $C'SC''$, CSC'', CSC', ainsi qu'il a été démontré dans le §. *126*, & que les rapports entre ces espaces rectilignes diffèrent très-peu des rapports entre les espaces curvilignes correspondans, compris entre la

courbe & les rayons vecteurs; que de plus ces derniers espaces sont proportionnels aux temps, en vertu de la théorie des forces centrales; on peut d'abord supposer les quantités H, M, Q respectivement proportionnelles aux temps t, ϑ, t'; on a alors les équations suivantes,

$$(1)\ t'\Delta'(\text{sin. } L' \text{ cos. } L''' \Gamma''' - \text{sin. } L''' \text{ cos. } L' \Gamma') - \vartheta\Delta''(\text{sin. } L'' \text{ cos. } L''' \Gamma''' - \text{sin. } L''' \text{ cos. } L'' \Gamma'') = 0;$$

$$(2)\ t'\Delta'(\text{sin. } L' \text{ cos. } L'' \Gamma'' - \text{sin. } L'' \text{ cos. } L' \Gamma') - t\Delta'''(\text{sin. } L'' \text{ cos. } L''' \Gamma''' - \text{sin. } L''' \text{ cos. } L'' \Gamma'') = 0;$$

$$(3)\ \vartheta\Delta''(\text{sin. } L'' \text{ cos. } L' \Gamma' - \text{sin. } L' \text{ cos. } L'' \Gamma'') - t\Delta'''(\text{sin. } L''' \text{ cos. } L' \Gamma' - \text{sin. } L' \text{ cos. } L''' \Gamma''') = 0;$$

$\Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$ ayant d'ailleurs pour valeurs

$$\Gamma' = t'T' \text{ sin. } (B' - A') - \vartheta T'' \text{ sin. } (B' - A'') + tT''' \text{ sin. } (B' - A''');$$
$$\Gamma'' = t'T' \text{ sin. } (B'' - A') - \vartheta T'' \text{ sin. } (B - A'') + tT''' \text{ sin. } (B'' - A'''),$$
$$\Gamma''' = t'T' \text{ sin. } (B''' - A') - \vartheta T'' \text{ sin. } (B''' - A'') + tT''' \text{ sin. } (B''' - A'''),$$

(129.) Je remarque de plus, que l'orbite de la Terre pouvant être regardée comme circulaire, & décrite d'un mouvement uniforme dans un petit intervalle de temps, les rayons T', T''' peuvent être, sans erreur sensible, supposés égaux à T''; d'ailleurs t, t', ϑ, exprimant par exemple un nombre de minutes de temps, si l'on nomme

r la moyenne distance du Soleil à la Terre,

m l'arc décrit par la Terre pendant une minute, dans un cercle dont le rayon égale r,

l'on a dans le cas dont il s'agit,

$$A' = A'' - mt; \qquad A''' = A'' + mt'.$$

Si l'on substitue ces valeurs à A' & A''', dans les expressions de $\Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$ du §. 128, l'on aura

$$B' - A' = B' - A'' + mt;$$
$$B'' - A' = B'' - A'' + mt;$$
$$B''' - A' = B''' - A'' + mt;$$

$$B' - A''' = B' - A'' - mt';$$
$$B'' - A''' = B'' - A'' - mt';$$
$$B''' - A''' = B''' - A'' - mt'.$$

Mais généralement, en vertu d'un théorème de Taylor, connu de tous les Géomètres, si l'on suppose qu'un angle $B - A$ varie d'une petite quantité $\mp mt$, & que le rayon du cercle soit égal à r, l'on a

$$\text{sin.}(B - A \mp mt) = \text{sin.}(B - A) \mp \frac{mt}{r}\,\text{cos.}(B - A) - \frac{1}{2}\,\frac{m^2 t^2}{r^2}\,\text{sin.}(B - A) \pm \frac{1}{6}\,\frac{m^3 t^3}{r^3}\,\text{cos.}(B - A)\ \&c.$$

Donc, développant le calcul, effaçant les quantités qui se détruisent, & substituant ϑ à $t + t'$, l'on aura

$$\Gamma' = -\frac{1}{2}\,\frac{t t' \vartheta T'' m^2}{r^2}\left[\text{sin.}(B' - A'') - \frac{1}{3}\,\frac{(t - t')m}{r}\,\text{cos.}(B' - A'')\right],$$
$$\Gamma'' = -\frac{1}{2}\,\frac{t t' \vartheta T'' m^2}{r^2}\left[\text{sin.}(B'' - A'') - \frac{1}{3}\,\frac{(t - t')m}{r}\,\text{cos.}(B'' - A'')\right],$$
$$\Gamma''' = -\frac{1}{2}\,\frac{t t' \vartheta T'' m^2}{r^2}\left[\text{sin.}(B''' - A'') - \frac{1}{3}\,\frac{(t - t')m}{r}\,\text{cos.}(B''' - A'')\right].$$

Les équations (1), (2), (3) du §. 128, deviennent par-là,

$$(1)\ t' \Delta' \Big\{\text{sin.}\,L'''\,\text{cos.}\,L'\left[\text{sin.}(B' - A'') - \frac{1}{3}\,\frac{(t - t')m}{r}\,\text{cos.}(B' - A'')\right]$$
$$- \text{sin.}\,L'\,\text{cos.}\,L'''\left[\text{sin.}(B''' - A'') - \frac{1}{3}\,\frac{(t - t')m}{r}\,\text{cos.}(B''' - A'')\right]\Big\}$$
$$- \vartheta \Delta'' \Big\{\text{sin.}\,L'''\,\text{cos.}\,L''\left[\text{sin.}(B'' - A'') - \frac{1}{3}\,\frac{(t - t')m}{r}\,\text{cos.}(B'' - A'')\right]$$
$$- \text{sin.}\,L''\,\text{cos.}\,L'''\left[\text{sin.}(B''' - A'') - \frac{1}{3}\,\frac{(t - t')m}{r}\,\text{cos.}(B''' - A'')\right]\Big\} = 0;$$

$$(2)\ t'\Delta'\Big\{\text{fin. } L''\text{cof. } L'\Big[\text{fin. }(B'-A'')-\tfrac{1}{3}\frac{(t-t')m}{r}\text{cof. }(B'-A'')\Big]$$

$$-\text{fin. } L'\ \text{cof. } L''\Big[\text{fin. }(B''-A'')-\tfrac{1}{3}\frac{(t-t')m}{r}\text{cof. }(B''-A'')\Big]\Big\}$$

$$-t\Delta'''\Big\{\text{fin. } L'''\text{cof. } L''\Big[\text{fin. }(B''-A'')-\tfrac{1}{3}\frac{(t-t')m}{r}\text{cof. }(B''-A'')\Big]$$

$$-\text{fin. } L''\ \text{cof. } L'''\Big[\text{fin. }(B'''-A'')-\tfrac{1}{3}\frac{(t-t')m}{r}\text{cof. }(B'''-A'')\Big]\Big\}=0;$$

$$(3)\ \vartheta\Delta''\Big\{\text{fin. } L'\text{cof. } L''\Big[\text{fin. }(B''-A'')-\tfrac{1}{3}\frac{(t-t')m}{r}\text{cof. }(B''-A'')\Big]$$

$$-\text{fin. } L''\ \text{cof. } L'\Big[\text{fin. }(B'-A'')-\tfrac{1}{3}\frac{(t-t')m}{r}\text{cof. }(B'-A'')\Big]\Big\}$$

$$-t\Delta'''\Big\{\text{fin. } L'\text{cof. } L'''\Big[\text{fin. }(B'''-A'')-\tfrac{1}{3}\frac{(t-t')m}{r}\text{cof. }(B'''-A'')\Big]$$

$$-\text{fin. } L'''\ \text{cof. } L'\Big[\text{fin. }(B'-A'')-\tfrac{1}{3}\frac{(t-t')m}{r}\text{cof. }(B'-A'')\Big]\Big\}=0;$$

ou enfin

$$(4)\ t'\mu''\Delta'-\vartheta\mu'\Delta''=0;$$
$$(5)\ t'\mu'''\Delta'-t\mu'\Delta'''=0;$$
$$(6)\ t\mu''\Delta'''-\vartheta\mu'''\Delta''=0;$$

en confervant les définitions de μ', μ'', μ''' des §§. 32 & 121; dans le cas toutefois où les intervalles entre les obfervations feroient égaux, ou que l'on croiroit pouvoir négliger les troifièmes puiffances du petit accroiffement de l'arc de l'orbite terreftre, divifé par le rayon.

(130.) Nous remarquerons enfin, pour la facilité de l'évaluation du petit accroiffement m, que fi l'on nomme

r la moyenne diftance de la Terre au Soleil,
s l'arc que la Terre décrit autour du Soleil, à cette diftance, pendant une minute de temps,
T'' la diftance actuelle de la Terre au Soleil,

l'on a

$$(1)\ m=\frac{s\,r^2}{T''^2}.$$

Cette propofition fe déduit facilement de la propriété

des trajectoires décrites en vertu d'une force centrale, dans lesquelles les aires sont proportionnelles aux temps. En effet, si l'on suppose les temps égaux, l'on aura généralement (*§. 4*) $R^2 dv - R'^2 dv' = 0$, R, R', v, v' étant les rayons vecteurs & les angles correspondans compris entre ces rayons; or on peut supposer dans le cas dont il s'agit, que $R = r$; $v = s$; $R' = T''$; $v' = m$; la proposition est donc démontrée.

(131.) Il est aisé de remarquer que les équations (4), (5) & (6) du *§. 129* sont identiquement les mêmes que celles des *§§. 32 & suivans;* ces équations ont donc l'inconvénient relevé dans le *§. 128*, c'est-à-dire de supposer les quantités Q, M, H proportionnelles aux temps ; il faut faire voir que cet inconvénient est nul dans la totalité des Comètes que l'on observe. C'est spécialement dans ces recherches que nous aurons recours aux principes développés par M. de la Grange, car jusqu'ici les équations sont indépendantes de ses principes.

Du principe de mécanique employé par M. de la Grange.

(132.) Si l'on nomme

$\left.\begin{matrix}\theta' \\ \theta'' \\ \theta'''\end{matrix}\right\}$ les trois abscisses successives de la trajectoire de la Comète, prises sur le plan de son orbite, & correspondantes à trois observations séparées par de petits intervalles de temps,

$\left.\begin{matrix}v' \\ v'' \\ v'''\end{matrix}\right\}$ les ordonnées correspondantes,

φ le temps écoulé depuis une certaine époque, jusqu'à l'instant de la seconde observation,

t le temps écoulé entre la première observation & la seconde,

t' le temps écoulé entre la seconde observation & la troisième,

ϑ le temps écoulé entre la première observation & la troisième;

il est sensible, qu'en général, les abscisses θ', θ'', θ''', ainsi que les ordonnées v', v'', v''', peuvent être regardées comme des

fonctions de la force centrale & du temps écoulé depuis l'époque dont il s'agit. Donc les quantités θ'', v'', doivent donner θ', v', θ''', v''', en y changeant φ en $\varphi - t$, & $\varphi + t'$; donc, en vertu du théorème de Taylor déjà cité,

$$\theta' = \theta'' - \frac{d\theta''}{d\varphi} t + \frac{1}{2} \frac{d^2\theta''}{d\varphi^2} t^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3\theta''}{d\varphi^3} t^3 + \&c.$$

$$v' = v'' - \frac{dv''}{d\varphi} t + \frac{1}{2} \frac{d^2 v''}{d\varphi^2} t^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3 v''}{d\varphi^3} t^3 + \&c.$$

$$\theta''' = \theta'' + \frac{d\theta''}{d\varphi} t' + \frac{1}{2} \frac{d^2\theta''}{d\varphi^2} t'^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3\theta''}{d\varphi^3} t'^3 + \&c.$$

$$v''' = v'' + \frac{dv''}{d\varphi} t' + \frac{1}{2} \frac{d^2 v''}{d\varphi^2} t'^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3 v''}{d\varphi^3} t'^3 + \&c.$$

(133.) Il faut faire voir maintenant que si l'on suppose constante la force accélératrice qui engendre la courbure de la trajectoire de la Comète, les séries qui expriment les valeurs de θ', v', θ''', v''' s'arrêtent; & qu'il est facile de donner à θ', v', θ''', v''', des expressions plus commodes que celles du *paragraphe précédent.* Cette supposition d'une force accélératrice constante pendant la durée des observations, est la seule qui s'oppose à la rigueur de la solution; mais il est aisé de voir qu'elle influe infiniment peu sur l'exactitude des résultats, lorsque l'on suppose les durées très-petites.

(134.) Soit

r la moyenne distance de la Terre au Soleil;

F la force centrale du Soleil à la distance r: cette force se mesure par l'espace parcouru dans un temps donné; ainsi, par exemple, pour une minute de temps, la quantité F est le sinus verse de l'arc moyen de la Terre, parcouru pendant une minute;

R'' le rayon vecteur de la Comète, lors de la seconde observation;

il est évident que la force centrale qui agit sur la Comète

à la distance R'', a pour expression $\frac{Fr^2}{R''^2}$. Cette force agit toute entière dans le sens du rayon vecteur ; & si on la décompose suivant les coordonnées θ'' & v'' de la trajectoire, il est clair que la force qui agit suivant l'abscisse θ'', aura pour expression $\frac{Fr^2\theta''}{R''^3}$, & que la force qui agit suivant l'ordonnée v'', aura pour expression $\frac{Fr^2v''}{R''^3}$. On sait en général, que la différentielle de la vîtesse est à la différentielle du temps, comme la force accélératrice est à l'unité; de plus, $\frac{d\theta''}{d\varphi}$ est évidemment l'expression de la vîtesse dans la direction de l'abscisse θ''; donc en supposant $d\varphi$ constant, $\frac{d^2\theta''}{d\varphi}$ est la différentielle de la vîtesse, suivant la même direction; d'ailleurs, $\frac{Fr^2\theta''}{R''^3}$ est l'expression de la force accélératrice qui agit dans le sens de l'abscisse θ''; donc en vertu de ce qui vient d'être dit, $\frac{d^2\theta''}{d\varphi} : d\varphi :: \frac{Fr^2\theta''}{R''^3} : 1$; donc

$$(1)\quad \frac{d^2\theta''}{d\varphi^2} + \frac{Fr^2\theta''}{R''^3} = 0.$$

J'ai mis le signe $+$ devant le second terme, parce que la force centrale tend à diminuer la vîtesse, suivant la direction θ''.

Par des raisonnemens analogues, on prouve que

$$(2)\quad \frac{d^2v''}{d\varphi^2} + \frac{Fr^2v''}{R''^3} = 0.$$

(135.) Il est aisé de conclure de-là, que les séries qui expriment les valeurs de $\theta', v', \theta''', v'''$, s'arrêtent après le troisième terme. En effet $\frac{d^3\theta''}{d\varphi^3} = d\left(\frac{d^2\theta''}{d\varphi^2}\right)$; or $\frac{d^2\theta''}{d\varphi^2}$ est, par la supposition, égal à $\frac{Fr^2\theta''}{R''^3}$, & cette quantité est constante, si l'on suppose

ſuppoſe la force centrale conſtante ; donc $\frac{d^3\theta''}{d\varphi^3} = 0$, dans cette ſuppoſition, ainſi que les termes ſuivans. Donc les ſéries qui expriment θ', θ''', s'arrêtent après le troiſième terme; & comme l'on peut dire la même choſe des ſéries qui expriment v', v''', on aura enfin

$$\theta' = \theta'' - \frac{d\theta''}{d\varphi}\, t - \frac{1}{2}\,\frac{F r^2 \theta''}{R''^3}\, t^2;$$

$$v' = v'' - \frac{d v''}{d\varphi}\, t - \frac{1}{2}\,\frac{F r^2 v''}{R''^3}\, t^2;$$

$$\theta''' = \theta'' + \frac{d\theta''}{d\varphi}\, t' - \frac{1}{2}\,\frac{F r^2 \theta''}{R''^3}\, t'^2;$$

$$v''' = v'' + \frac{d v''}{d\varphi}\, t' - \frac{1}{2}\,\frac{F r^2 v''}{R''^3}\, t'^2.$$

(136.) Nous avons dit que dans les derniers calculs, la force centrale étoit regardée comme conſtante. M. de la Grange, dans ſon Mémoire, ne parle point de cette ſuppoſition, & il ſe contente de dire, que dans les expreſſions de θ', v', θ''', v''', il néglige les termes ultérieurs aux troiſièmes termes des ſéries, comme infiniment petits. Cette manière d'enviſager la queſtion revient préciſément à regarder la force centrale comme conſtante pendant la petite durée des obſervations que l'on compare. J'aurois donc pu énoncer la queſtion de la même manière que M. de la Grange; mais j'ai préféré de donner une idée des termes que l'on néglige, en énonçant préciſément le principe auquel cette négligence peut être rapportée.

De la forme rigoureuſe des équations du §. 32.

(137.) Nous avons vu *(§. 125)* que

$$H = \theta'' v' - \theta' v''; \quad M = \theta''' v' - \theta' v'''; \quad Q = \theta''' v'' - \theta'' v'''.$$

Si dans ces dernières expreſſions, l'on ſubſtitue à θ', v', θ''', v''', leurs valeurs tirées du *§. 135*, l'on aura

$$H = \frac{v'' d\theta'' - \theta'' d v''}{d\varphi}\, t;$$

$$M = \frac{v'' d\theta'' - \theta'' d v''}{d\varphi}\, \vartheta (1 - \tfrac{1}{2} \tfrac{F r^2}{R''^3}\, t t');$$

$$Q = \frac{v'' d\theta'' - \theta'' d v''}{d\varphi}\, t'.$$

Si l'on ſubſtitue ces valeurs de H, M, Q dans les expreſſions de Γ', Γ'', Γ''' du ſ. *127*, & que l'on ſuive une analyſe entièrement ſemblable à celle du ſ. *129*, l'on aura, dans le cas des intervalles égaux entre les obſervations, ou dans le cas que l'on croiroit pouvoir négliger les troiſièmes puiſſances du petit accroiſſement de l'arc de l'orbite terreſtre diviſé par le cube du rayon; l'on aura, dis-je,

$$\Gamma' = - \frac{v'' d\theta'' - \theta'' d v''}{d\varphi} \left[\frac{\vartheta t t'}{2}\, T''^3 \left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{F r^2}{R''^3}\right) \text{ſin.} (B' - A')\right];$$

$$\Gamma'' = - \frac{v'' d\theta'' - \theta'' d v''}{d\varphi} \left[\frac{\vartheta t t'}{2}\, T''^2 \left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{F r^2}{R''^3}\right) \text{ſin.} (B'' - A')\right];$$

$$\Gamma''' = - \frac{v'' d\theta'' - \theta'' d v''}{d\varphi} \left[\frac{\vartheta t t'}{2}\, T''^2 \left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{F r^2}{R''^3}\right) \text{ſin.} (B''' - A')\right];$$

donc, en ſubſtituant ces valeurs dans les équations (3), (4) & (5) du ſ. *127*, & conſervant les définitions de μ', μ'', μ''', du ſ. *32*, l'on aura

$$(1)\quad t'\mu''\Delta' - \vartheta (1 - \tfrac{1}{2} \tfrac{F r^2}{R''^3}\, t t')\, \mu'\Delta'' = 0;$$

$$(2)\quad t'\mu'''\Delta' - t\mu'\Delta''' = 0;$$

$$(3)\quad t\mu''\Delta''' - \vartheta (1 - \tfrac{1}{2} \tfrac{F r^2}{R''^3}\, t t')\, \mu'''\Delta'' = 0.$$

(138.) L'équation (2) du *paragraphe précédent*, eſt identiquement la même que l'équation (2) du ſ. *32*; mais les équations (1) & (3) diffèrent des équations (1) & (3) du ſ. *32*, par le petit coëfficient $- \tfrac{1}{2} \tfrac{F r^2}{R''^3}\, t t'$. Si l'on conſidère cependant que F étant le ſinus verſe de l'arc de l'orbite

terrestre décrit pendant une minute de temps, ce petit coëfficient ne peut être qu'infiniment petit par rapport à l'unité, dans les cas où le rayon vecteur de la Comète n'est pas lui-même très-petit, circonstance qui empêcheroit la Comète de pouvoir être observée, puisqu'alors elle seroit plongée dans les rayons du Soleil; on sera tenté de conclure que dans tous les cas, ce coëfficient peut être négligé, & que les équations du *paragraphe précédent* coïncident avec celles du *§. 32.* Au reste, je vais faire voir que quand même on s'en tiendroit rigoureusement aux équations du *§. 137,* aucunes des conclusions de ce Mémoire ne seroient dérangées.

RÉPONSE à l'Objection que l'on pourroit faire contre les Méthodes de ce Mémoire, tirée de la forme des équations du §. 137.

(139.) On pourroit faire contre les méthodes de ce Mémoire, une objection tirée de la forme des équations du *§. 137.* Voici l'objection dans toute sa force.

Vous avez affirmé, dira-t-on, que le Problème des Comètes se ramenoit au second degré; mais vous avez exigé pour condition essentielle que l'on ait des équations de la forme suivante *(§. 25),*

$$\Delta''' = P\Delta', \qquad \Delta'' = P'\Delta',$$

P, P' étant des quantités connues; or vous ne remplissez point cette condition. En effet, vous avez bien *[§. 137, équation (2)]* une équation de la forme requise entre Δ''' & Δ'; mais l'équation entre Δ'' & Δ', renferme la variable dans l'expression de P'; puisque *[§. 137, équation (1)]* P' suppose la connoissance de R'', qui dépend elle-même de la distance de la Comète à la Terre.

Je pourrois d'abord répondre, que si l'on n'admet point la forme des équations du *§. 32* comme rigoureuse, on ne peut au moins s'empêcher de convenir que ces équations ne soient très-près d'être exactes; d'où je conclurois qu'il

eſt poſſible, ſans compliquer le calcul, d'avoir égard au coëfficient $\frac{1}{2} . \frac{F r^2}{R''^3} t t'$. On feroit alors un premier calcul, dans lequel on négligeroit ce coëfficient; l'on en concluroit la valeur approchée de la diſtance de la Comète à la Terre, lors de l'obſervation Δ''; l'on calculeroit enſuite la valeur correſpondante de R'', par l'équation (2) du ſ. 39, & l'on rectifieroit les réſultats, en faiſant entrer dans un nouveau calcul, le petit terme $\frac{1}{2} \frac{F r^2}{R''^3} t t'$ qui ſeroit connu. L'on auroit alors une équation $\Delta'' = P' \Delta'$ de la forme requiſe dans le ſ. 32. Je pourrois ajouter que les valeurs de $\Delta', \Delta'', \Delta'''$, données par M. de la Grange, ſuppoſent les équations (1), (2), (3) du ſ. 32; mais, ſans nous arrêter à cette réponſe indirecte, nous remarquerons que tout conſiſte à faire entrer dans le calcul une nouvelle obſervation. En effet, ſoient

$\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta''''$, les obſervations que je déſigne par les diſtances correſpondantes $\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta''''$, de la Comète à la Terre, lors de ces obſervations.

Il eſt évident, que ſi l'on conſidère d'abord les obſervations $\Delta', \Delta'', \Delta'''$, l'on aura rigoureuſement [ſ. 137, équat. (2)] entre Δ' & Δ''', une équation de la forme de celle dont eſt queſtion dans le ſ. 32, & dans laquelle, en ſuppoſant $\Delta''' = P' \Delta'$, P' ne renfermera point d'inconnues. Conſidérons maintenant les obſervations $\Delta', \Delta'', \Delta''''$, l'on aura, par la même raiſon, entre Δ' & Δ'''', une équation de la forme de celles dont eſt queſtion dans le ſ. 32, & dans laquelle, en ſuppoſant $\Delta'''' = P \Delta'$, P ne renfermera point d'inconnues. On peut donc ſatisfaire rigoureuſement aux conditions preſcrites pour ramener le Problème au ſecond degré.

On ſatisferoit également à la condition, en conſidérant les obſervations $\Delta''', \Delta'''', \Delta'''''$, & en cherchant le rapport entre Δ''' & Δ'''''. Car, conformément aux remarques du ſ. 33, on concluera facilement le rapport entre Δ' & Δ'''''; l'on

aura donc les rapports entre Δ' & Δ''', Δ' & Δ''''', ſans que ces rapports renferment d'inconnues, & la condition ſera remplie.

(140.) On pourroit encore objecter que l'équation (2) du ſ. 137 ne renfermant aucun terme qui dépende de la loi de la force centrale, on auroit la même équation, ſi la force centrale étoit nulle, & ſi par conſéquent la trajectoire étoit rectiligne; le Problème propoſé n'eſt donc réſolu, dira-t-on, que pour le cas de la trajectoire rectiligne.

Je réponds que la conſéquence n'eſt pas exacte. Il eſt bien vrai, que quelle que ſoit la loi de la force centrale, les diſtances de la Comète à la Terre ſont combinées d'une manière ſemblable avec les obſervations; mais comme les obſervations ſont différentes, ſuivant la loi de la force centrale, il ſuit ſeulement, que l'on combine d'une manière ſemblable des quantités différentes. Le réſultat, relativement aux diſtances de la Comète à la Terre, eſt donc différent dans les diverſes hypothèſes des forces centrales, non à raiſon de l'équation, mais à raiſon des obſervations.

Du cas particulier où les latitudes de la Comète ſont très-petites.

(141.) On pourroit penſer que ſi les latitudes de la Comète étoient très-petites, les méthodes de ce Mémoire ſeroient ſujettes à quelques inconvéniens. En effet, tous les termes des équations, par leſquels on détermine, ſoit les rapports des diſtances de la Comète à la Terre, ſoit les valeurs abſolues de ces diſtances, renfermant les ſinus des latitudes de la Comète, il ſeroit à craindre que la moindre erreur dans les latitudes ne mît la méthode en défaut; puiſque les erreurs ſur les latitudes ſeroient du même ordre que les latitudes. L'objection ſeroit bien plus forte, ſi la Comète ſe mouvoit dans le plan de l'Écliptique, car alors on n'auroit plus d'équations.

Je pourrois d'abord répondre qu'il eſt toujours facile

d'éviter l'inconvénient dont il vient d'être queſtion, en interpolant les latitudes, & en rectifiant les obſervations; je pourrois dire enſuite que la méthode étant générale, on ne peut avec juſtice, objecter l'inconvénient d'un cas particulier; mais ſans entrer dans cette diſcuſſion, voici le procédé qu'il faudroit ſuivre.

(142.) Nous avons vu (§. 125) que pour trois obſervations Δ', Δ'', Δ''', l'on a les équations ſuivantes,

$$(1)\ \left.\begin{array}{l} QT'\text{coſ.}A' - MT''\text{coſ.}A'' + HT'''\text{coſ.}A''' - Q\Delta'\text{coſ.}B'\text{coſ.}L' \\ \quad + M\Delta''\text{coſ.}B''\text{coſ.}L'' - H\Delta'''\text{coſ.}B'''\text{coſ.}L''' \end{array}\right\} = 0.$$

$$(2)\ \left.\begin{array}{l} QT'\text{ſin.}A' - MT''\text{ſin.}A'' + HT'''\text{ſin.}A''' - Q\Delta'\text{ſin.}B'\text{coſ.}L' \\ \quad + M\Delta''\text{ſin.}B''\text{coſ.}L'' - H\Delta'''\text{ſin.}B'''\text{coſ.}L''' \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on multiplie l'équation (1) par ſin. B''', que l'on multiplie pareillement l'équation (2) par coſ. B''', & que l'on ſouſtraie ces deux nouvelles équations l'une de l'autre, l'on aura

$$(3)\ QT'\text{ſin.}(B''' - A') - MT''\text{ſin.}(B''' - A'') + HT'''\text{ſin.}(B''' - A''') \\ - Q\Delta'\text{coſ.}L'\text{ſin.}(B''' - B') + M\Delta''\text{coſ.}L''\text{ſin.}(B''' - B'') = 0,$$

ou plutôt, en ſubſtituant t à H, t' à Q, & $\vartheta(1 - \frac{1}{2}\frac{Fr^2tt'}{R''^3})$ à M.

$$(4)\ t'T'\text{ſin.}(B''' - A') - \vartheta(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Fr^2tt'}{R''^3})T''\text{ſin.}(B''' - A'') \\ + tT'''\text{ſin.}(B''' - A''') - t'\Delta'\text{coſ.}L'\text{ſin.}(B''' - B') \\ + \vartheta(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Fr^2tt'}{R''^3})\Delta''\text{coſ.}L''\text{ſin.}(B''' - B'') = 0.$$

L'on aura pareillement pour trois obſervations, Δ', Δ'', Δ'''',

$$(5)\ t''T'\text{ſin.}(B'''' - A') - \vartheta'(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Fr^2tt''}{R''^3})T''\text{ſin.}(B'''' - A'') \\ + tT''''\text{ſin.}(B'''' - A'''') - t''\Delta'\text{coſ.}L'\text{ſin.}(B'''' - B') \\ + \vartheta'(1 - \tfrac{1}{2}\frac{Fr^2tt''}{R''^3})\Delta''\text{coſ.}L''\text{ſin.}(B'''' - B'') = 0.$$

Dans ces équations, nous entendons par

t le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſerv. Δ' & Δ'';

t' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſerv. Δ'' & Δ''';

ϑ le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſerv. Δ' & Δ''';

t'' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſerv. Δ'' & Δ'''';

ϑ' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'obſerv. Δ' & Δ''''.

(143.) Si l'on élimine Δ' cof. L', au moyen des équations (4) & (5) du *paragraphe précédent*, l'on aura

$$
\begin{aligned}
(1)\; & t' t'' T' [\text{ſin.}(B''' - A')\, \text{ſin.}(B'''' - B') - \text{ſin.}(B'''' - A')\, \text{ſin.}(B''' - B')] \\
& - T'' [\vartheta t'' (1 - \tfrac{1}{2} \tfrac{F r^2 t t'}{R''^3})\, \text{ſin.}(B''' - A'')\, \text{ſin.}(B'''' - B') \\
& - \vartheta' t' (1 - \tfrac{1}{2} \tfrac{F r^2 t t''}{R''^3})\, \text{ſin.}(B'''' - A'')\, \text{ſin.}(B''' - B')] \\
& + t t'' T''' \,\text{ſin.}(B''' - A''')\, \text{ſin.}(B'''' - B') \\
& - t t' T'''' \,\text{ſin.}(B'''' - A'''')\, \text{ſin.}(B''' - B') \\
& + \Delta'' \text{cof.}\, L'' [\vartheta t'' (1 - \tfrac{1}{2} \tfrac{F r^2 t t'}{R''^3})\, \text{ſin.}(B''' - B'')\, \text{ſin.}(B'''' - B') \\
& - \vartheta' t' (1 - \tfrac{1}{2} \tfrac{F r^2 t t''}{R''^3})\, \text{ſin.}(B'''' - B'')\, \text{ſin.}(B''' - B')] = 0.
\end{aligned}
$$

(144.) Il eſt donc évident, qu'au moyen des équations de ce Mémoire, on peut réſoudre le cas particulier où les latitudes de la Comète ſeroient très-petites & même nulles. Il eſt vrai que le Problème eſt alors d'un degré élevé; mais il ſe ramèneroit au premier, ſi, conformément aux remarques du *§. 139*, l'on croyoit pouvoir négliger les petits termes $\frac{1}{2} \frac{F r^2 t t'}{R''^3}$, $\frac{1}{2} \frac{F r^2 t t''}{R''^3}$ *.

* M. de la Place, dans un Mémoire lû à l'Académie, a réſolu ce dernier Problème, & en-général les principales queſtions relatives aux Comètes; mais il a employé une analyſe entièrement différente de la mienne. Je m'empreſſe d'annoncer ſon travail.

(145.) L'on ſait que le Problème des Comètes n'exige que cinq obſervations, trois de longitudes & deux de latitudes, ou réciproquement ; cependant la détermination des valeurs de μ', μ'', μ''', renferme trois longitudes & trois latitudes de la Comète, ce qui pourroit faire croire que l'on a employé plus d'obſervations qu'il n'eſt néceſſaire. Mais l'on ſera bientôt détrompé, lorſque l'on réfléchira que la détermination de l'orbite des Comètes n'exige en effet que cinq obſervations, lorſque l'on ſuppoſe l'orbite parabolique. Lorſqu'au contraire l'on ſuppoſe en général que l'orbite eſt une ſection conique, alors il faut ſix obſervations, puiſque la ſolution peut également amener l'ellipſe ou l'hyperbole.

(146.) Les méthodes de ce Mémoire, conſidérées du côté de la théorie, me paroiſſent très-exactes ; & ſi leur uſage découvroit quelqu'inexactitude dans les réſultats, je ne doute point qu'on ne dût l'attribuer à l'inexactitude des obſervations.

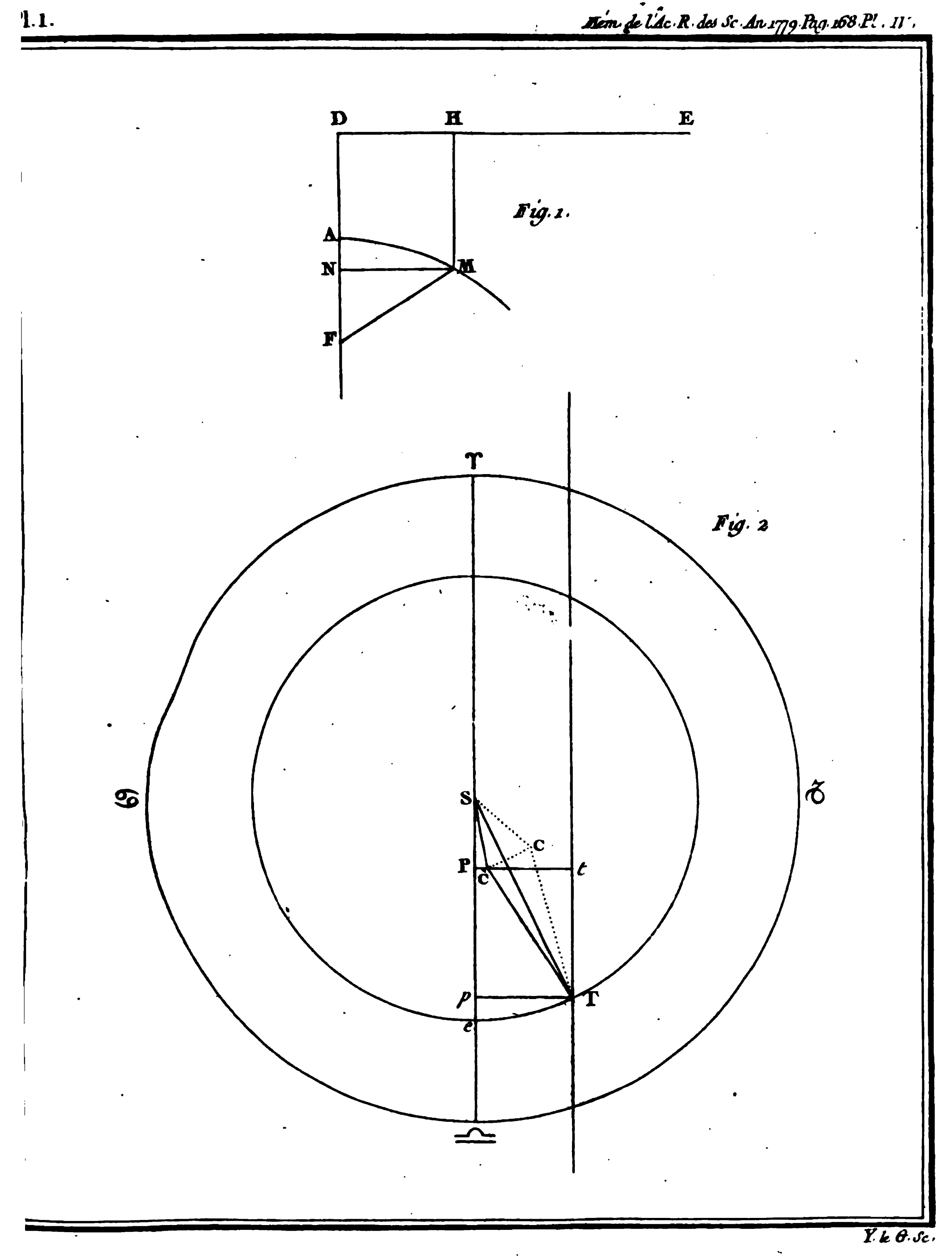
REMARQUES ſur l'évaluation de la quantité F; *ſur la méthode du* §. 36; *&* *ſur les équations (1) & (1) des* §§. 24, 25; *(2) & (4) des* §§. 18 & 93.

(147.) Je terminerai cette analyſe en faiſant remarquer que dans le *§. 134*, nous n'avons donné à la quantité F que la moitié de ſa valeur; je m'empreſſe de rectifier cette erreur *.

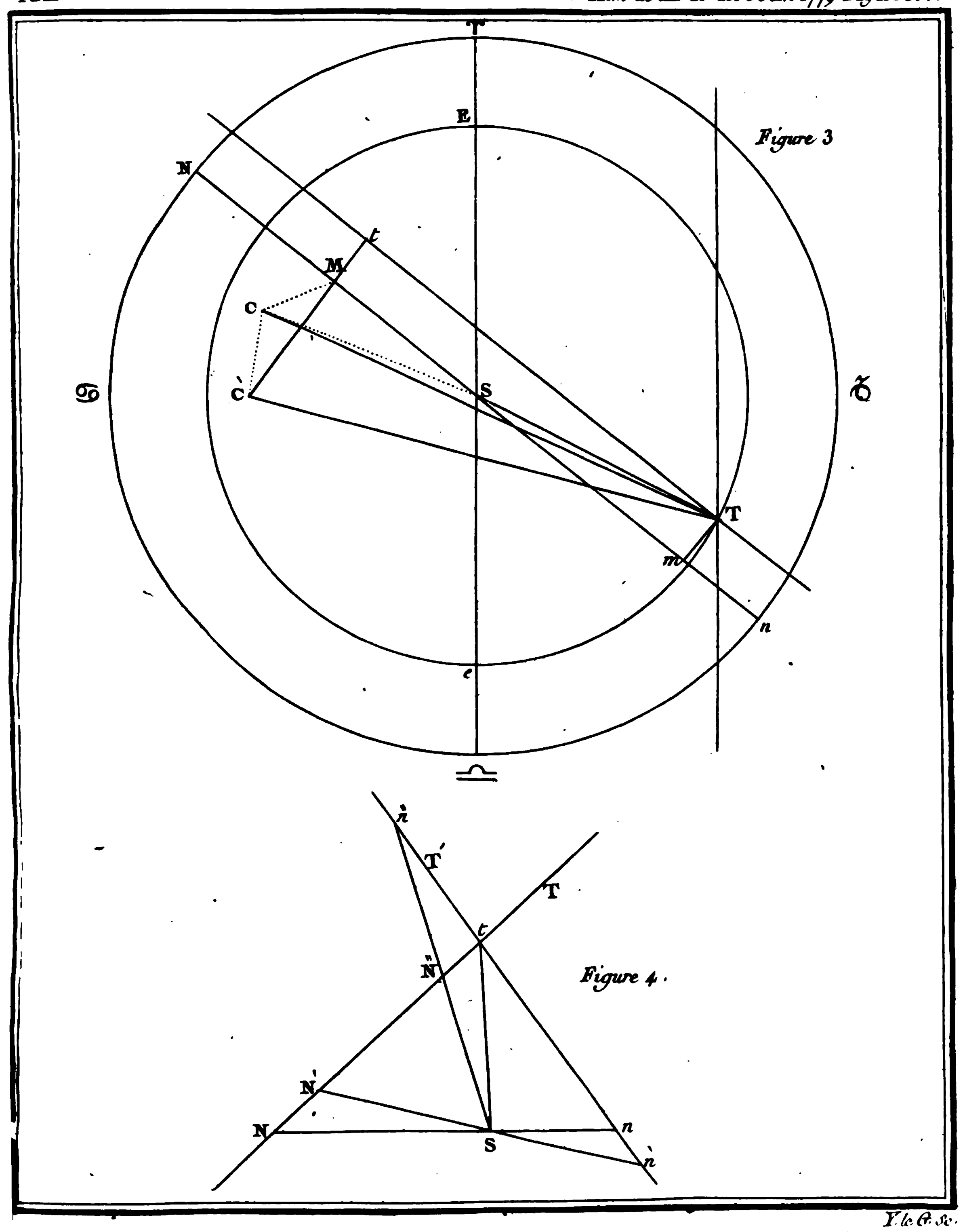
J'obſerverai auſſi que la méthode du *§. 36* étant fondée ſur des propriétés de la parabole, ne doit être employée qu'autant que l'on ſuppoſe que la trajectoire de la Comète eſt parabolique. J'obſerverai enfin, que l'équation (1) du *§. 24*, ſuppoſe uniquement que la Comète ſe meut dans un même plan. L'équation (1) du *§. 25*, ſuppoſe de plus, que la force centrale eſt en raiſon inverſe du quarré des diſtances ; les équations (2) & (4) des *§§. 18 & 93*, particulariſent la ſection conique.

* Si l'on ſuppoſe $\log. r = 10{,}0000000$, l'on a $\log. \frac{1}{2} Fr^2 = 19{,}8534094$.

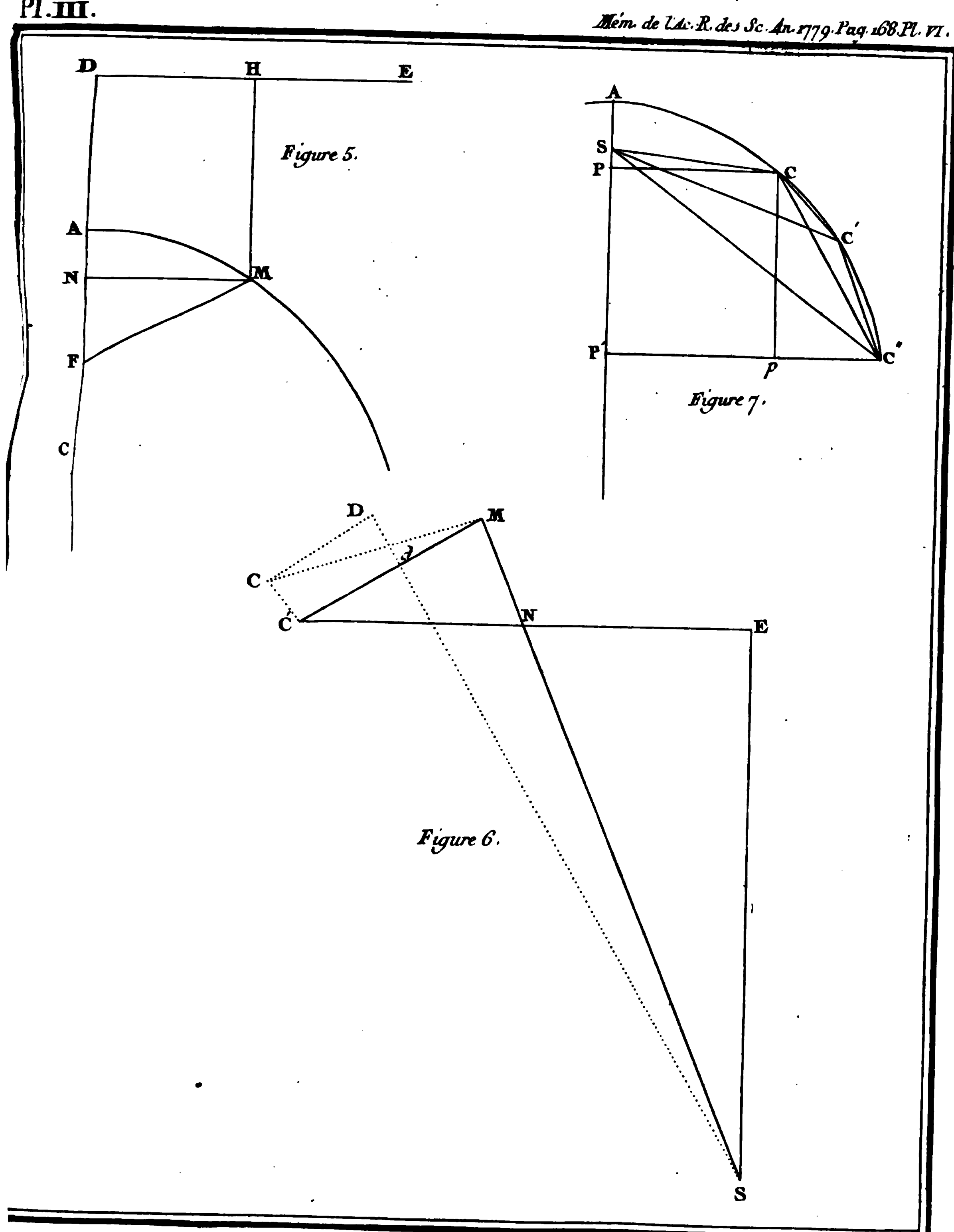
OBSERVATION



Y. le G. Sc.



Y. le G. Sc.



Y. le G. Sc.

OBSERVATION

DE L'ÉCLIPSE DE LUNE,

Faite à l'Obſervatoire de la Marine, la nuit du 29 au 30 Mai 1779.

Par M. MESSIER.

LE Ciel fut couvert pendant la journée du 29 Mai; vers les 8 heures du ſoir, il tomba une petite pluie d'orage; vers les 9 heures, le ciel s'éclaircit, & toute la nuit du 29 au 30 le ciel fut ſerein. Le 29, vers les 10 heures du ſoir, je comparai la Lune à l'étoile *ω* d'*Ophiucus*, cinquième grandeur; j'en rapporterai les obſervations faites à ma lunette achromatique, garnie d'un micromètre à fils. Lû le 2 Juin 1779.

J'ai employé la même lunette pour l'obſervation de l'Écliple de Lune: le commencement de l'Écliple, ſuivant le Livre de la *Connoiſſance des Temps*, devoit avoir lieu le 30 Mai à $3^h\,15'$ du matin; ſon immerſion à $4^h\,25'$; la Lune alors devoit être couchée: de manière que je n'ai pu obſerver que le commencement de l'Écliple, l'entrée des premières taches dans l'ombre & la diſtance des cornes de l'ombre. L'ombre ſur la Lune ſe diſtinguoit très-bien d'avec la pénombre; le ciel étoit beau & la Lune bien terminée: voici mes obſervations.

La Lune comparée à l'étoile *ω* d'*Ophiucus*, la Pendule réglée ſur les fixes, & le fil du micromètre ſuivant le parallèle de l'Étoile.

ANNÉE 1779.	PASSAGES à la PENDULE.	TEMPS vrai des PASSAGES	DIFFÉR. de HAUT.	
	H. M. S.	H. M. S.	M. S.	
Mai 29	14.22.20	9.57. 2½	......	1.er & 2.e bord de la Lune au fil horaire.
	14.24.32½	9.59.14½	......	
	14.28.51	....	10. 15½	ω d'*Ophiucus*, supérieur au bord supér. de la Lune.
	14.32.48½	10. 7.29½	......	1.er & 2.e bord de la Lune au fil horaire.
	14.35. 2	10. 9.42	......	
	14.39. 4½	....	12. 3¾	ω d'*Ophiucus*, supérieur au bord supér. de la Lune.

A $15^h\ 1'$, Temps vrai, diamètre de la Lune, mesuré suivant son parallèle, & trouvé de $29'\ 43''\ \frac{1}{2}$.

OBSERVATIONS de l'Éclipse.

ANNÉE 1779.	TEMPS vrai.	
	H. M. S.	
Mai 29	15. 2. 52	la pénombre commence à être sensible au bord de la Lune.
	15. 9. 21	la pénombre augmentée.
	15. 10. 51	commencement de l'Éclipse ou de l'ombre entre *Grimaldus* & *Schikardus*; 22 minutes du bord supérieur de la Lune, mesuré au micromètre, suivant le mouvement horaire des Étoiles.
	15. 15. 20	l'ombre à *Grimaldus*.
	15. 16. 20	*Grimaldus* à moitié dans l'ombre.
	15. 16. 20	l'ombre à *Schikardus*.
	15. 18. 25	l'ombre touche *Mare humorum*.
	15. 20. 19	*Mare humorum* à moitié dans l'ombre.
	15. 22. 34	l'ombre couvre *Mare humorum*.
	15. 24. 19	l'ombre à *Capuanus*.

ANNÉE 1779.	TEMPS vrai. H. M. S.	
Mai 29	15. 27. 3	l'ombre à *Keplerus*.
	15. 28. 48	*Keplerus* à moitié dans l'ombre.
	15. 29. 57	l'ombre à *Tycho*.
	15. 30. 48	*Tycho* à moitié dans l'ombre.
	15. 30. 58	*Keplerus* dans l'ombre.
	15. 31. 37	*Tycho* dans l'ombre.
	15. 32. 37	l'ombre à *Ariſtarchus*.
	15. 35. 1	l'ombre au bord de *Copernicus*.
	15. 36. 22	le dernier bord de la Lune ceſſe de paroître derrière des cheminées pour ne plus être viſible.

Diſtance des Cornes en parties de degré.

TEMPS vrai. H. M. S.	DISTANC. des CORNES. M. S.
15. 18. 0	14. 0
15. 20. 54	17. 2
15. 27. 3	22. 0



OBSERVATIONS DE L'ÉCLIPSE DE SOLEIL, DU 14 JUIN 1779,

Observée à Paris, de l'Observatoire de la Marine.

Par M. MESSIER.

Lû le 16 Juin 1779.

L'ÉCLIPSE de Soleil du 14 Juin, devoit avoir lieu, suivant le Calcul de M. Jeaurat, présenté à l'Académie dans la Séance du 12; le commencement à Paris, à $7^h 29' 13''$ du matin; son milieu, à $8^h 5'$; sa fin, à $8^h 43' 54''$; & sa grandeur, de $6' 23''$ de degré.

Le 12 Juin, j'avois réglé ma pendule, & je connoissois parfaitement sa marche, par vingt-une hauteurs correspondantes du bord supérieur du Soleil, qui s'accordoient toutes à la même seconde, & par les midis observés à mon instrument des passages.

Le 14 au matin, le ciel ne donnoit aucune espérance de faire l'observation, il étoit entièrement couvert, & les nuages venoient du Midi, de manière que le commencement n'a pas été observé. Vers les $7^h 50'$, le ciel s'étoit un peu éclairci, & le Soleil paroissoit foiblement à travers des nuages rares; l'Éclipse alors étoit déjà très-sensible. A $7^h 53' 18''$ de temps vrai, je commençai mes observations en y employant une lunette achromatique de 3 pieds $\frac{1}{2}$, à triple objectifs, montée sur une machine parallactique, & garnie d'un micromètre à fils qui s'inclinoit dans tous les sens, qui a servi à mesurer la partie restante éclairée du Soleil, & cette observation m'a donné la grandeur de l'Éclipse en minutes & en secondes de degrés, d'après le diamètre du Soleil, que j'avois mesuré en partie du micromètre; ces observations sont au nombre de treize: les voici en Table.

TEMPS VRAI.			PARTIE éclairée du SOLEIL, en minutes & secondes de degré.		PARTIE éclipsée du SOLEIL, en minutes & secondes de degré.	
H.	M.	S.	M.	S.	M.	S.
7.	53.	18	26.	5	5.	28
7.	58.	32	25.	40	5.	53
8.	1.	17	25.	5	6.	28
8.	5.	10	25.	4	6.	29
8.	6.	49	25.	3	6.	30
8.	12.	49	25.	20	6.	13
8.	14.	5	25.	34	5.	59
8.	35.	7	29.	15	2.	18
8.	36.	5	29.	24	2.	9
8.	38.	15	29.	51	1.	42
8.	39.	14	30.	2	1.	31
8.	40.	47	30.	34	0.	59
8.	41.	28	31.	5	0.	28

Pour l'obſervation de la fin de l'Éclipſe, le ciel étoit devenu parfaitement beau & ſans nuages, aux environs du Soleil, de manière que l'obſervation a été faite avec préciſion & à la ſeconde.

Fin de l'Éclipſe à $8^h\,44'\,8''\frac{1}{2}$ de temps vrai.

L'Éclipſe a fini à $8'\,24''$ du bord ſupérieur du Soleil, ſuivant ſon mouvement en aſcenſion droite.

A $8^h\,48'\,18''$ de temps vrai, je meſurai le diamètre du Soleil, ſuivant ſon mouvement en aſcenſion droite, que je trouvai de dix-huit cents quatre-vingt-deux parties du micromètre, qui répondent à $31'\,33''$.

Vers le milieu de l'Éclipſe, je vis au bord de la Lune des inégalités ſenſibles, comme je l'avois déjà remarqué dans l'Éclipſe de Soleil du 4 Juin 1769 *(a)*, & comme M. le Duc de Croy l'avoit auſſi obſervé à Calais, dans celle du 16 Août 1765 *(b)*.

M. l'Abbé Clouet, qui obſervoit à l'hôtel de M. le Duc de Croy, rue du Regard, avec un téleſcope Grégorien de 4 pieds de foyer, a marqué la fin de l'Éclipſe à $8^h 44' 0''$, à une montre à ſecondes, qui fut comparée peu de minutes après l'obſervation, ſur la pendule de mon Obſervatoire.

L'hôtel de M. le Duc de Croy eſt 2″2 à l'occident du Méridien de l'Obſervatoire royal.

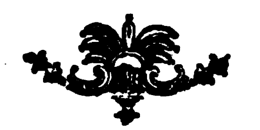
Rue de l'Univerſité, 2 ſecondes à l'occident de la Méridienne de l'Obſervatoire, M. le Préſident de Saron, avec une lunette achromatique, ſemblable à la mienne, a obſervé la fin de l'Écliſe à .... $8^h\ 44'\ 2''$.

M. du Séjour, au même endroit, avec un téleſcope Grégorien, d'un pied, à........ 8. 44. 5.

Ils virent, de même que moi, de petites éminences à la Lune.

(a) Mémoires de l'Académie, *année 1771, page 12, planche I.re*

(b) Mémoires de l'Académie, *année 1765, page 554, planche XVII.*



OBSERVATION
DE L'ÉCLIPSE TOTALE DE LUNE,
LE 23 NOVEMBRE AU SOIR 1779.
Faite à Paris, à l'Obſervatoire de la Marine.

Par M. MESSIER.

LE jour de l'Obſervation, le Ciel ne donnoit aucune eſpérance de voir l'Éclipſe: pendant la matinée, il étoit tombé de la neige & de la pluie; l'après-midi le ciel fut totalement & également couvert juſque vers les 9 heures, que les nuages ſe ſéparèrent: la Lune parut de temps à autre couverte de nuages rares, en grande partie éclipſée, & il ne fut pas poſſible d'obſerver la ſortie des taches de l'ombre. Lû le 27 Nov. 1779.

Dans les intervalles que laiſſoient les nuages pour apercevoir la Lune, je meſurai la partie éclairée, par le moyen d'un micromètre à fils, adapté à une lunette achromatique de 3 pieds $\frac{1}{2}$, à triple objectifs.

Les obſervations que je vais rapporter ſont un peu douteuſes, à cauſe des nuages qui ne laiſſoient que ſoupçonner les limites de l'ombre.

TEMPS vrai.			PARTIE éclairée.		PARTIE éclipſée.	
H.	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*
9.	12.	53	8.	18	24.	36
9.	22.	52	13.	10	19.	44
9.	32.	50	16.	14	16.	40
9.	34.	50	18.	10	14.	44

Après cette dernière obſervation, la Lune fut couverte; mais quelques minutes avant la fin de l'Éclipſe, les nuages

s'éclaircirent, & la Lune devint claire, cependant toujours couverte de nuages rages.

Temps vrai.

λ 9h 55′ 36″, j'estimai la fin de l'Éclipse.

9. 55. 56, fin plus certaine; la Lune étoit assez claire pour juger de la fin; l'Éclipse finit entre *Mare crisium* & *Mare fæcunditatis.*

10. 3. 14, la Lune devenue encore plus claire; la pénombre étoit sensible.

10. 6. 14, il restoit encore un peu de pénombre.

10. 11. 14, on voyoit encore un soupçon de pénombre à la lunette; à la vue simple, elle paroissoit encore sensible.

Après l'Éclipse, je mesurai le diamètre apparent de la Lune, en parties du micromètre qui étoit adapté à ma lunette, les nuages rares qui affoiblissoient sa lumière peuvent bien rendre ces mesures douteuses.

TEMPS vrai.			DIAMÈT.		
H.	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*	
9.	59.	45	32.	51 ½	mesuré suivant le cercle de déclinaison.
10.	1.	15	33.	4	diamètre horizontal.
10.	5.	15	32.	49 ½	suivant le cercle de déclinaison.

Après 11 heures du soir, le ciel devint en grande partie serein, & continua de l'être jusqu'après le passage de la Lune au Méridien que j'observai.

Le 1.er bord de la ☾ passa au Mér. à 12h 8′ 2″ 16‴ ½ } Temps vrai.
Le 2.e bord à . . . . 12. 10. 26. 43 ½ }

Après son passage au Méridien, je comparai la Lune à deux Étoiles qui en étoient près, & qui paroissoient en même temps que la Lune dans le même champ de la lunette achromatique:

achromatique : ces deux Étoiles furent estimées de la cinquième à la sixième grandeur, & comparées aux étoiles κ^1 & υ^1 du Taureau, l'une & l'autre de cinquième grandeur. Voici la position qui est résultée pour les deux Étoiles comparées à la Lune, pour le temps de l'observation.

N.° 1.... 61^d 20' 4" d'ascens. droite, & 21^d 1' 51" de déclin. bor.
N.° 2.... 61. 38. 47. 21. 13. 46.

OBSERVATION de la Lune avec les deux Étoiles n.ºs 1 & 2.

La nuit du 23 au 24 Novembre 1779.	TEMPS vrai.	DIFFÉR. de PASSAGE.	DIFFÉR. de HAUTEUR.
	H. M. S.	*M. S.*	*M. S.*
Étoile *n.°* 1 au fil horaire du micromètre..	12. 30. 29 3/4	1. 16	
Passage du premier bord de la Lune.....	12. 31. 45 3/4		
Passage du second bord de la Lune......	12. 34. 10 1/4		
Différence de hauteur ; l'Étoile supérieure au bord supérieur de la Lune...........	....	....	3. 47 1/2
Étoile *n.°* 2 au fil horaire.............	12. 31. 41 3/4	0. 4	
Passage du premier bord de la Lune......	12. 31. 45 3/4		
Différence de hauteur ; l'Étoile supérieure au bord supérieur de la Lune...........	....	....	15. 43
Étoile *n.°* 1 au fil horaire............	12. 41. 56 3/4	1. 38	
Passage du premier bord de la Lune.....	12. 43. 34 3/4		
Passage du second bord..............	12. 45. 58 3/4		
Différence de hauteur ; l'Étoile supérieure au bord supérieur de la Lune...........	....	....	1. 58
Étoile *n.°* 2 au fil horaire............	12. 43. 8 1/4	0. 26 1/2	
Passage du premier bord de la Lune.....	12. 43. 34 3/4		
Différence de hauteur ; l'Étoile supérieure au bord supérieur de la Lune.........	....	....	13. 54

PREMIER MÉMOIRE SUR LA VOIX.

De la ſtructure des Organes qui ſervent à la formation de la Voix, conſidérés dans l'Homme & dans les différentes claſſes d'Animaux, & comparés entr'eux.

Par M. VICQ-D'AZYR.

Lû à l'Aſſemblée publique de la Saint-Martin 1779.

UN des uſages les plus importans du poumon, eſt ſans doute de diriger l'air, que ſes lobes ont reçu, vers les organes propres à la formation de la voix; ainſi en même temps que le poumon établit une communication néceſſaire entre le fluide dans lequel nous ſommes plongés & les humeurs dont nos vaiſſeaux ſont remplis, l'organe de la voix qui eſt une dépendance de ce viſcère, en imprimant à l'air un mouvement vibratil, porte au loin l'expreſſion des idées, donne aux paſſions plus d'énergie, en leur fourniſſant un langage ſans lequel la Nature muette ſeroit vouée à un éternel ſilence, & établit entre les animaux une correſpondance auſſi prompte que commode, pour ſe communiquer leurs beſoins.

Mais comment l'air reçoit-il des modifications capables de produire ces merveilles? quel eſt cet inſtrument dont l'Art n'a point encore imité les effets? enfin comment la voix ſe forme-t-elle?

Le premier Anatomiſte qui ait traité ce ſujet d'une manière ſatisfaiſante, a été Galien: il a attribué les intonations de la voix humaine aux changemens dont la glotte eſt ſuſceptible. Fabrice d'Aquapendente ayant obſervé que la trachée-artère s'alonge & ſe raccourcit lorſque le larynx s'élève ou s'abaiſſe, crut apercevoir beaucoup d'analogie entre ce conduit & une flûte.

Perrault ajouta bien-tôt de nouveaux développemens à l'explication de Galien, & M. Dodart l'appuya par de

nouvelles probabilités, il réfuta ſur-tout la comparaiſon établie par Fabrice entre la trachée-artère & une flûte, & il démontra que le ſon étant, toutes choſes égales d'ailleurs, d'autant plus grave que le corps de la flûte eſt plus long, & la trachée s'alongeant au contraire dans la formation des ſons aigus, il ne peut y avoir aucune reſſemblance entre ces deux inſtrumens.

Juſqu'à cette époque on avoit ignoré la véritable théorie du ſon dans les inſtrumens à vent; un Géomètre célèbre, M. Euler, en découvrit les élémens, en conſidérant la colonne d'air que ces inſtrumens contiennent comme une corde vibrante, & en lui appliquant les mêmes formules qui conviennent aux cordes ordinaires; il prouva que parmi les différens inſtrumens de Muſique, les uns mettent l'air en mouvement par leurs vibrations, tandis que dans les autres l'air devient ſonore par lui-même; enfin il fit voir que l'ouverture par laquelle on introduit l'air dans les flûtes & dans les flageolets, n'influe pas ſur l'intonation; découvertes importantes qui devoient changer les idées des Phyſiciens ſur la formation de la voix.

M. Ferrein ſut profiter de ces obſervations; il commença par faire connoître l'erreur ſur laquelle le ſyſtème de M. Dodart étoit fondé, en démontrant qu'il eſt poſſible de produire des ſons artificiels avec le larynx, ſans que la glotte y ait aucune part, & même après l'avoir enlevée; il attribua tout le mécaniſme de la voix à la tenſion plus ou moins grande des ligamens, qu'il appela *cordes vocales*, & il rangea cet organe parmi les inſtrumens à cordes, l'air faiſant, ſuivant lui, les fonctions d'archet.

Cette nouvelle théorie eut d'abord plus de critiques que de ſectateurs; on ne doit point en être ſurpris: elle détruiſoit une explication donnée & reçue avec la même confiance depuis Galien. Les expériences de M. Ferrein, répétées par pluſieurs Anatomiſtes, furent confirmées par les uns & rejetées par les autres, & maintenant encore cette queſtion eſt au nombre de celles qui ont beſoin d'une nouvelle ſuite de

travaux pour fixer le jugement des Physiciens : ces considérations m'ont engagé à faire des recherches sur l'organe de la voix. J'ai pensé que je ne pourrois parvenir à connoître quelles sont les parties essentielles ou accessoires à la formation des sons, qu'en considérant ces parties dans les différentes classes d'animaux qui en sont pourvus. Il est de mon devoir de publier qu'il m'auroit été impossible d'exécuter ce projet, si M. Daubenton ne m'en eût fourni les moyens, en me donnant des facilités pour examiner l'organe de la voix dans un grand nombre de quadrupèdes & de reptiles qui font partie de la superbe collection du Cabinet du Roi, si enrichie & devenue si intéressante par les soins de M. de Buffon.

C'est un beau spectacle que de voir d'un coup-d'œil la disposition de ces instrumens variés à l'infini, avec lesquels chaque animal produit des modulations qui lui sont propres & peut contribuer au grand concert de la Nature. Depuis l'homme jusqu'au reptile, dans lequel la voix semble expirer pour se changer en un sifflement, la chaîne est immense : en la parcourant, je me suis arrêté sur les anneaux les plus remarquables. J'ai choisi, autant qu'il m'a été possible, les individus les plus éloignés les uns des autres, & je les ai toujours comparés avec l'homme.

Après avoir rappelé la forme du larynx humain, je considérerai cette partie dans les différentes classes de quadrupèdes, dans les oiseaux, & dans les reptiles; & après avoir décrit, dans ce premier Mémoire, les organes de la voix des différens animaux, je ferai connoître dans le second, les expériences & les recherches propres à en indiquer le mécanisme.

Le larynx, dans l'homme, est une cavité disposée en manière de grotte, dans laquelle on sait que la voix se forme ; elle est composée de cinq cartilages, rendus mobiles les uns sur les autres par différens muscles; on y remarque deux rétrécissemens ; l'un est placé à la partie supérieure ; on lui a donné le nom de *glotte :* deux membranes minces en composent les bords & un cartilage élastique, situé anté-

rieurement, & appelé l'*épiglotte*, empêche les corps étrangers d'y pénétrer, ſoit en diviſant la colonne du liquide que l'on boit, ſoit en s'abaiſſant ſur la glotte lorſque les alimens ſe portent vers l'œſophage. Le ſecond rétréciſſement eſt formé par deux ligamens, diſpoſés parallèlement de devant en arrière, & que M. Ferrein a appelés du nom de *cordes vocales :* une excavation eſt pratiquée de chaque côté entre ces deux ouvertures.

Parmi les quadrupèdes, il n'y en a peut-être aucun qui n'ait dans le larynx à peu-près le même appareil, & il y en a beaucoup dans leſquels la diſſection fait apercevoir des pièces ſurajoutées à celles dont le larynx humain eſt pourvu; de ſorte que, ſi la plupart de ces animaux, avec beaucoup de moyens, ne produiſent que des ſons déſagréables, la prééminence de la voix de l'homme ne doit pas être regardée ſeulement comme l'effet phyſique de ſa conſtitution, mais encore comme le fruit de ſon induſtrie, & du beſoin qu'il a de modifier ſes ſons pour exprimer un plus grand nombre d'idées.

Les ſinges étant ceux de tous les animaux qui ont, par leur ſtructure, le plus de rapports avec l'homme, j'ai cru devoir les placer dans cette expoſition, immédiatement après lui. Singes.

On cherche depuis long-temps à déterminer l'eſpèce de ſinge que Galien a diſſéqué : M. Camper croit avoir trouvé dans la ſtructure du larynx, telle que Galien l'a décrite *(a)* un moyen aſſuré de reconnoître ce ſinge : on lit dans le Traité *De uſu partium*, qu'il y a de chaque côté de l'épiglotte de cet animal, un conduit que l'on doit plutôt regarder comme une fiſſure que comme un trou, lequel communique avec un ventricule aſſez ample, placé auſſi de chaque côté : M. Camper ayant rencontré cette même diſpoſition dans le l'orang-outang, auquel elle eſt particulière, nous paroît fondé à croire que ce ſinge eſt celui dont Galien a fait mention *(b)* : trois orang-outangs, examinés avec ſoin par

(a) De uſu partium, edit. Charter. tom. IV, lib. VII, cap. 11, p. 461.

(b) Tranſactions philoſophiques, Of the royal Societe, of London, 1779, *Part. I, pag. 142 & ſuiv.*

M. Camper, lui ont toujours offert deux conduits placés au-dessous de l'os hyoïde à la partie supérieure du cartilage thyroïde, communiquans avec deux sacs qu'il a appelés du nom de *ventricules*, lesquels étoient placés sur les côtés du cou; & qui descendoient même jusqu'à la poitrine; dans un de ces singes, ils étoient inégaux en grandeur *(c)*; dans les deux autres, ils étoient presqu'égaux, mais ils se réunissoient pour ne former qu'une seule cavité; dans le troisième *(d)* enfin, les conduits de communication ont paru à M. Camper, ainsi qu'à Galien, étroits & figurés comme une fissure; il les a représentés de cette manière dans la *figure 2, lettre y.*

Tyson, qui a disséqué l'orang-outang d'Angola, n'a point parlé de la conformation observée par Galien dans ceux d'Asie, & par M. Camper dans ceux de Borneo.

Le larynx des pithèques & des papions, est très-différent de celui des orang-outangs; au lieu de deux sacs, on n'en trouve qu'un seul placé au-dessous de l'épiglotte: M. Camper en a donné la figure dans le Mémoire que nous avons déjà cité.

J'ai fait la même observation dans un mandrill mâle, d'une très-grande taille, que j'ai eu occasion de disséquer cet hiver. Cette espèce de singe est remarquable par la forme de ses joues, qui sont sillonnées & colorées d'un très-beau bleu; la langue de cet animal est très-longue & très-épaisse; sa tête est très-prolongée; il semble au premier aspect qu'il y ait deux glandes thyroïdes: en recherchant avec soin, on s'aperçoit qu'un prolongement mince & horizontal en réunit les deux lobes. Les cartilages du larynx n'ont rien de particulier; au-dessous de l'épiglotte se trouve une cavité, laquelle se termine par un conduit qui s'ouvre dans une poche assez étendue, & que l'on peut facilement gonfler d'air; étant distendue, elle présente un ovale irrégulier, rétréci dans quelques-uns de ses points. Les branches de l'os hyoïde sont

---

(c) Voyez *figure 2*, dans les *Transactions philosophiques*, 1779, Part. I.

(d) *Ibidem, figure 6.*

disposées comme celles de l'homme; mais le corps de cet os est épais & se recourbe au-dessus du conduit qui mène au sac, & qu'il recouvre, comme on peut le voir en *a* dans les *figures 1, 2 & 3;* lorsque l'animal crioit un peu fort, ou lorsqu'il se mettoit en colère, on voyoit le sac dont j'ai donné la description, se remplir & se vider alternativement.

La dissection du mangabey & de la mone, qui sont aussi des singes de l'ancien continent, m'a offert une structure à peu-près semblable; le corps de l'os hyoïde est également recourbé; au-dessous de l'épiglotte est une cavité demi-circulaire, qui mène à une excavation dont le principe se trouve vers le haut du cartilage thyroïde & sous le corps de l'os hyoïde; elle est formée par une membrane mince & qui paroît se diriger latéralement; la glotte est d'ailleurs membraneuse & très-mobile; les ligamens inférieurs appelés *cordes vocales,* sont très-bien exprimés; ils sont aplatis & comme tranchans dans le mangabey; les ventricules *(e)* y sont très-marqués, & les cartilages ne diffèrent presque en rien de ceux de l'homme. Voyez pour le mangabey, les *figures 4, 5 & 6;* & pour la mone, les *figures 7 & 8.*

J'ai trouvé de grandes variétés dans le larynx des singes du nouveau continent. Le sajou gris offre vers la partie extérieure du cou une poche membraneuse, mais le trou qui y conduit est fort étroit; l'os hyoïde est également prolongé dans le saï: outre cette différence, l'épiglotte de ce dernier n'est point percée à sa base; il n'y a point de conduit ni de poche, comme dans ceux dont je viens de parler; les ventricules sont très-marqués, & les cordes vocales sont minces & comme tranchantes dans ces deux singes, sur-tout dans le saï: je conserve tous ces larynx. On peut voir, en comparant les figures que j'ai fait dessiner, quelles sont les proportions des autres parties qui les composent, & sur l'exposition desquelles

(e) J'appelle ainsi non les sacs externes, mais les cavités situées entre la glotte & les cordes vocales, comme la plupart des Anatomistes.

je n'ai pas cru devoir insister. On consultera pour le sajou gris, les *figures 8 & 9*, & pour le saï, les *figures 10 & 11*.

L'alouate & l'ouarine sont aussi deux animaux du nouveau continent, que M.[rs] de Buffon & Daubenton *(f)* ont rangés dans la famille des sapajous, parce qu'ils ont la queue *prenante;* leur voix étant très-forte, ils ont reçu le nom de *hurleurs;* le poil du premier est très-foncé; celui du second est d'un brun-noir.

Ces deux animaux, que l'on trouve principalement à Cayenne, ont fixé depuis long-temps l'attention des Voyageurs, par l'intensité des sons qu'ils produisent. Barrère *(g)* l'a attribuée à la conformation de l'os hyoïde, d'autres ont parlé d'un cornet placé dans l'intérieur de leur gosier *(h)*. M. le Comte de Buffon *(i)* a fait mention d'une espèce de tambour, dans la concavité duquel leur voix grossit & forme des hurlemens par écho : il ajoute qu'il a observé dans un embrion d'alouate l'organe de la voix déjà très-formé. Enfin M. Daubenton, dans la description qu'il fait de cette espèce de sapajou, après avoir remarqué que le nœud de la gorge est ordinairement très-renflé dans ces animaux, dit qu'ayant ouvert cette tubérosité, il a reconnu qu'elle étoit creuse & concave.

On conserve dans plusieurs Cabinets cette poche isolée, sous le nom de *larynx* ou de *gosier du singe rouge de Cayenne.* Il paroît cependant qu'elle étoit encore rare il y a deux ans en Hollande, puisque le célèbre M. Camper, qui étoit alors à Paris, en vit avec étonnement deux dans mon Cabinet. Je le priai d'en accepter une; depuis ce temps, il m'a écrit qu'il a fait des recherches sur cet organe, sans me rien dire de plus : j'en ai fait de mon côté que j'ai consignées dans ce Mémoire.

(f) Histoire Naturelle, *tome XV, pages 5 & suiv.*
(g) Essai de l'Histoire naturelle de l'Afrique.
(h) Voyage de Binet.
(i) Histoire Naturelle, *tome XV, page 7.*

J'ai

J'ai reçu de Cayenne *(k)* un gosier d'alouate en très-bon état, avec la langue, le pharynx, une partie de l'œsophage, tout le larynx & la poche même que l'on connoît depuis quelque temps, mais dont la position, les connexions & les rapports sont absolument ignorés.

Nous considérerons d'abord la poche même, indépendamment de ses adhérences; nous examinerons ensuite le larynx de l'alouate à l'extérieur, & nous finirons en décrivant ce qu'une coupe longitudinale nous a offert de plus remarquable. Pour faciliter l'intelligence de mes descriptions, j'ai fait dessiner cet organe sous différens aspects & en grandeur naturelle. *Voyez les figures 12, 13, 14 & 15.*

La poche osseuse est irrégulièrement pyramidale; sa pointe est mousse & arrondie; sa face supérieure présente deux légères dépressions sur les côtés, avec quelques sillons vasculaires & un espace droit, alongé & situé horizontalement dans le milieu: la face inférieure est moins égale que la première; elle forme une convexité assez considérable, & on y remarque un grand nombre de pores dont elle est criblée: la face postérieure est percée par une ouverture assez ample, arrondie en bas & terminée supérieurement par un segment osseux, échancré des deux côtés: au-dessus de cette ouverture est une plaque osseuse, aux deux extrémités de laquelle sont deux petites facettes dont l'usage sera indiqué plus bas.

L'orifice, qui est plus étroit que le fond, conduit à la cavité de la poche; elle ressemble à ce qu'on appelle en général du nom de *sinus* en Anatomie; quelques lames minces & étroites s'élèvent de ses parois; elle est placée entre les deux branches de la mâchoire inférieure, de manière que sa pointe est située en devant, son échancrure en arrière, & sa grande face arrondie en bas. J'en conserve quelques-unes qui sont plus étroites & plus alongées que celles dont j'ai fait faire le dessin.

(k) M. Maloet, Intendant de Cayenne, l'a envoyé à M. Mauduit, qui a bien voulu me le remettre.

Le larynx de l'alouate, considéré avec ses annexes & à l'extérieur, présente les objets suivans.

La langue est longue & étroite : ayant fait au pharynx une ouverture ovale, nous avons aperçu la glotte dont l'étendue est considérable, dont les lèvres sont saillantes, & qui est surmontée antérieurement par une épiglotte large, & qu'un frein retient, ainsi que dans l'homme & dans les quadrupèdes.

Le chaton postérieur du cricoïde est très-élevé; la portion antérieure de ce cartilage n'a rien de particulier, non plus que la trachée-artère; le cartilage thyroïde est beaucoup plus grand qu'il ne l'est ordinairement dans les quadrupèdes de cette taille; la saillie qu'il fait est très-marquée; en arrière, il se recourbe; ses deux faces latérales sont fort étendues & un peu excavées.

Nous décrirons sur-tout avec attention, 1.° deux ligamens placés en dessus; 2.° un conduit qui communique avec la poche osseuse.

Le cartilage thyroïde est surmonté dans l'alouate, comme dans les autres quadrupèdes, par deux cornes, auxquelles s'insèrent deux ligamens qui, en se plaçant des deux côtés du pharynx & de la base de la langue, & en se portant de haut en bas & de devant en arrière, aboutissent aux deux petites facettes que nous avons décrites vers le haut & sur les côtés de la région postérieure de la poche; ils sont plus étroits dans leur milieu qu'à leurs extrémités; ils paroissent être destinés à soutenir cette cavité, & à assurer ses rapports avec le larynx.

Entre la poche osseuse & le cartilage thyroïde, on trouve un conduit assez considérable, de forme ronde, plus large dans ses extrémités que dans son milieu, d'un tissu membraneux, serré, & qui s'insère en devant autour de l'orifice de la poche, & en arrière entre les deux ailes du cartilage thyroïde, de sorte qu'il semble que ce soit une seconde trachée-artère qui mène à une cavité analogue aux sinus de la glotte.

Après avoir considéré & décrit le larynx de l'alouate à

l'extérieur, nous l'avons divisé suivant sa longueur, pour l'observer intérieurement; nous avons principalement remarqué ce qui suit:

1.° Une excavation placée au-devant du cartilage thyroïde, & qui en est séparée par un cordon semblable aux ligamens inférieurs de la glotte, appelés *cordes vocales.*

2.° La jonction du conduit horizontal avec le larynx & avec la poche osseuse; après s'être élargi, il s'attache des deux côtés du cartilage thyroïde, auprès duquel il forme en arrière un arrondissement, que la saillie de ce cartilage divise intérieurement en deux rigoles; ces dernières percent le larynx précisément dans le lieu où deux excavations situées devant le cartilage cricoïde, répondent aux sinus de la glotte, de sorte que ces deux rigoles paroissent en être la continuation.

Nous croyons donc être fondés à regarder le conduit horizontal & la poche osseuse comme une extension des ventricules de la glotte, qui doit beaucoup ajouter à l'intensité de la voix; car outre que la cavité propre du larynx est très-grande dans l'alouate, l'air introduit dans les ventricules est nécessairement divisé en deux colonnes pour entrer dans le conduit horizontal; elles se réunissent ensuite dans toute l'étendue de ce conduit; l'air s'engouffre dans la poche que nous avons décrite, & dont les lames minces & osseuses sont très-élastiques; de-là il est répercuté vers le larynx: la saillie du cartilage thyroïde, placée intérieurement dans une des extrémités du conduit horizontal, & les ligamens de la glotte fortement ébranlés par ce fluide, doivent produire une grande réaction.

La disposition du larynx dans l'alouate est donc très-propre à produire un bruit considérable, & tel que celui dont les Voyageurs ont parlé.

Il suit de ces détails, que les Naturalistes qui ont avancé que le larynx du singe ne différoit en rien de celui de l'homme, se sont trompés; non-seulement le gosier du singe diffère de celui de l'homme, mais encore cet organe n'est

Résultat, relativement aux Singes.

pas le même dans tous ces animaux : celui de l'orang-outang est remarquable en ce qu'il communique avec deux sacs placés en dehors. Dans tous les singes de l'ancien continent que l'on a disséqués, au lieu de deux sacs, on n'en a trouvé qu'un ; cette conformation paroît moins marquée dans les singes d'Amérique : il y en a parmi ces derniers, dans lesquels elle manque absolument, & dans quelques-uns, au lieu d'un sac membraneux on trouve une cavité osseuse, jointe avec le larynx par un conduit horizontal. Le cri des singes est aigu, perçant, & souvent interrompu par des sons rauques qui se succèdent en manière de battemens : l'air qui entre dans les poches de différente nature, dont le larynx de ces animaux est pourvu, paroît contribuer à ce dernier genre de sons ; en général, une cavité placée dessous & au-devant de l'épiglotte, & qui est remplie d'air, doit beaucoup nuire à la formation & aux modulations de la voix.

Quadrupèdes. Dans les quadrupèdes digités, l'organe de la voix conserve beaucoup de ressemblance avec celui de l'homme ; les bords de la glotte sont minces ; les ligamens inférieurs, appelés *cordes vocales*, sont bien détachés ; on trouve de chaque côté un ventricule, & les anneaux de la trachée-artère sont interrompus en arrière par un espace membraneux. L'épiglotte du chien est triangulaire [a] ; son extrémité est très-aiguë ; latéralement elle se continue, en formant une espèce de crochet, avec les ligamens inférieurs de la glotte ; & il y a un muscle glosso-épiglottique. Toutes les parties qui composent le larynx du chat [b] sont très-mobiles, j'y ai sur-tout remarqué deux petites membranes très-minces, qui sont placées au-dessous des ligamens inférieurs de la glotte ; elles vibrent lorsqu'on introduit de l'air par la trachée-artère, & elles produisent une sorte de ronflement analogue à celui que les chats font entendre : Severinus & Blasius, qui ont décrit la structure anatomique du chat, n'ont rien dit de ces membranes. Deux petits corps arrondis sont situés au bas de l'épiglotte du lapin [c], qui est échancrée à sa pointe. Perrault a écrit dans ses Mémoires pour servir à l'Histoire des Animaux [d], que

[a] *Voy. fig. 16.*
[b] *Voy. fig. 17.*
[c] *Voy. fig. 18.*
[d] *Voy. tome I.*

les anneaux de la trachée-artère du lion étoient entiers, excepté les deux ou trois premiers : sa description a sans doute été faite d'après un lion très-âgé ; car, ayant disséqué une lionne mise à mort, il y a deux ans à peu-près, au Combat du Taureau, j'ai trouvé les anneaux de la trachée-artère interrompus en arrière par un espace membraneux & musculaire, à la vérité fort étroit. Dans le kerkajou *(l)*, quadrupède nouveau que j'ai disséqué cet hiver, & qui est analogue au genre des fouines, le larynx n'offre rien de remarquable, si ce n'est que l'épiglotte est très-grande, très-alongée, & que la membrane qui tapisse les ventricules est formée par des fibres longitudinales, parallèles & réunies en petites bandes. L'écureuil & le renard ne m'ont rien présenté qui mérite des détails particuliers. Kerkajou.

En passant des quadrupèdes digités à ceux qui ont le pied fourchu, on trouve des différences très-marquées. J'ai fait au Cabinet du Roi, sur le sanglier, les mêmes observations que M. Hérissant a publiées en 1753 *(m)*, sur le cochon : le cartilage de l'épiglotte est grand & épais ; deux reliefs tiennent lieu des ligamens inférieurs ; ils sont percés par une fente qui ressemble à une petite glotte, & qui s'ouvre dans des excavations arrondies, recouvertes par un muscle, dans lesquelles l'air entre & dont il sort avec éclat. J'ajouterai que les cartilages arythénoïdes sont très-volumineux ; que la glotte est très-ouverte, & presqu'entièrement entourée de cartilages, & qu'au lieu de ventricules, on trouve les cavités dont on vient de parler. Le larynx du bœuf est très-large ; la glotte est béante, ses bords sont renversés ; les arythénoïdes font une saillie très-considérable en devant ; les ligamens inférieurs sont à peine distincts, & au lieu des ventricules, proprement dits, on remarque une cavité qui n'est presque pas circonscrite. Dans le mouton, la disposition est la même ; la glotte est presque tout-à-fait cartilagineuse ; les ligamens

(l) Quadrupède nouveau dont aucun Auteur n'a fait mention.

(m) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, *année 1753.*

inférieurs sont peu détachés des parois, & l'espace qui les sépare est fort étroit, ce qui tient à la structure des cartilages.

Le larynx des solipèdes est mieux organisé : l'épiglotte, qui a peu d'étendue, est triangulaire, & se termine en pointe comme dans le chien ; les arythénoïdes se portent en devant par un angle saillant ; ils sont antérieurement recourbés, & les ligamens inférieurs sont bien détachés & susceptibles de vibrer: à peine trouve-t-on aux extrémités de la glotte deux petites duplicatures qui peuvent être assimilées aux deux membranes triangulaires, décrites par M. Hérissant, qui, pour cette raison, avoit rangé le larynx du cheval parmi ceux qu'il appeloit *composés*. M.[rs] Bourgelat & Vitet, qui ont décrit avec soin le larynx du cheval, n'en ont fait aucune mention. M. Hérissant a été plus exact dans les détails qu'il a donnés sur l'organe de la voix de l'âne & du mulet *(n)*; il a fait voir qu'une cavité creusée dans le cartilage thyroïde, & recouverte par une membrane, est destinée à recevoir une certaine quantité d'air, & à lui imprimer un mouvement de vibration très-considérable. Moins de souplesse & plus de volume dans les cartilages; moins de profondeur dans les ventricules; moins de saillie dans les ligamens inférieurs; moins de mobilité dans la glotte, dont les contours sont si massifs dans plusieurs individus, qu'elle est évidemment incapable de servir à la fonction de la voix; des cavités ou des poches sur-ajoutées: telles sont les principales différences du larynx des quadrupèdes avec celui de l'homme.

Résultat, relativement aux Quadrupèdes.

Phoque & Chauve-souris.

C'est ici le lieu de parler de deux animaux qu'on a coutume de ranger, soit parmi les quadrupèdes, soit à leur suite, le phoque & la chauve-souris. L'épiglotte du phoque est plus grande[a] qu'il ne faut pour recouvrir l'ouverture de la glotte : cette dernière est placée immédiatement au-dessus des ligamens appelés *cordes vocales*, de sorte qu'il y a entr'eux & elle très-peu d'espace; disposition que je n'ai vue dans aucun autre animal.

[a] *Voy. fig. 19 & 20.*

(n) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, *année 1753*.

Il n'y a point d'épiglotte dans le larynx des chauve-souris; la glotte est figurée en losange alongé ou en ovale, & au-dessous de cette ouverture on remarque un élargissement assez considérable. Dans la chauve-souris de l'île de Sainte-Hélène, appelée *vampir* à nez simple [a] & long, une légère saillie membraneuse semble tenir lieu d'épiglotte: dans la chauve-souris appelée *vampir* à nez composé [b], il n'y en a pas la moindre apparence; dans la première, on trouve quelques replis membraneux, qui suppléent au défaut des ligamens ou cordes vocales: je n'en ai pas trouvé dans la seconde.

[a] *Voy. fig. 21 & 22.*

[b] *Voy. fig. 23 & 24.*

Résultat pour le Phoque & la Chauve-souris.

Ainsi le phoque se rapproche, par la disposition du larynx, de la classe des quadrupèdes, & la chauve-souris de celle des oiseaux.

Oiseaux.

Ces derniers peuvent être divisés en trois ordres, à raison des différences que l'organe de la voix présente: dans les uns, le nœud qui se remarque dans la division des bronches, est dépourvu de muscles; dans les autres, un muscle serré & aplati le recouvre: dans ces deux premiers ordres, la trachée-artère, fait un simple trajet depuis la division des bronches jusqu'à la glotte; dans le troisième ordre, elle se contourne de différentes manières, & l'organe de la voix est vraiment composé.

On a dit que les oiseaux ont un double larynx, l'un supérieur & l'autre inférieur: on s'exprimeroit d'une manière plus convenable, en disant que la glotte, dans les oiseaux, est placée au haut du cou, & que le reste de l'organe de la voix, qui tient lieu des ventricules & des ligamens inférieurs, est situé en bas & à la division des bronches. C'est au moins ainsi que j'ai envisagé cette structure, comme les détails suivans le prouveront.

La glotte des oiseaux diffère par son ouverture & par sa forme; en général c'est cette partie de l'organe de la voix qui offre en eux le moins de variétés: dans le canard [c], dans le coq-d'inde & dans l'outarde, on distingue facilement une pièce triangulaire placée en devant; dans le canard, elle est surmontée intérieurement & au milieu par une

[c] *Voy. fig. 25.*

ſaillie aiguë & cartilagineuſe en arrière; ſur les côtés, ſont des ligamens irréguliers, & les deux parties latérales de la glotte ſont formées par deux cartilages dont la figure varie ſuivant celle de la glotte elle-même: dans l'aigle, dans le pélican & dans le canard, elle eſt diſpoſée en fente: dans le caſoar, elle eſt ovale; elle eſt grande & un peu triangulaire dans le pigeon [a]; & dans la poule, elle forme une eſpèce de parallélogramme très-alongé: Perrault l'a vue figurée en loſange dans le cormoran. Dans le cabaret, le chardonneret, le linot, le verdier & le ſerin [b], j'ai trouvé cette ouverture ovale avec de légères échancrures ſur les côtés: dans le roſſignol [c], elle ne diffère qu'en ce que les bords ſont moins échancrés & plus unis; deux muſcles placés ſur les côtés de la glotte, ſont deſtinés à la former.

Dans les oiſeaux, & en général dans tous les animaux qui n'ont point d'épiglotte, l'ouverture de la glotte peut ſe rétrécir au point de ſe fermer tout-à-fait; mais étant cartilagineuſe, elle n'eſt pas ſuſceptible de tenſion: un corps aigu, qui eſt placé au milieu de l'os hyoïde, répond à la pièce triangulaire & antérieure de la glotte, laquelle eſt environnée dans les gros oiſeaux, ainſi que la baſe de la langue, de pièces blanchâtres & frangées [d].

Les anneaux de la trachée-artère ſont d'une ſeule pièce [e], & quoique minces dans pluſieurs, ils ont beaucoup de conſiſtance & d'élaſticité. M. Daubenton a trouvé les anneaux de ce conduit aplatis dans l'oiſeau-pierre; deux muſcles latéraux s'étendent juſqu'aux pièces qui forment les bords de la glotte, & paroiſſent les abaiſſer en les écartant l'un de l'autre; la longueur de la trachée-artère eſt ordinairement meſurée par celle du cou, dont l'étendue n'eſt pas, ainſi que M. Daubenton l'a prouvé, en raiſon du nombre des vertèbres cervicales, puiſque le cou du cygne, qui a vingt-deux vertèbres cervicales, n'eſt pas auſſi long que celui du flammant, qui n'en a que dix-ſept. Il y a cependant quelques oiſeaux dans leſquels la trachée-artère fait des contours & prend des formes particulières: on ſait, d'après Perrault, qu'elle eſt dilatée

[a] Voy. fig. 33.

[b] Voy. fig. 34.

[c] Voy. fig. 36.

[d] Voy. fig. 33, 34 & 36.

[e] Voy. fig. 26, 27, 28, 30 & 34.

dilatée en quelques endroits de l'ibis; que celle du coq indien fait un repli au bas du cou; que celle du cormoran offre un nœud dans cette région; que celle de la demoiselle de Numidie s'enfonce dans le sternum, ainsi que celle du cygne. Willughby *(o)* a fait voir que la trachée-artère de la grue s'enfonce de même; on trouve aussi cette structure dans le héron.

M. Hérissant a décrit les bronches de l'oie & de quelques oiseaux aquatiques du genre du canard; elles sont entre-coupées par des membranes en forme de croissant: M. Bajon a fait connoître les replis que la trachée-artère fait le long du sternum dans le paragua: enfin M. Daubenton a donné une description exacte de celle de l'oiseau-pierre, qui s'étend en dehors des deux côtés du sternum. Tout cet appareil, qui peut être comparé à la poche osseuse du singe-hurleur [a], aux deux sinus de la glotte du cochon & du sanglier, ou au tambour qui se trouve dans le larynx de l'âne & du mulet, n'est ainsi disposé que pour donner plus de force & d'intensité à la voix de ces oiseaux: l'organe de la voix du rossignol & celui du serin sont au contraire les plus simples de tous. N'est-on pas en droit de conclure de cette opposition, que la Nature paroît tendre d'elle-même vers l'harmonie, puisqu'il semble lui en moins coûter pour former des sons agréables, que pour produire un grand bruit, à force de contours, de membranes & de cavités.

La trachée-artère, que nous avons considérée vers le haut & le long du cou, se rétrécit un peu vers le bas, dans le lieu où les bronches se divisent; il semble que ce conduit y ait été pincé de droite à gauche [b]: là les bronches prennent leur origine, & dans l'endroit d'où elles naissent, plusieurs cerceaux plus grands & plus éloignés les uns des autres, en forment le principe [c]; un cartilage mince, étroit [d] & un peu tranchant, est situé perpendiculairement dans le milieu; il est quelquefois un peu échancré, ce qui a engagé quelques Auteurs à le comparer à un hausse-col;

[a] *Voy. fig. 12 & 13.*

[b] *Voy. fig. 27, 28, 30 & 35.*

[c] *Voy. fig. 29,* d.

[d] *Voy. fig. 32 & 35.*

(o) Ornithologie, *page 200.*

la face externe de chaque bronche eſt formée d'une membrane mince [a], de ſorte que les cerceaux cartilagineux n'y ſont point entiers; la pièce en forme d'éperon, placée à l'origine des bronches, diffère dans ſa ſtructure; celle du héron, dont le cri a beaucoup de force, eſt très-ſimple; elle eſt ſoutenue en devant & en arrière ſur les cerceaux auxquels elle correſpond. Dans le coq-d'inde, cette pièce fait partie d'une autre, qui eſt elle-même compoſée de deux cerceaux [b] plus forts & plus ſaillans que les autres; les deux bronches ſont réunies vers le bas par une ſubſtance ligamenteuſe [c], de ſorte qu'il y a un trou entre ce ligament & leur diviſion [d]: dans les petits oiſeaux, la diſpoſition de la trachée-artère eſt la même à peu-près que dans le héron; on trouve à la diviſion des bronches, un rétréciſſement & une pièce aiguë & verticale qui les ſépare [e]: mais il y a ſous un autre aſpect, une différence très-notable entre les grands oiſeaux, dont la voix a plus de force que d'agrément, & les petits, appelés par quelques Naturaliſtes *aves canoræ*, parce que leur goſier très-flexible produit des ſons bien cadencés, & parce que pluſieurs ſont ſuſceptibles d'apprendre des airs aſſez difficiles, & de les répéter d'une manière agréable. Cette différence conſiſte en ce que le larynx inférieur des grands oiſeaux, tels que le coq d'inde [f], la poule, le canard, l'oie, l'outarde, le butor, &c, n'eſt compoſé que de membranes, & abſolument dépourvu de muſcles, tandis que dans le roſſignol, le ſerin, le linot, le verdier, le chardonneret & l'alouette [g], la partie inférieure du larynx eſt abſolument recouverte par un muſcle dont les fibres ſont très-ſerrées, qui eſt ſillonné en devant par une dépreſſion longitudinale, & qui ſe termine en arrière par deux petits mamelons : dans le pigeon, deux muſcles ſitués latéralement, s'inſèrent entre les derniers cerceaux de la trachée-artère, aux membranes mobiles qui en rempliſſent l'intervalle [h].

A cette obſervation, dont aucun Auteur n'a parlé, nous ajoutons, pour rendre le tableau plus complet, celle de M. Hériſſant, ſur la membrane qui s'étend d'une des branches

[a] Voy. fig. 28, a, b.
[b] Voy. fig. 27, g.
[c] Voy. fig. 27, L.
[d] Voy. fig. 27, K.
[e] Voy. fig. 32, & 35.
[f] Voy. fig. 26, 27, 28 & 29.
[g] Voy. fig. 37, 38 & 39, a, b.
[h] Voy. fig. 30 & 31.

de l'os de la lunette à l'autre, & qui ferme la partie antérieure de la poitrine.

Résultat, relativement aux Oiseaux.

La glotte des oiseaux ressemble assez à celle des quadrupèdes: la pièce triangulaire qui est placée en devant [a], répond, non au crycoïde, comme Perrault l'a dit, mais au thyroïde, & les segmens latéraux aux arythénoïdes: la pièce qui divise les bronches & les membranes de ces dernières, sont susceptibles de vibrer, & semblent tenir lieu des ligamens inférieurs de la glotte; la grande distance qui sépare celle-ci d'avec l'organe vraiment sonore, le défaut d'épiglotte & de ligamens ou cordes vocales, la disposition des membranes des bronches, & l'action que l'air échappé du poumon & contenu dans la région antérieure de la poitrine, sous la membrane de la fourchette, exerce sur la partie inférieure du larynx, constituent les principales différences de l'organe de la voix des oiseaux, avec celui de l'homme & des quadrupèdes.

[a] *Voy. fig. 25, a, b.*

Reptiles.

Nous approchons du terme où la voix ne consiste que dans quelques modulations informes, où même elle s'affoiblit & disparoît enfin tout-à-fait; dans quelques reptiles, elle se fait encore entendre, mais dans les serpens, quelques sons aigus, excités par la colère, dont ils annoncent la menace & le danger, sont tout ce qui en tient lieu. Dans la grenouille, la glotte, qui est longue & étroite, & sans épiglotte [b], s'ouvre & se ferme avec autant de rapidité que de précision: au-devant de la glotte sont deux ligamens, qui méritent par excellence le nom de *cordes vocales* [c]; ils sont très-longs par rapport au volume de l'animal, tendus parallèlement, & tout-à-fait détachés des parties environnantes; de sorte qu'au lieu d'une ouverture, il y en a trois: souvent les fentes latérales sont entre-coupées par un petit ligament transversal [d]; la somme de ces trois ouvertures forme un espace arrondi, qui est encadré dans un losange cartilagineux [e], dont la partie antérieure est contiguë à la langue. Cette dernière est remarquable en ce que, fixée par sa pointe, elle est mobile

[b] *Voy. fig. 40.*

[c] *Voy. fig. 41 & 42.*

[d] *Voy. fig. 41, k, k.*

[e] *Voy. fig. 51, c, e, g, f, d.*

postérieurement ; deux bronches très-courtes, & comme argentées [a], naissent immédiatement de la glotte.

[a] Voy. fig. 42, d, c.

La structure est la même dans le crapaud ordinaire & dans le grand crapaud de Missisipi, que j'ai disséqué au Jardin du Roi [b] : on ne peut s'empêcher d'être surpris, qu'avec un organe aussi bien disposé, ces animaux ne produisent que des sons monotones & désagréables.

[b] Voy. fig. 43 & 44.

Perrault a observé que dans le crocodile, la trachée-artère faisoit divers contours.

Dans les animaux qui nous restent à examiner, nous ne trouverons plus que la glotte & la trachée-artère; telle est la structure de la tortue, de la vipère, de la couleuvre, & des serpens en général. Dans la tortue, une pièce antérieure tient lieu du thyroïde ; les parois de la trachée-artère sont minces ; ses anneaux sont continus : la glotte est très-étroite, & placée en devant, très-près de la face interne de la mâchoire inférieure [c]; ce qui prouve que la voix, dans ces animaux, ne doit avoir aucun timbre. Dans la vipère [d] & dans la grande couleuvre, la glotte est plus étendue; elle se trouve derrière la langue, qui tient peu de place entre les deux mâchoires, étant contenue dans une gaîne le long de l'œsophage [e]; la trachée s'élargit un peu au-dessous de cette ouverture; ses anneaux, qui sont entiers dans son origine, se divisent ensuite [f] pour adhérer au poumon, & ils se terminent en bec de flûte [g], au-delà de ce viscère, dans une suite de cellules qui s'étendent jusqu'à l'extrémité de l'animal, lequel peut être gonflé dans toutes ses dimensions lorsqu'on y introduit de l'air. La glotte des oiseaux est séparée d'avec l'organe, vraiment sonore; elle est la seule partie qui constitue l'organe de la voix dans les reptiles.

[c] Voy. fig. 45 & 46.

[d] Voy. fig. 47.

[e] Voy. fig. 48, c, d, a, b.

[f] Voy. fig. 48.

[g] Voy. fig. 52, a, b.

Je n'ai fait aucune mention des cétacées, quoique Pline, parmi les Anciens, & M.rs Anderson & Klein, parmi les Modernes, aient avancé que la voix de la baleine & du dauphin est très-forte, parce que l'on ignore absolument la structure de leur larynx.

Je ne m'arrêterai point non plus sur les insectes; à la vérité,

plusieurs de ces animaux, & sur-tout les femelles, font entendre des sons, mais les organes par lesquels l'air pénètre n'y ont aucune part; ce sont des bruits mécaniques, produits, soit par le choc de la partie antérieure du corselet, comme dans plusieurs coléoptères, soit avec des balanciers semblables à de petites baguettes de tambour qui frappent sur une peau sèche & tendue, comme dans les diptères, & principalement dans la cigale.

En se rappelant les observations dont je viens d'offrir le tableau, on peut en tirer les conséquences suivantes: Résultat général.

1.° La glotte étant formée dans la plupart des quadrupèdes, par des bords presqu'entièrement cartilagineux, qui ne sont susceptibles d'aucune tension graduée, cette ouverture étant dans les oiseaux très-éloignée de l'organe vraiment sonore, & ne produisant qu'un sifflement dans les serpens où elle est seule, ne peut-on pas en conclure qu'elle n'est point essentielle à la formation des sons?

2.° Les ligamens inférieurs étant dans plusieurs quadrupèdes & dans quelques reptiles, les seules parties capables de vibrer, des membranes élastiques en étant également susceptibles dans les oiseaux, n'est-on pas conduit à penser que ces différentes parties ont un usage marqué dans la formation des sons?

3.° Le timbre de la voix augmentant dans les conduits recourbés & dans les cavités formées par des parois cartilagineuses & élastiques, n'est-il pas probable que tout l'appareil, dont quelques animaux sont pourvus, ne tend qu'à augmenter la résonnance de la voix, sans influer sur son intonation?

Ces inductions sont les seules que je me permettrai en finissant ce Mémoire. Un Anatomiste qui se propose de découvrir le mécanisme de la voix dans les différentes classes d'animaux, peut être comparé à un Curieux qui, après avoir entendu dans un Concert l'effet de plusieurs instrumens de Musique, sans avoir d'ailleurs la moindre connoissance de leur disposition, chercheroit, en les examinant, à découvrir la manière dont on les emploie, & la nature du son qu'ils produisent. Les recherches que je viens d'exposer, ne sont

relatives qu'à la structure anatomique des organes : il me reste à publier dans un autre Mémoire, les expériences qui concernent leurs usages.

EXPLICATION DES FIGURES.

Figure 1.re

b, *c*, la langue du mandrill & toute la pièce sont vues de côté.

a, *d*, *e*, os hyoïde ; *e*, grande corne ; *d*, petite corne ; *a*, corps de l'os hyoïde prolongé, recourbé, & sous lequel est le conduit qui communique avec la poche.

a, *f*, *g*, *k*, poche située devant le larynx en dehors ; *h*, lieu de son rétrécissement.

i, *k*, les deux lobes de la glande thyroïde.

l, trachée-artère.

Figure 2.

La langue & toute la pièce sont vues en devant, la poche étant ôtée.

Les mêmes lettres de la *figure précédente* serviront à l'explication, si ce n'est qu'en *M*, on voit l'ouverture du conduit placé sous le corps de l'os hyoïde, qui mène à la poche.

Figure 3.

Les mêmes lettres serviront à l'explication de la figure, si ce n'est 1.° qu'en *o*, *p*, *q*, on voit les vaisseaux de la poche ; & 2.° qu'en *f*, *g*, *h*, on aperçoit cette même poche en devant, tandis qu'elle est vue de côté dans la *figure 1.re*

Figure 4.

Cette figure présente le larynx du mangabey extérieurement ; *a*, la glotte ; *b*, l'épiglotte ; *c*, la langue.

Figure 5.

Elle offre le larynx du mangabey ouvert ; *a*, *e*, *b*, *e*, ligamens des cordes vocales & les ventricules au-dessus.

c, la langue ; *d*, l'épiglotte ; *f*, *g*, les cartilages arythénoïdes ; *h*, l'ouverture percée à la base de l'épiglotte qui mène à la poche : cette ouverture est ample.

Figure 6.

Elle montre le larynx du mangabey vu en dessus, en devant & un peu en dessous.

a, ouverture qui mène à la poche.

b, une partie de la poche ouverte.

c, la trachée-artère.

d, la langue.

Figure 7.

Cette figure présente le larynx de la mone ouvert & écarté.

a, *e*, *b*, *e*, ligamens des cordes vocales & ventricules au-dessus.

c, la langue; *d*, l'épiglotte; *h*, la trachée-artère également ouverte.

f, *g*, ouverture semi-circulaire par laquelle l'intérieur du larynx communique avec la poche placée en dehors & en devant.

Figure 8.

On voit dans cette figure le larynx du sajou gris ouvert longitudinalement.

a, *e*, *a*, *b*, ligamens des cordes vocales; ventricules au-dessus.

c, la langue; *d*, l'épiglotte; *e*, la trachée-artère; *f*, une très-petite ouverture placée à la base de l'épiglotte, où elle communique avec la poche située en devant.

Figure 9.

On y voit le larynx du sajou gris en dehors & en devant.

a, ouverture placée sous l'os hyoïde, & qui est le principe de la poche gutturale externe.

b, *b*, *b*, portions de la membrane qui formoit la poche; *c*, la trachée-artère; *d*, la langue.

Figure 10.

Dans cette figure, on voit le larynx du saï en dehors & en devant.

a, la langue; *b*, l'épiglotte; *c*, la glotte; *d*, la trachée-artère.

Figure 11.

Dans cette figure, on voit le larynx du saï ouvert.

a, la langue; *b*, épiglotte; *c*, base de l'épiglotte où il n'y a point d'ouverture; *e*, *d*, *f*, *d*, ligamens des cordes vocales & ventricules au-dessus.

Figure 12.

Cette figure présente la poche du larynx du singe-hurleur, vue de côté.

Depuis *A* jusqu'à *B*, espace étroit, alongé & horizontal de la face supérieure de la poche.

C, dépression latérale de la face supérieure.

Depuis *D* jusqu'à *E*, face inférieure, arrondie, inégale & poreuse.

F, échancrure placée au haut & à un des côtés de l'ouverture.

G, une des petites facettes placées au haut & sur le côté de la face postérieure.

H, ouverture qui mène à la cavité de la poche.

Figure 13.

Cette figure montre la poche vue dans la face postérieure.

I, l'orifice.

J, le segment qui ferme l'orifice supérieurement.

K, bord ovalaire de l'orifice.

L, portion supérieure de la face postérieure.

M, *N*, les deux facettes placées au haut & sur les côtés de cette région.

Figure 14.

Cette figure présente le larynx du singe-hurleur avec ses annexes, vu obliquement de côté, un peu en dessus,

A, *B*, la langue,

G, isthme du gosier,

Depuis *D* jusqu'à *E*, le pharynx,

F, principe de l'œsophage.

E, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, ouverture ovale faite artificiellement au pharynx pour découvrir la glotte.

E, *M*, *N*, *O*, ouverture de la glotte.

M, *N*, lèvres de la glotte.

O, épiglotte

O, épiglotte.

P, chaton du crycoïde.

Q, partie antérieure du crycoïde.

R, cartilage thyroïde : on voit sa face latérale, qui est un peu excavée.

S, endroit où le cartilage thyroïde se recourbe en arrière.

T, bord extérieur du cartilage thyroïde.

V, *U*, la trachée-artère.

X, corne du cartilage thyroïde.

Y, *Z*, Δ, deux ligamens qui, des cornes du cartilage thyroïde, s'étendent vers la petite facette supérieure & latérale de la région postérieure de la poche.

Θ, facette à laquelle le ligament aboutit.

Σ, Υ, Φ, conduit qui établit une communication entre la poche osseuse & le cartilage thyroïde : il est plus étroit en Υ, & plus large en Σ, & en Φ.

Θ, Ψ, Ω, poche osseuse décrite dans les *figures 1 & 2 :* on la voit de côté, comme dans la *figure 1.re*

Figure 15.

Cette figure offre la coupe longitudinale de la langue & de tout le larynx du singe-hurleur.

A, la langue coupée en long.

B, portion latérale du pharynx.

C, ligament qui s'étend de la poche osseuse du larynx vers le cartilage thyroïde.

D, moitié de l'épiglotte divisée.

E, commencement de l'œsophage, également divisé.

F, la poche osseuse du larynx, divisée & vue en dedans.

F, *G*, *H*, lames minces qui sont saillantes dans l'intérieur de la poche osseuse.

I, jonction du conduit horizontal avec la poche osseuse du larynx.

K, milieu du conduit horizontal, qui est plus étroit.

L, extrémité postérieure & plus large du conduit horizontal.

M, saillie du cartilage thyroïde qui divise intérieurement le conduit horizontal en deux.

N, une des rigoles qui résulte de cette division.

O, ventricule de la glotte avec lequel ce conduit communique & se continue.

P, ligament inférieur ou postérieur de la glotte, répondant à ce qu'on appelle *corde vocale*.

Q, facette interne du cartilage thyroïde.

R, bord extérieur du cartilage thyroïde divisé.

S, endroit où le cartilage crycoïde a été coupé.

T, face interne de la trachée-artère.

Nota. Les *figures 9, 10, 11 & 12*, sont dessinées en grandeur naturelle.

Figure 16.

Cette figure représente le larynx du chien : il été ouvert longitudinalement pour voir l'intérieur.

a, b, os hyoïde; *c*, épiglotte qui est triangulaire; *d, e*, ligamens inférieurs de la glotte; *f, g*, ventricules; *k*, partie moyenne de l'épiglotte; *l, m*, crochets formés par l'épiglotte & les ligamens inférieurs; *h, i*, trachée-artère.

Figure 17.

On voit dans cette figure le larynx du chat; *a, b*, os hyoïde; *e*, l'épiglotte; *h, i*, la glotte; *e, d, f, g*, représente les ligamens inférieurs de la glotte & deux petites membranes placées au-dessus, & qui frémissent aisément.

Figure 18.

Elle offre le larynx du lapin : il a été ouvert pour voir l'intérieur; *a*, l'épiglotte; *b*, petits corps arrondis, placés au bas de l'épiglotte du lapin; *c, d*, ventricules & ligamens inférieurs de la glotte; *e*, la trachée-artère.

Fig. 19.

Elle présente le larynx du phoque dans l'état naturel; *a*, la langue, qui est très-grande; *b*, épiglotte; *b, c*, la glotte; *e, d*, les ligamens inférieurs ou cordes vocales, qui sont très-près des lèvres de la glotte; *f*, la trachée-artère.

Figure 20.

C'est le même larynx ouvert; *a*, la langue; *b*, l'épiglotte; *d, e*, ligamens inférieurs & ventricules très-étroits; *f*, cavité au-dessous de la glotte; *g*, annexes de la trachée-artère.

Figure 21.

Larynx de la chauve-souris-vampir de l'île Sainte-Hélène à nez simple & long; *a*, langue; *b*, saillie très-peu considérable, tenant lieu d'épiglotte; *b*, *c*, glotte ovale & comme festonnée; *d*, la trachée-artère.

Figure 22.

Même larynx ouvert; *a*, langue; *b*, *c*, *d*, *e*, petites bandes tenant lieu de ligamens ou de cordes vocales; *f*, la trachée-artère.

Figure 23.

Larynx de la grande chauve-souris-vampir à nez composé; *a*, langue; *b*, *c*, glotte; *d*, *e*, trachée-artère.

Figure 24.

Même larynx vu en dessous, avec une partie de la langue & l'os hyoïde.

Figure 25.

Larynx du canard représenté ouvert; *a*, *b*, pièce triangulaire qui tient lieu du thyroïde; *c*, petit éperon placé au milieu de ce cartilage en dedans; *d*, *e*, *f*, *g*, pièces latérales qui tiennent la place des arythénoïdes & en partie du crycoïde; *h*, la trachée-artère.

Figure 26.

Trachée-artère du dinde; *a*, *b*, trachée-artère; *c*, œsophage; *d*, endroit où étoit la poche & qui a été lié; *e*, *f*, *g*, *h*, artères; *i*, nœud où est la partie inférieure du larynx; *k*, trou situé entre les deux bronches; *l*, *m*, deux muscles placés le long de la trachée-artère.

Figure 27.

La même trachée-artère vue en dessus, & dépouillée des parties accessoires, excepté des muscles; *a*, *b*, *c*, *d*, muscles placés le long de la trachée-artère; *e*, trachée-artère; *f*, *g*, deux anneaux formant la pièce principale, sur laquelle est soutenue la pièce aiguë placée dans le milieu des bronches; *h*, *i*, les bronches; *k*, trou situé entre les bronches; *l*, ligament qui recouvre les bronches, & qui manque dans plusieurs grands oiseaux, tel que le butor, dans lequel il ne se rencontre point.

Figure 28.

La même trachée-artère vue par-derrière; *a*, *b*, les membranes qui

forment la partie interne des bronches, & qui sont susceptibles de vibration, sur-tout dans leurs bifurcations.

Figure 29.

On voit dans cette figure le profil de la trachée-artère du coq-d'inde; *a*, la trachée-artère; *b*, *c*, les muscles placés le long de ce conduit; *d*, les anneaux qui sont à l'origine des bronches, & qui sont plus grands & plus aplatis que les autres.

Figure 30.

La trachée-artère du pigeon; *a*, la trachée-artère; *b*, *c*, les deux muscles longitudinaux; *d*, *e*, les deux anneaux cartilagineux qui soutiennent l'organe sonore & entre lesquels s'insèrent les muscles longitudinaux; *f*, *g*, les bronches.

Figure 31.

La même trachée-artère, vue de profil.

Figure 32.

La même trachée-artère ouverte; *a*, la pièce tranchante & verticale qui sépare les bronches; *b*, *c*, les bronches.

Figure 33.

La glotte du pigeon; *a*, *b*, la glotte; *c*, *d*, pièces comme frangées ou hachées, qui accompagnent la langue & la glotte de plusieurs oiseaux; *e*, la trachée-artère.

Figure 34.

La glotte du serin; *a*, *b*, la glotte; près de *b*, sont les pièces frangées ou hachées dont on a déjà parlé; *c*, la trachée-artère.

Figure 35.

La même trachée-artère ouverte: on y voit les deux bronches & la pièce qui les divise.

Figure 36.

Cette figure offre la glotte du rossignol; sa forme y est dessinée en grandeur naturelle: derrière, sont les pièces hachées ou frangées.

Figure 37.

Larynx de l'alouette, qui donnera une idée de cet organe, vu en dehors;

dans tous les petits oiseaux: on y voit la trachée-artère, ses deux muscles longitudinaux, les bronches, & en *a*, un muscle qui recouvre l'organe vraiment sonore.

Figure 38.

Le même larynx, vu de profil.

Figure 39.

Le même larynx, vu en dessous; en *a*, *b*, sont les deux tubercules qui terminent postérieurement le muscle dont il a été parlé.

Figure 40.

Glotte de la grenouille; *a*, *b*, la langue dont la partie postérieure est mobile; *c*, *d*, fente de la glotte, qui est susceptible de se fermer exactement.

Figure 41.

Larynx de la grenouille, les lèvres de la glotte étant ôtées; *a*, *b*, la langue; *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, espèce de losange cartilagineux qui soutient le larynx; *i*, *h*, *g*, cordes vocales ou ligamens de la glotte; *k*, *k*, intersection latérale de ces ligamens; *i*, *h*, *k*, *g*, ouverture du larynx qui est ronde, & divisée en trois par les cordes vocales.

Figure 42.

Dans cette figure, on voit ces parties en grandeur naturelle; *a*, la langue; *b*, l'ouverture du larynx dans lequel sont les cordes vocales; *c*, *d*, les bronches, qui sont très-courtes.

Figure 43.

Larynx du grand crapaud de Mississipi; *a*, *b*, sa glotte en grandeur naturelle.

Figure 44.

Le même larynx, les lèvres de la glotte ôtées; *a*, *b*, *c*, *d*, les cordes vocales; *e*, *f*, les intersections latérales; *a*, *f*, *b*, *d*, *e*, *c*, circonférence de l'ouverture du larynx.

Figure 45.

La glotte de la tortue, vue de face; *a*, *b*, glotte; *c*, trachée-artère.

Figure 46.

Le même larynx, vu dépouillé de toutes les partiequi le recouvroient

Figure 47.

Larynx de vipère; *a, b,* glotte étroite & sans épiglotte; *b, c, d,* la langue bifurquée & placée dans un étui le long de l'œsophage; *e, f,* région où sont les dents; *g,* la trachée-artère.

Figure 48.

La même trachée-artère, vue en dessous; *a, b,* langue bifurquée & placée dans l'étui *c, d; f, e,* écailles inférieures; *g,* endroit où la trachée-artère commence à se bifurquer; *h,* endroit où la division de la trachée-artère est encore plus marquée.

Figure 49.

Larynx de la grande couleuvre; *a, b,* la glotte; *c,* la trachée-artère; *d, e,* la langue bifurquée.

Figure 50.

La même pièce, vue en dessous.

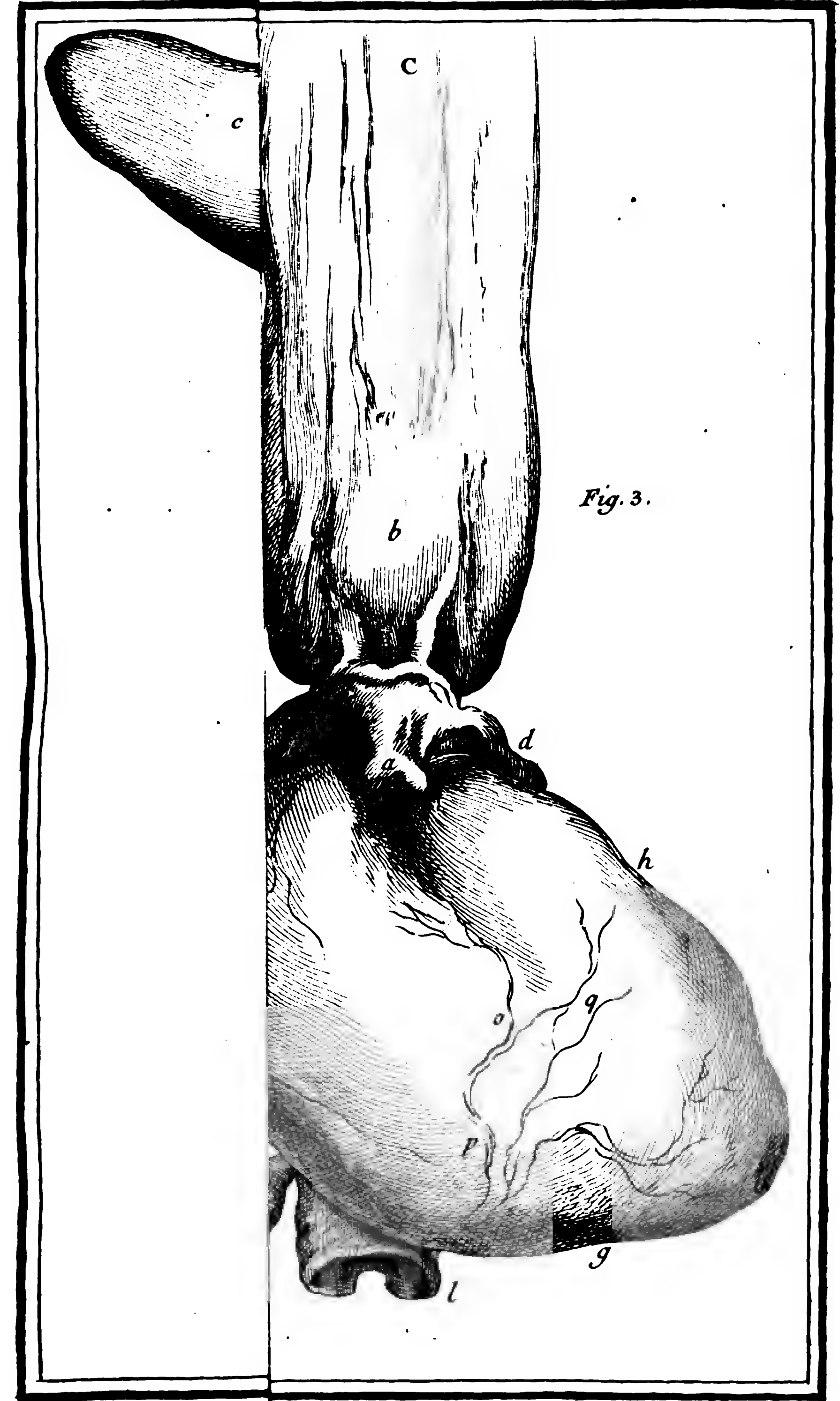
Figure 51.

La même pièce, vue de profil; *a, b,* étui dans lequel la langue se renferme, & d'où elle se dégage avec beaucoup de facilité.

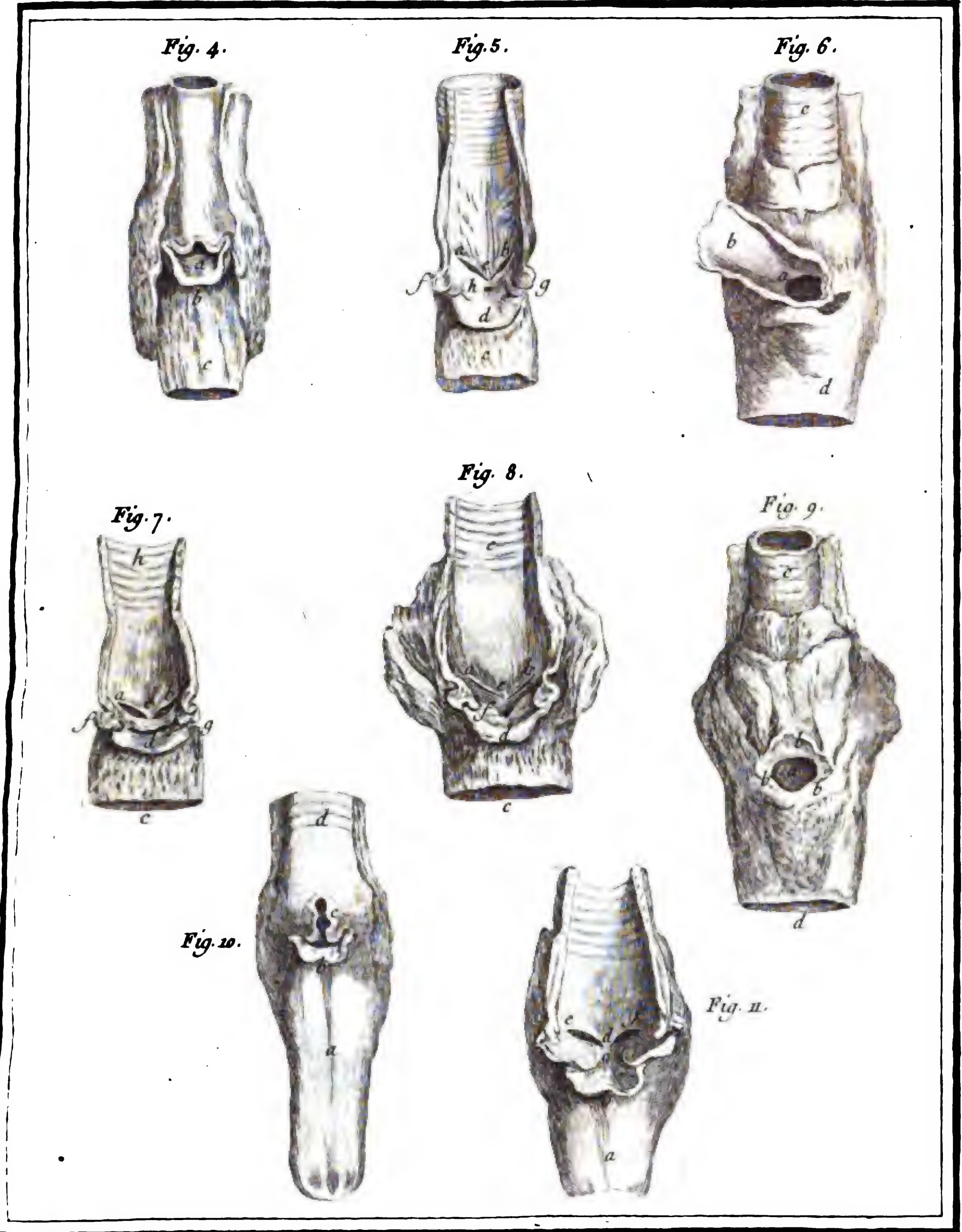
Figure 52.

Extrémités de la trachée-artère de la couleuvre & de la vipère; *a, b,* la fin de la trachée-artère; *b,* l'extrémité en bec de flûte; *c, d, e, f,* portion des ventricules dans lesquels la trachée-artère s'ouvre & se termine.

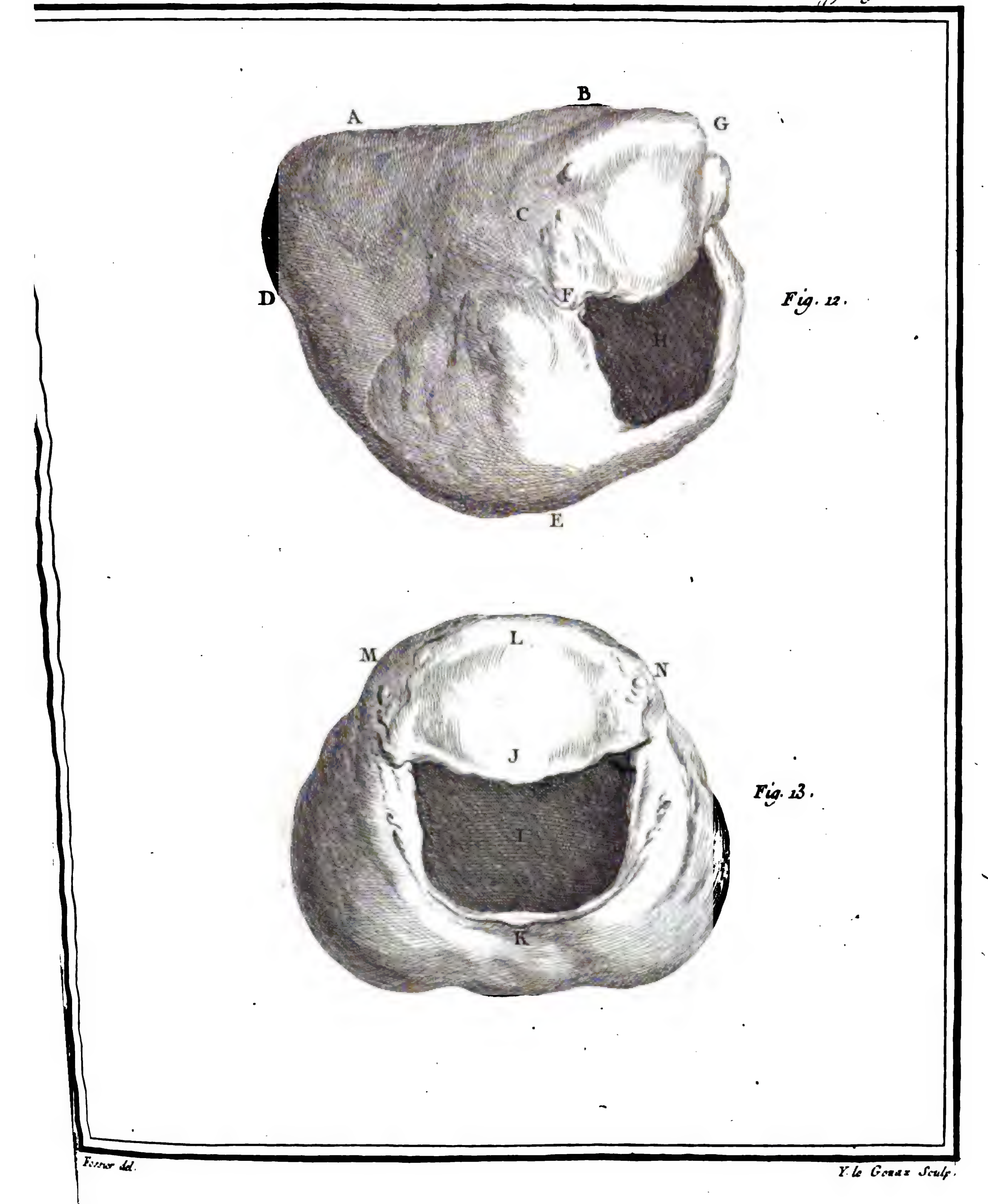




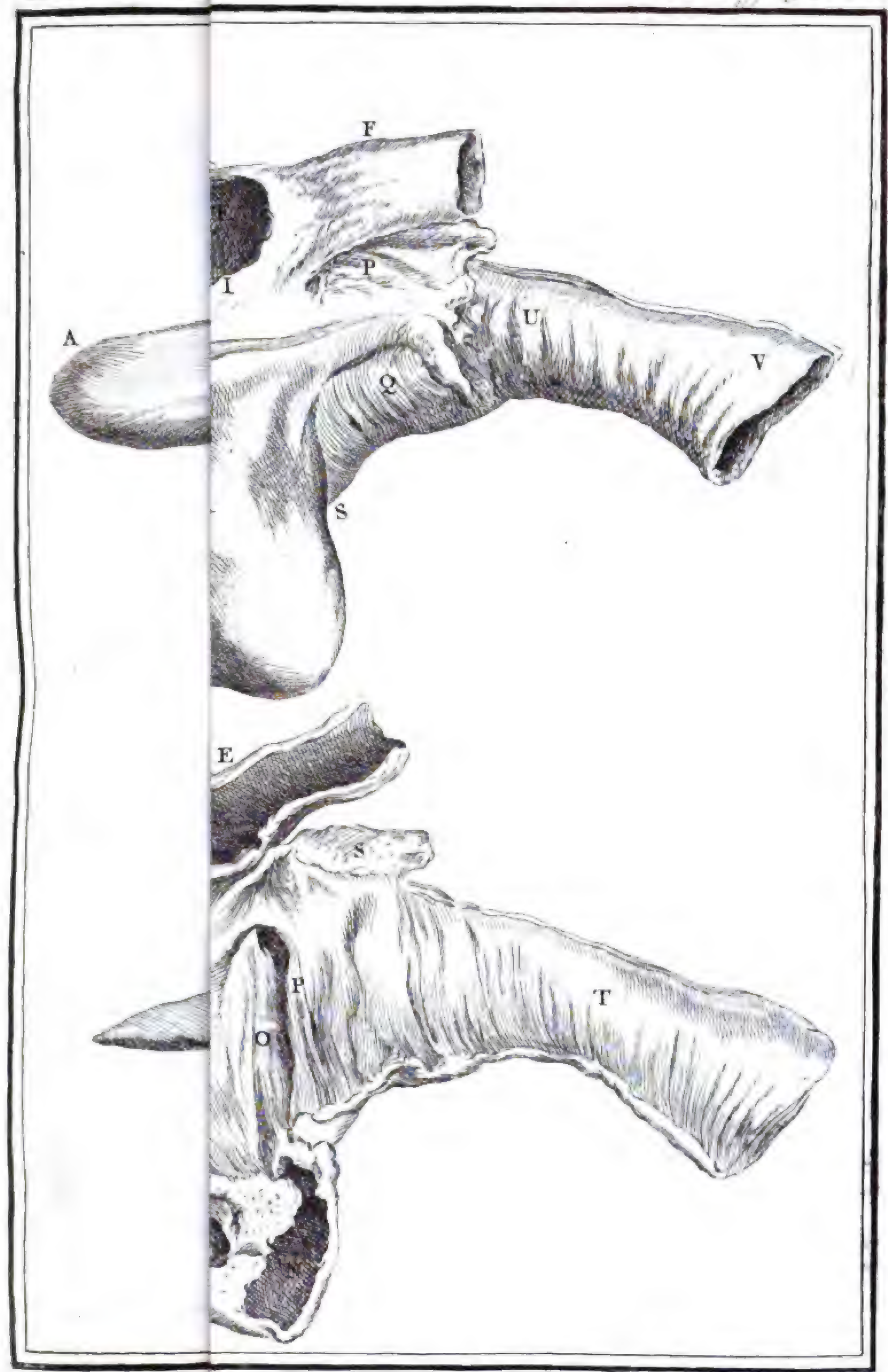
Fossier del. *Y. le Gouaz Sculp.*



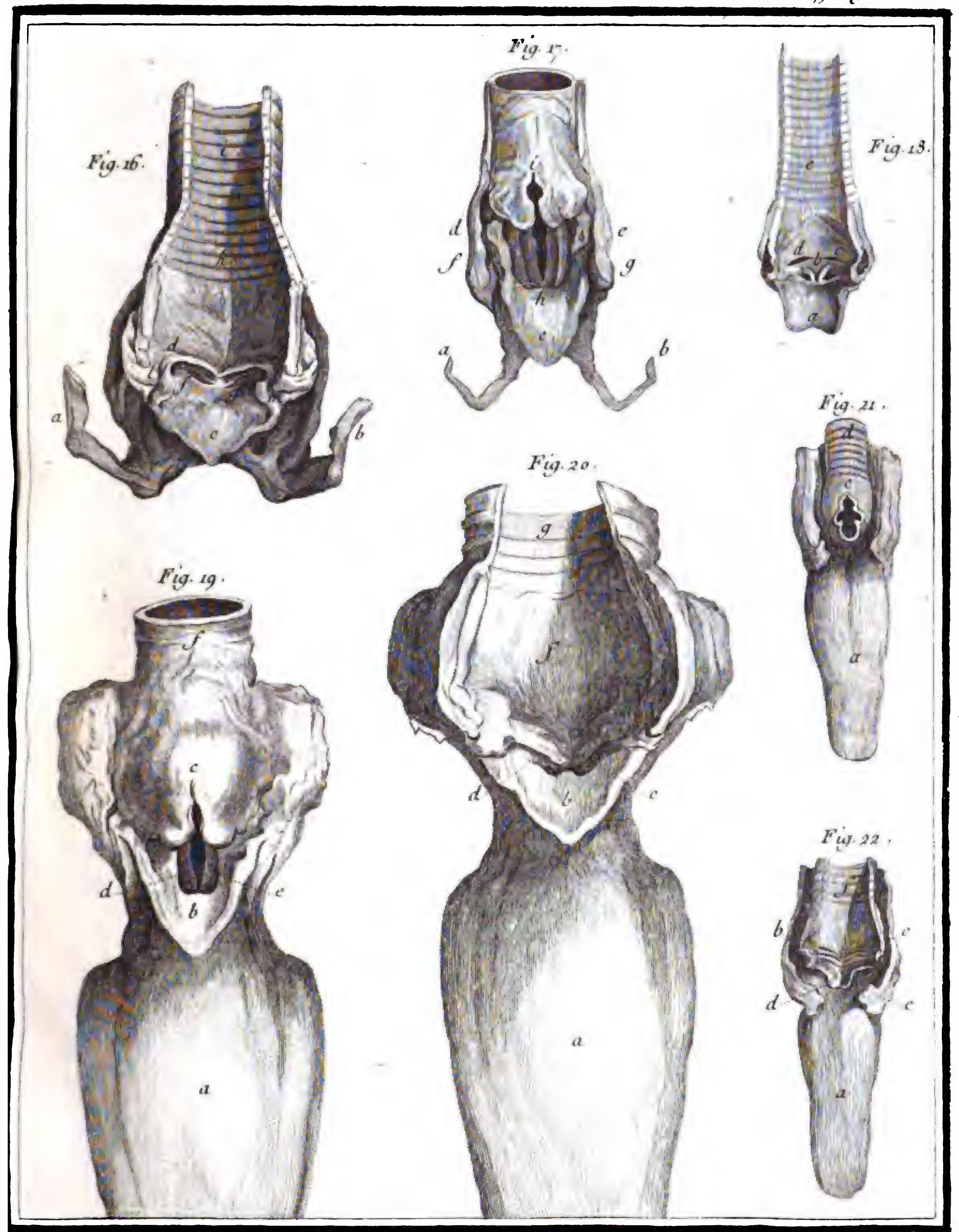
Fossier del. Y. le Gouaz Sc.



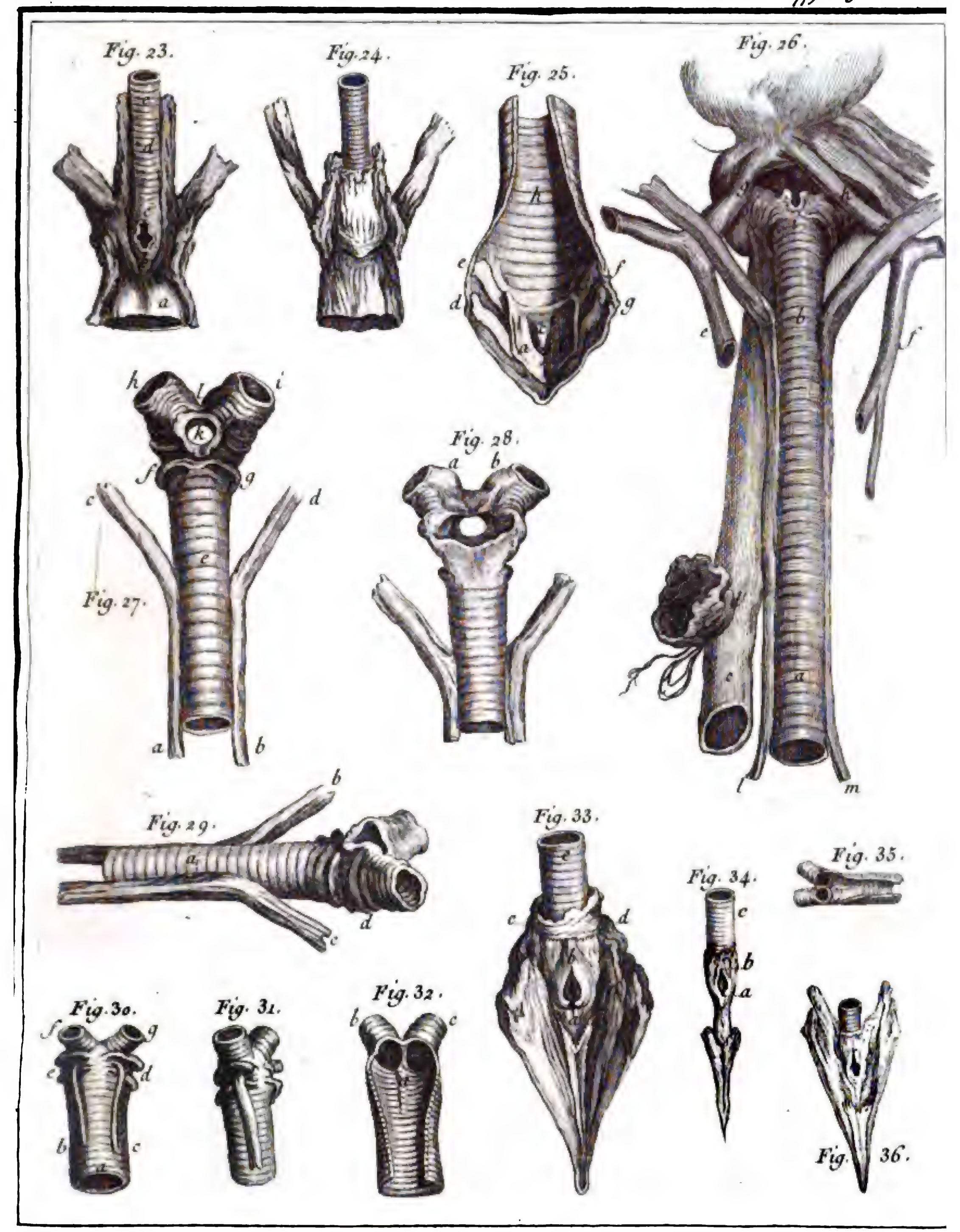
Fossier del. Y. le Gouaz Sculp.



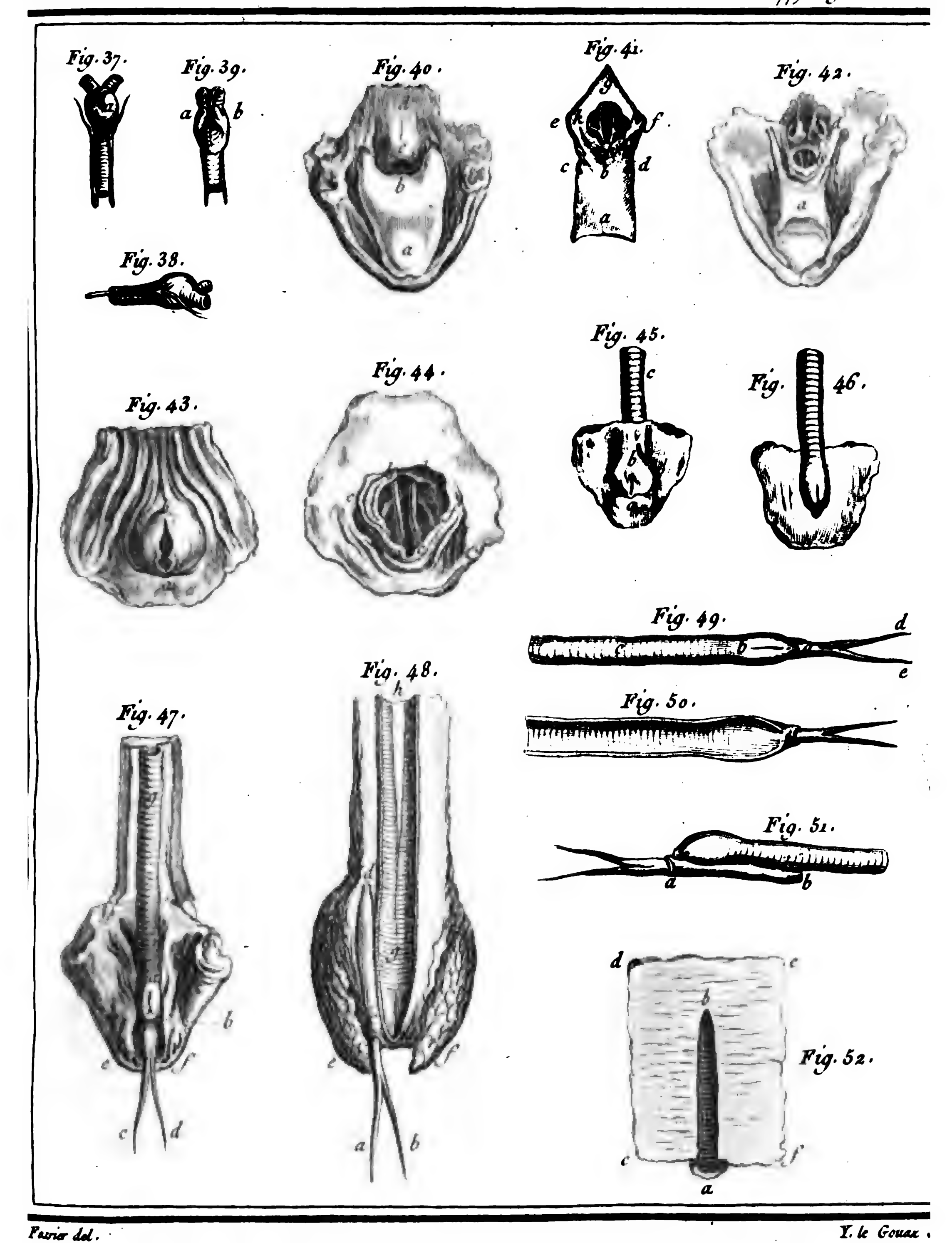
Fossier del. Y. le Gouaz Sculp.



Fossier del *Y. le Gouaz Sc.*



Fourier del. Y. le Gouaz S



Fevrier del. Y. le Gouaz.

Fig. 52. d. e. c. f. Vesicules dans lesquelles se Termine la Trachée-Artère.

MÉMOIRE SUR LES SUITES.

Par M. DE LA PLACE.

I.

LA théorie des Suites eſt un des objets les plus importans de l'analyſe: tous les Problèmes qui ſe réduiſent à des approximations, & conſéquemment preſque toutes les applications des Mathématiques à la Nature, dépendent de cette théorie; auſſi voyons-nous qu'elle a principalement fixé l'attention des Géomètres; ils ont trouvé un grand nombre de beaux théorèmes & de méthodes ingénieuſes, ſoit pour développer les fonctions en ſéries, ſoit pour ſommer les ſuites exactement ou par approximation; mais ils n'y ſont parvenus que par des voies indirectes & particulières, & l'on ne peut douter que dans cette branche de l'analyſe, comme dans toutes les autres, il n'y ait une manière générale & ſimple de l'enviſager, dont les vérités déjà connues dérivent, & qui conduiſe à pluſieurs vérités nouvelles. La recherche d'une ſemblable méthode eſt l'objet de ce Mémoire; celle à laquelle je ſuis parvenu eſt fondée ſur la conſidération de ce que je nomme *fonctions génératrices:* c'eſt un nouveau genre de calcul, que l'on peut nommer *calcul des fonctions génératrices*, & qui m'a paru mériter d'être cultivé par les Géomètres. J'expoſe d'abord quelques réſultats très-ſimples ſur ces fonctions, & j'en déduis une méthode pour interpoler les ſuites, non-ſeulement lorſque les différences conſécutives des termes ſont convergentes, ce qui eſt le ſeul cas que l'on ait conſidéré juſqu'ici; mais encore lorſque la ſérie propoſée converge vers une ſuite récurrente, la dernière raiſon de ſes termes étant donnée par une équation linéaire aux différences finies, dont les coëfficiens ſont conſtans. L'intégration de ce genre d'équation eſt un corollaire de cette analyſe.

En paſſant enſuite du fini à l'infiniment petit, je donne une formule générale pour interpoler les ſuites, dont la dernière raiſon des termes eſt repréſentée par une équation linéaire aux différences infiniment petites, dont les coëfficiens ſont conſtans; d'où je conclus l'intégration de ces équations. En appliquant la même méthode à la transformation des ſuites, il en réſulte un moyen fort ſimple de les transformer en d'autres, dont les termes ſuivent une loi donnée: enfin, le rapport des fonctions génératrices aux variables correſpondantes, me conduit immédiatement à l'analogie ſingulière des puiſſances poſitives avec les différences, & des puiſſances négatives avec les intégrales, analogie obſervée d'abord par Léibnitz, & miſe depuis dans un plus grand jour par M. de la Grange *(Mémoires de Berlin, année 1772)*; tous les théorèmes auxquels le ſecond de ces deux grands Géomètres eſt parvenu dans les Mémoires cités d'après cette analogie, & beaucoup d'autres encore, ſe déduiſent avec la plus grande facilité, de ce rapport.

En conſidérant de la même manière les ſéries à deux variables, j'expoſe une méthode générale pour les interpoler, non-ſeulement dans le cas où les différences conſécutives des termes de la ſérie ſont convergentes; mais encore lorſque la ſérie converge vers une ſuite *récurrorécurrente*, la dernière raiſon de ſes termes étant donnée par une équation linéaire aux différences finies partielles dont les coëfficiens ſont conſtans; d'où réſulte l'intégration de ce genre d'équations. Cette matière eſt de la plus grande importance dans l'analyſe des haſards; je crois être le premier qui l'ait conſidérée *(voyez les tomes VI & VII des Savans étrangers)*; M. de la Grange l'a depuis traitée par une très-belle & très-ſavante analyſe, dans les Mémoires de Berlin, pour l'*année 1775*; j'oſe eſpérer que la manière nouvelle dont je l'enviſage dans ce Mémoire, ne déplaira pas aux Géomètres. Il ſuit de mes recherches, que l'intégration de toute équation linéaire aux différences finies partielles, dont les coëfficiens ſont conſtans, peut ſe ramener à celle d'une équation linéaire aux différences

infiniment

infiniment petites, au moyen d'*intégrales définies* priſes par rapport à une nouvelle variable; je nomme *intégrale définie*, une intégrale priſe depuis une valeur déterminée de la variable juſqu'à une autre valeur déterminée. Cette remarque plus curieuſe qu'utile dans la théorie des différences finies, devient très-utile, lorſqu'on la tranſporte aux équations linéaires aux différences infiniment petites partielles; elle donne un moyen de les intégrer dans une infinité de cas qui ſe refuſent à toutes les méthodes connues, & ſans elle il m'eût été preſque impoſſible de prévoir les formes dont les intégrales ſont alors ſuſceptibles. Mais pour rendre ce que je viens de dire plus ſenſible, il ne ſera pas inutile de rappeler en peu de mots ce que l'on a découvert ſur les équations linéaires aux différences infiniment petites partielles du ſecond ordre. L'intégrale de ces équations renferme, comme l'on ſait, deux fonctions arbitraires; on a de plus remarqué que ces fonctions peuvent être dans l'intégrale, affectées du ſigne différentiel *d*; & c'eſt, ſi je ne me trompe, à M.[rs] Euler & de la Grange que l'on doit cette remarque importante à laquelle ils ont été conduits par la théorie du ſon, dans le cas où l'air eſt conſidéré avec ſes trois dimenſions. Ces deux grands Géomètres ont enſuite étendu leurs méthodes à des équations plus compliquées que celles de ce Problème; mais il reſtoit à trouver une méthode au moyen de laquelle on pût généralement, ou intégrer une équation quelconque linéaire du ſecond ordre, ou s'aſſurer que ſon intégrale eſt impoſſible en termes finis, en n'ayant égard qu'aux ſeules variables qu'elles renferment; c'eſt l'objet d'un Mémoire que j'ai inſéré dans le volume de l'Académie, pour l'*année 1773*. Dans ce Mémoire, j'ai démontré 1.° Que les fonctions arbitraires ne peuvent exiſter dans l'intégrale que ſous une forme linéaire: 2.° Que ſi l'intégrale eſt poſſible en termes finis, en ne conſidérant que les ſeules variables de l'équation, une des deux fonctions arbitraires eſt néceſſairement délivrée du ſigne intégral $\int$. J'ai donné enſuite une méthode générale pour avoir dans ce cas l'intégrale complète de l'équation

différentielle, en ſuppoſant même que cette équation renferme un terme indépendant de la variable principale, & qui ſoit une fonction quelconque des deux autres variables; d'où il ſuit, que lorſqu'une équation propoſée ſe refuſe à cette méthode, on peut être aſſuré que ſon intégrale complète eſt impoſſible en termes finis, en n'ayant égard qu'aux ſeules variables de l'équation. Maintenant, la remarque dont j'ai parlé ci-deſſus, m'a fait voir que dans ce cas, l'intégrale eſt poſſible en termes finis, au moyen d'intégrales *définies* priſes par rapport à une nouvelle variable qu'il faut néceſſairement alors introduire dans le calcul. On verra ci-après, que ces formes d'intégrales ſont du même uſage dans la ſolution des Problèmes, que les formes connues; je donne pour les obtenir, une méthode qui s'étend à un grand nombre de cas, & ſpécialement à pluſieurs queſtions phyſiques importantes, telles que le mouvement des cordes vibrantes dans un milieu réſiſtant comme la vîteſſe, la propagation du ſon dans un plan, &c, dont on n'a pu trouver encore que des ſolutions particulières.

En tranſportant aux différences infiniment petites, les remarques que je fais ſur une équation particulière aux différences finies partielles, je parviens à m'aſſurer d'une manière inconteſtable, que dans le Problème des cordes vibrantes, on peut admettre des fonctions diſcontinues, pourvu qu'aucun des angles formés par deux côtés contigus de la figure initiale de la corde ne ſoit fini; d'où il me paroît que ces fonctions peuvent être généralement employées dans tous les Problèmes qui ſe rapportent aux différences partielles, pourvu qu'elles puiſſent ſubſiſter avec les équations différentielles & avec les conditions du Problème; ainſi, la ſeule condition qui ſoit néceſſaire dans la détermination des fonctions arbitraires d'une équation propoſée aux différences partielles de l'ordre n, eſt qu'il n'y ait point de ſaut entre deux valeurs conſécutives d'une différence de ces fonctions, plus petite que la différence $n^{\text{ième}}$; & par conſéquent, que dans les courbes, au moyen deſquelles on repréſente ces fonctions arbitraires, il n'y ait point de ſaut entre deux

tangentes consécutives, si, comme dans le Problème des cordes vibrantes, l'équation différentielle est du second ordre, ou qu'il n'y ait point de saut entre deux rayons osculateurs consécutifs, si l'équation est du troisième ordre, &c; ce qui est conforme à ce que M. le Marquis de Condorcet a trouvé par une autre méthode, dans les Mémoires de l'Académie, pour l'*année 1771, pages 70 & 71*. Mais il est essentiel d'observer que si l'intégrale renferme les différences des fonctions arbitraires, on doit considérer les différences les plus élevées comme les véritables fonctions arbitraires de l'intégrale, & n'appliquer la règle précédente qu'à ces différences. Cette manière d'éclairer les points délicats de la théorie des différences infiniment petites, par celle des différences finies, est, si je ne me trompe, la plus propre à remplir cet objet, & il me semble que d'après la théorie que j'expose, il ne doit rester aucun doute sur l'usage des fonctions discontinues dans le calcul intégral aux différences partielles. Enfin, je termine ce Mémoire par la considération des équations linéaires aux différences partielles, en parties finies, & en parties infiniment petites, & par quelques théorèmes sur la réduction en séries, des fonctions à deux variables. Toutes ces recherches n'étant que le développement d'une considération fort simple sur la nature des fonctions génératrices, j'ose me flatter que l'analyse dont j'ai fait usage, pourra mériter, par sa généralité, l'attention des Géomètres.

II.

Des Suites à une seule variable.

SOIT y_x une fonction quelconque de x; si l'on forme la suite infinie

$$y_0 + y_1 . t + y_2 . t^2 + y_3 . t^3 \ldots\ldots + y_x . t^x + y_{x+1} . t^{x+1} \ldots\ldots + y_\infty . t^\infty,$$

& que l'on nomme u la somme de cette suite, ou ce qui revient au même, la fonction dont le développement forme

cette ſuite ; cette fonction ſera ce que je nomme *fonction génératrice* de la variable y_x.

Une fonction génératrice d'une variable quelconque y_x, eſt donc généralement une fonction de t, qui, développée ſuivant les puiſſances de t, a cette variable y_x pour coëfficient de t^x; & réciproquement, la variable correſpondante d'une fonction génératrice, eſt le coëfficient de t^x dans le développement de cette fonction ſuivant les puiſſances de t. Il ſuit de ces définitions, que u étant la fonction génératrice de y_x, celle de y_{x-r} ſera $u.t^r$; car il eſt viſible que le coëfficient de t^x dans $u\,t^r$, eſt égal à celui de t^{x-r} dans u, & par conſéquent égal à y_{x-r}.

Le coëfficient de t^x dans $u.(\frac{1}{t} - 1)$ eſt évidemment égal à $y_{x+1} - y_x$, ou à $\Delta.y_x$, Δ étant la caractériſtique des différences finies; on aura donc la fonction génératrice de la différence finie d'une quantité, en multipliant par $\frac{1}{t} - 1$, la fonction génératrice de la quantité elle-même; la fonction génératrice de $\Delta^2 y_x$ eſt ainſi, $u.(\frac{1}{t} - 1)^2$, & généralement, celle de $\Delta^i.y_x$ eſt $u.(\frac{1}{t} - 1)^i$; d'où l'on peut conclure que la fonction génératrice de $\Delta^i.y_{x-r}$, eſt $u.t^r.(\frac{1}{t} - 1)^i$.

Pareillement, le coëfficient de t^x dans

$$u.(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} \ldots\ldots + \frac{q}{t^n}) \text{ eſt}$$

$$a y_x + b.y_{x+1} + c.y_{x+2} + e.y_{x+3} \ldots\ldots + q.y_{x+n};$$

en nommant donc $\nabla.y_x$ cette quantité, ſa fonction génératrice ſera

$$u.(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} \ldots\ldots\ldots + \frac{q}{t^n}).$$

Si l'on nomme $\nabla^2 y_x$ la quantité

$$a\nabla . y_x + b . \nabla . y_{x+1} + c . \nabla . y_{x+2} \ldots\ldots + q . \nabla . y_{x+n},$$

$\nabla^3 . y_x$ la quantité

$$a\nabla^2 . y_x + b . \nabla^2 . y_{x+1} + c\nabla^2 . y_{x+2} \ldots\ldots + q . \nabla^2 . y_{x+n},$$

& ainsi de suite; leurs fonctions génératrices correspondantes seront

$$u . (a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots\ldots\ldots + \frac{q}{t^n})^2,$$

$$u . (a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots\ldots\ldots + \frac{q}{t^n})^3,$$

&c.

& généralement, la fonction génératrice de $\nabla^i . y_x$ sera

$$u . (a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots\ldots \frac{q}{t^n})^i.$$

Partant la fonction génératrice de $\Delta^i . \nabla^s . y_{x-r}$ sera

$$u . t^r . (a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots\ldots + \frac{q}{t^n})^s . (\frac{1}{t} - 1)^i.$$

On peut généraliser encore les théorèmes précédens, en supposant que $\nabla . y_x$ représente une fonction quelconque linéaire de y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, &c ; que $\nabla^2 . y_x$ représente une nouvelle fonction dans laquelle $\nabla . y_x$ entre de la même manière que y_x dans $\nabla . y_x$; que $\nabla^3 . y_x$ représente une fonction de $\nabla^2 y_x$ semblable à celle de $\nabla . y_x$ en y_x, & ainsi de suite; car u étant la fonction génératrice de y_x, si l'on nomme us celle de $\nabla . y_x$, us^2, $u . s^3$, &c, seront les fonctions génératrices de $\nabla^2 . y_x$, $\nabla^3 . y_x$, &c; en multipliant donc la fonction u, par les puissances successives de s, on aura les fonctions génératrices des produits de y_x, par les puissances correspondantes de ∇, ∇ n'étant point une quantité, mais une caractéristique; & cela sera encore vrai, en supposant ces puissances fractionnaires, & même incommensurables.

s étant une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$, si l'on développe s^i, suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, & que l'on désigne par $\frac{K}{t^m}$, un terme quelconque de ce développement, le coëfficient de t^x dans $\frac{K.u}{t^m}$, sera $K.y_{x+m}$; on aura donc le coëfficient de t^x dans us^i, ou ce qui revient au même, on aura $\nabla^i.y^x$, 1.° en substituant dans s, y_x au lieu de $\frac{1}{t}$; 2.° en développant ce que devient alors s^i, suivant les puissances de y_x, & en ajoutant à x, dans chaque terme, l'exposant de la puissance de y_x, c'est-à-dire en écrivant y_x, au lieu de $(y_x)^0$; y_{x+1}, au lieu de $(y_x)^1$; y_{x+2}, au lieu de $(y_x)^2$, & ainsi de suite.

Si au lieu de développer s^i, suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, on le développe suivant les puissances de $\frac{1}{t} - 1$, & que l'on désigne par $K.(\frac{1}{t} - 1)^m$, un terme quelconque de ce développement, le coëfficient de t^x dans $Ku.(\frac{1}{t} - 1)^m$, sera $K.\Delta^m.y_x$; on aura donc $\nabla^i.y_x$, 1.° en substituant dans s, $\Delta.y_x$, au lieu de $\frac{1}{t} - 1$, ou, ce qui revient au même, $1 + \Delta y_x$, au lieu de $\frac{1}{t}$; 2.° en développant ce que devient alors s^i, suivant les puissances de $\Delta.y_x$, & en appliquant à la caractéristique Δ les exposans des puissances de $\Delta.y_x$, c'est-à-dire en écrivant $\Delta^0.y_x$, ou y_x, au lieu de $(\Delta.y_x)^0$; $\Delta^2 y_x$, au lieu de $(\Delta.y_x)^2$, & ainsi de suite.

En général, si l'on considère s comme une fonction de r, r étant une fonction de $\frac{1}{t}$, telle que le coëfficient de t^x dans ur, soit $\square.y_x$; on aura $\nabla^i.y_x$, en substituant dans

s, $\square . y_x$, au lieu de r; en développant ensuite ce que devient alors s^i, suivant les puissances de $\square . y_x$, & en appliquant à la caractéristique $\square$, les exposans des puissances de $\square . y_x$, c'est-à-dire en écrivant $\square^0 . y_x$, ou y_x, au lieu de $(\square . y_x)^0$; $\square^2 . y_x$, au lieu de $(\square . y)^2$, & ainsi du reste. On aura donc ainsi les valeurs de $\nabla . y_x$, $\nabla^2 . y_x$, &c, par de simples développemens de fonctions algébriques.

Soit z la fonction génératrice de $\Sigma^i . y_x$, Σ étant la caractéristique des intégrales finies; on aura, par ce qui précède, $z . (\frac{1}{t} - 1)^i$ pour la fonction génératrice de y_x; mais cette fonction doit, en n'ayant égard qu'aux puissances positives ou nulles de t, se réduire à u; on aura donc

$$z . (\frac{1}{t} - 1)^i = u + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} \ldots + \frac{F}{t^i};$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{u t^i + A . t^{i-1} + B . t^{i-2} + C . t^{i-3} \ldots\ldots + F}{(1 - t)^i}.$$

A, B, C, ... F étant les i constantes arbitraires qu'introduisent les i intégrations successives de y_x. En faisant abstraction de ces constantes, la fonction génératrice de $\Sigma^i . y_x$ seroit $u . (\frac{1}{t} - 1)^{-i}$; on auroit donc la fonction génératrice de $\Sigma^i . y_x$, en changeant i en $-i$ dans la fonction génératrice de $\Delta^i . y_x$; & réciproquement, on auroit la variable correspondante de la fonction $u . (\frac{1}{t} - 1)^i$, dans laquelle on suppose i négatif, en changeant i en $-i$ dans $\Delta^i . y_x$, & en supposant que les différences négatives représentent des intégrales; mais si l'on a égard aux constantes arbitraires, il faut, en passant des puissances positives aux puissanees négatives de $\frac{1}{t} - 1$, augmenter u d'un nombre de termes $\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} +$ &c, égal à

l'exposant de la puissance négative de $\frac{1}{t} - 1$. On voit par-là, comment les fonctions génératrices se forment de la loi des variables correspondantes, & réciproquement de quelle manière ces variables se déduisent de leurs fonctions génératrices. Appliquons maintenant ces résultats à la théorie des suites.

III.

De l'interpolation des suites à une seule variable, & de l'intégration des équations différentielles linéaires.

TOUTE la théorie de l'interpolation des suites, consiste à déterminer, quel que soit i, la valeur de y_{x+i} en fonctions de y_x, & des termes qui précèdent ou qui suivent y_x. Pour cela, on doit observer que y_{x+i} est égal au coëfficient de t^{x+i} dans le développement de u, & par conséquent, égal au coëfficient de t^x dans le développement de $\frac{u}{t^i}$; or on a

$$\frac{u}{t^i} = u\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^i = u.\left\{1 + i.\left(\frac{1}{t} - 1\right) + \frac{i.(i-1)}{1.2}.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \frac{i.(i-1).(i-2)}{1.2.3}.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^3 + \&c.\right\}$$

De plus, le coëfficient de t^x dans le développement de u, est y_x; ce coëfficient dans le développement de $u.\left(\frac{1}{t} - 1\right)$, est $\Delta.y_x$; dans le développement de $u.\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2$, il est égal à $\Delta^2.y_x$, & ainsi de suite; on aura donc, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$y_{x+i} = y_x + i.\Delta.y_x + \frac{i.(i-1)}{1.2}.\Delta^2.y_x + \frac{i.(i-1).(i-2)}{1.2.3}.\Delta^3.y_x + \&c.$$

Cette équation ayant lieu, quel que soit i, servira à interpoler les suites dont les différences des termes vont en décroissant.

Toutes

Toutes les manières de développer la puissance $\frac{1}{t^i}$, donneront autant de méthodes différentes pour interpoler les suites; soit par exemple, $\frac{1}{t} = 1 + \frac{\alpha}{t^r}$; en développant $\frac{1}{t^i}$, suivant les puissances de α, au moyen du beau théorème de M. de la Grange, (*voyez les Mémoires de l'Académie, année 1777, page 115*) on trouvera facilement

$$\frac{u}{t^i} = u.\left\{1 + i.\alpha + \frac{i.(i+2r-1)}{1.2}.\alpha^2 + \frac{i.(i+3r-1).(i+3r-2)}{1.2.3}.\alpha^3 + \frac{i.(i+4r-1).(i+4r-2).(i+4r-3)}{1.2.3}.\alpha^4 + \&c.\right\}$$

Maintenant, α étant égal à $t^r.(\frac{1}{t} - 1)$, le coëfficient de t^x dans le développement de $u\alpha$, est par l'*article précédent*, $\Delta.y_{x-r}$; ce même coëfficient dans le développement de $u\alpha^2$, est $\Delta^2.y_{x-2r}$, & ainsi de suite; on aura donc

$$y_{x+i} = y_x + i.\Delta.y_{x-r} + \frac{i.(i+2r-1)}{1.2}.\Delta^2.y_{x-2r} + \frac{i.(i+3r-1).(i+3r-2)}{1.2.3}.\Delta^3.y_{x-3r} + \frac{i.(i+4r-1).(i+4r-2).(i+4r-3)}{1.2.3.4}.\Delta^4.y_{x-4r} + \&c.$$

IV.

Voici présentement une méthode générale d'interpolation qui a l'avantage de s'appliquer, non-seulement aux suites dont les différences des termes finissent par être nulles, mais encore aux suites dont la dernière raison des termes est celle d'une suite récurrente quelconque.

Supposons d'abord que l'on ait

$$t.(\frac{1}{t} - 1)^2 = z.$$

& cherchons la valeur de $\frac{1}{t^i}$ en z.

Il est clair que $\frac{1}{t^i}$ est égal au coëfficient de θ^i, dans le

développement de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$; si l'on multiplie le numérateur & le dénominateur de cette fraction par $1 - \theta t$, on aura celle-ci $\frac{1-\theta t}{1-\theta(\frac{1}{t}+t)+\theta^2}$; l'équation $t.(\frac{1}{t} - 1)^2 = z$, donne $\frac{1}{t} + t = 2 + z$, ce qui change la fraction précédente dans la suivante $\frac{1-\theta t}{(1-\theta)^2 - z\theta}$; or on a

$$\frac{1}{(1-\theta)^2 - z\theta} = \frac{1}{(1-\theta)^2} + \frac{z\theta}{(1-\theta)^4} + \frac{z^2.\theta^2}{(1-\theta)^6} + \frac{z^3.\theta^3}{(1-\theta)^8} + \&c.$$

D'ailleurs, le coëfficient de θ^r dans le développement de $\frac{1}{(1-\theta)^s}$, est égal à $\frac{\partial^r.(1-\theta)^{-s}}{1.2.3\ldots\ldots r.\partial\theta^r}$, pourvu que l'on suppose $\theta = 0$ après les différenciations, ce qui donne $\frac{s.(s+1).(s+2)\ldots\ldots\ldots\ldots(s+r-1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots r}$ pour ce coëfficient; d'où il suit que le coëfficient de θ^i est 1.° $i+1$ dans le développement de $\frac{1}{(1-\theta)^2}$; 2.° $\frac{i.(i+1).(i+2)}{1.2.3}$ dans le développement de $\frac{\theta}{(1-\theta)^4}$; 3.° $\frac{(i-1).i.(i+1).(i+2).(i+3)}{1.2.3.4.5}$ dans le développement de $\frac{\theta^2}{(1-\theta)^6}$; & ainsi du reste; donc si l'on nomme Z le coëfficient de θ^i dans le développement de la fraction $\frac{1}{(1-\theta)^2 - z\theta}$, on aura

$$Z = (i+1) + \frac{i.(i+1).(i+2)}{1.2.3}.z + \frac{(i-1).i.(i+1).(i+2).(i+3)}{1.2.3.4.5}.z^2$$
$$+ \frac{(i-2).(i-1).i.(i+1).(i+2).(i+3).(i+4)}{1.2.3.4.5.6.7}.z^3 + \&c.$$

ou

$$Z = i + 1 + \frac{(i+1).[(i+1)^2 - 1]}{1.2.3}.z + \frac{(i+1).[(i+1)^2-1].[(i+1)^2-4]}{1.2.3.4.5}.z^2$$
$$+ \frac{(i+1).[(i+1)^2-1].[(i+1)^2-4].[(i+1)^2-9]}{1.2.3.4.5.6.7}.z^3 + \&c.$$

Si l'on nomme ensuite Z' le coëfficient de θ^i dans le développement de $\frac{\theta}{(1-\theta)^2 - z\theta}$, on aura Z', en changeant dans Z, i en $i - 1$, ce qui donne

$$Z' = i + \frac{i.(i^2-1)}{1.2.3}.z + \frac{i.(i^2-1).(i^2-4)}{1.2.3.4.5}.z^2$$
$$+ \frac{i.(i^2-1).(i^2-4).(i^2-9)}{1.2.3.4.5.6.7}.z^3 + \&c;$$

on aura ainsi $Z - tZ'$, pour le coëfficient de θ^i, dans le développement de la fraction $\frac{1-\theta t}{(1-\theta)^2 - z\theta}$; ce sera par conséquent l'expression de $\frac{1}{t^i}$; partant

$$\frac{u}{t^i} = u.(Z - tZ').$$

Cela posé, le coëfficient de t^x dans $\frac{u}{t^i}$, est y_{x+i}; ce même coëfficient, dans un terme quelconque de $u.Z$, tel que Kuz^r, ou, ce qui revient au même, $Ku.t^r.(\frac{1}{t} - 1)^{2r}$, est, par l'*article II*, égal à $K.\Delta^{2r}.y_{x-r}$; dans un terme quelconque de utZ', tel que $Kut.z^r$, ce coëfficient est $K.\Delta^{2r}.y_{x-r-1}$; on aura donc, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$y_{x+i} = (i+1).y_x + \frac{(i+1).[(i+1)^2-1]}{1.2.3}.\Delta^2.y_{x-1}$$
$$+ \frac{(i+1).[(i+1)^2-1].[(i+1)^2-4]}{1.2.3.4.5}.\Delta^4.y_{x-2} + \&c.$$
$$- i.y_{x-1} - \frac{i.(i^2-1)}{1.2.3}.\Delta^2.y_{x-2}$$
$$- \frac{i.(i^2-1).(i^2-4)}{1.2.3.4.5}.\Delta^4.y_{x-3} - \&c.$$

On peut varier encore la forme précédente de y_{x+i}; pour cela, soit Z'' ce que devient Z', lorsqu'on y change i en $i - 1$, & par conséquent ce que devient Z, lorsqu'on y change i en $i - 2$; l'équation $\frac{1}{t^i} = Z - tZ'$ donnera $\frac{1}{t^{i-1}} = Z' - tZ''$; partant $\frac{1}{t^i} = \frac{Z'}{t} - Z''$; en ajoutant ces deux valeurs de $\frac{1}{t^i}$, & prenant la moitié de leur somme, on aura

$$\frac{1}{t^i} = \tfrac{1}{2} . Z - \tfrac{1}{2} . Z'' + \tfrac{1}{2}(1 + t) . (\tfrac{1}{t} - 1) Z';$$

or on a

$$\tfrac{1}{2}.Z - \tfrac{1}{2}.Z'' = \tfrac{1}{2}.\{i + 1 + \frac{i.(i+1).(i+2)}{1.2.3} . z + \&c.\}$$
$$- \tfrac{1}{2}.\{i - 1 + \frac{(i-2).(i-1).i}{1.2.3} . z + \&c.\}$$
$$= 1 + \frac{i^2}{1.2} + z \cdot \frac{i^2.(i^2-1)}{1.2.3.4} . z^2 + \frac{i^2.(i^2-1).(i^2-4)}{1.2.3.4.5.6} . z^3 + \&c.$$

Partant

$$\frac{u}{t^i} = u . \{1 + \frac{i^2}{1.2} . t . (\frac{1}{t} - 1)^2 + \frac{i^2.(i^2-1)}{1.2.3.4} . t^2 . (\frac{1}{t} - 1)^4$$
$$+ \frac{i^2.(i^2-1).(i^2-4)}{1.2.3.4.5.6} . t^3 . (\frac{1}{t} - 1)^6 + \&c.\}$$
$$+ \frac{i}{2} . u . (1+t) . \{\frac{1}{t} - 1 + \frac{i^2-1}{1.2.3} . t . (\frac{1}{t} - 1)^3$$
$$+ \frac{(i^2-1).(i^2-4)}{1.2.3.4.5} . t^2 . (\frac{1}{t} - 1)^5 + \&c.\}$$

d'où l'on conclut, par l'*article II*, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$y_{x+i} = y_x + \frac{i^2}{1.2} . \Delta^2 . y_{x-1} + \frac{i^2.(i^2-1)}{1.2.3.4} . \Delta^4 . y_{x-2}$$
$$+ \frac{i^2.(i^2-1).(i^2-4)}{1.2.3.4.5.6} . \Delta^6 . y_{x-3} + \&c.$$
$$+ \frac{i}{2} . \Delta . (y_x + y_{x-1}) + \frac{i}{2} . \frac{i^2-1}{1.2.3} . \Delta^3 . (y_{x-1} + y_{x-2})$$
$$+ \frac{i}{2} . \frac{(i^2-1).(i^2-4)}{1.2.3.4.5} . \Delta^5 . (y_{x-2} + y_{x-3}) + \&c.$$

Cette formule revient à celle que Newton a donnée dans l'opuſcule intitulé *Methodus differentialis*, pour interpoler entre un nombre impair de quantités équidiſtantes; dans ce cas, y_x déſigne la quantité du milieu, & i eſt la diſtance de cette quantité à celle que l'on cherche, qui par conſéquent eſt y_{x+i}, l'unité étant ſuppoſée l'intervalle commun des quantités données.

En différenciant aux différences finies, la formule précédente par rapport à i, on aura

$$y_{x+i+1} - y_{x+i} = \tfrac{1}{2} . \Delta . (y_x + y_{x-1}) + \frac{i.(i+1)}{1.2} . \tfrac{1}{2} . \Delta^3 . (y_{x-1} + y_{x-2})$$

$$+ \frac{(i-1).i.(i+1).(i+2)}{1.2.3.4} . \tfrac{1}{2} . \Delta^5 . (y_{x-2} + y_{x-3}) + \&c.$$

$$+ (2i+1) . \tfrac{1}{2} . \Delta^2 . y_{x-1} + \frac{(2i+1).(i+1).i}{1.2.3} . \tfrac{1}{2} . \Delta^4 . y_{x-2}$$

$$+ \frac{(2i+1).(i+2).(i+1).i.(i-1)}{1.2.3.4.5} . \tfrac{1}{2} . \Delta^6 . y_{x-3} + \&c.$$

Soit $y_{x+1} - y_x = y'_x$, & $i = \frac{s-1}{2}$, on aura

$$y_{x+\frac{s-1}{2}} = \tfrac{1}{2} . (y'_x + y'_{x-1}) + \frac{s^2-1}{2.4} . \tfrac{1}{2} . \Delta^2 . (y'_{x-1} + y'_{x-2})$$

$$+ \frac{(s^2-1).(s^2-9)}{2.4.6.8} . \tfrac{1}{2} . \Delta^4 . (y'_{x-2} + y'_{x-3}) + \&c.$$

$$+ \frac{s}{2} . \Delta . y'_{x-1} + \frac{s.(s^2-1)}{2.4.6} . \Delta^3 . y'_{x-2}$$

$$+ \frac{s.(s^2-1).(s^2-9)}{2.4.6.8.10} . \Delta^5 . y'_{x-3} + \&c.$$

Cette formule revient à celle que Newton a donnée dans l'opuſcule cité, pour interpoler entre un nombre pair de quantités équidiſtantes; y'_x exprime la ſeconde des deux quantités moyennes, & $\frac{s-1}{2}$ exprime ſa diſtance à celle que l'on cherche, & qui par conſéquent eſt $y'_{x+\frac{s-1}{1}}$, l'unité repréſentant l'intervalle commun des quantités données.

V.

SUPPOSONS généralement

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} \ldots\ldots + \frac{p}{t^{n-1}} + \frac{q}{t^n}; \; (a)$$

on aura

$$\frac{1}{t^n} = \frac{z-a}{q} - \frac{b}{qt} - \frac{c}{qt^2} \ldots\ldots\ldots - \frac{p}{qt^{n-1}},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{t^{n+1}} = \frac{z-a}{qt} - \frac{b}{qt^2} - \frac{c}{qt^3} \ldots\ldots\ldots - \frac{p}{qt^n};$$

en éliminant $\frac{1}{t^n}$ du ſecond membre de cette équation, au moyen de la propoſée *(a)*, on aura

$$\frac{1}{t^{n+1}} = -\frac{p.(z-a)}{q^2} + \frac{pb + q.(z-a)}{q^2.t} + \&c.$$

Cette expreſſion de $\frac{1}{t^{n+1}}$, ne renferme que des puiſſances de $\frac{1}{t}$, d'un ordre inférieur à n; & en continuant d'éliminer ainſi la puiſſance $\frac{1}{t^n}$, à meſure qu'elle ſe préſente, il eſt clair que l'on arrivera à une expreſſion de $\frac{1}{t^i}$, qui ne renfermera que des puiſſances de $\frac{1}{t}$, moindres que n, & qui, par conſéquent, aura cette forme,

$$\frac{1}{t^i} = Z + \frac{1}{t}.Z^{(1)} + \frac{1}{t^2}.Z^{(2)} + \frac{1}{t^3}.Z^{(3)} \ldots + \frac{1}{t^{n-1}}.Z^{(n-1)},$$

$Z, Z^{(1)}, Z^{(2)} \ldots\ldots Z^{(n-1)}$ étant des fonctions rationnelles & entières de z, dont la première ne ſurpaſſe pas le degré $\frac{i}{n}$, la ſeconde ne ſurpaſſe pas le degré $\frac{i}{n} - 1$, la troiſième le degré $\frac{i}{n} - 2$, & ainſi du reſte.

Cette manière de déterminer $\frac{1}{t^i}$, eſt très-pénible, lorſque i eſt un peu conſidérable ; elle conduiroit d'ailleurs difficilement à l'expreſſion générale de cette quantité ; on pourra y parvenir directement par la méthode ſuivante.

$\frac{1}{t^i}$ étant égal au coëfficient de θ^i, dans le développement de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$, on multipliera le numérateur & le dénominateur de cette fraction, par

$$(a - z).\theta^n + b.\theta^{n-1} + c.\theta^{n-2} \ldots\ldots + p\theta + q;$$

& en ſubſtituant dans le numérateur, au lieu de z, ſa valeur $a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} +$ &c, on aura

$$\frac{b.\theta^{n-1}\left(1-\frac{\theta}{t}\right) + c\theta^{n-2}.\left(1-\frac{\theta^2}{t^2}\right) + e\theta^{n-3}.\left(1-\frac{\theta^3}{t^3}\right) \ldots\ldots + q.\left(1-\frac{\theta^n}{t^n}\right)}{\left(1-\frac{\theta}{t}\right).\left(a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + e\theta^{n-3} \ldots\ldots + p\theta + q - z\theta^n\right)};$$

le numérateur de cette fraction eſt diviſible par $1 - \frac{\theta}{t}$; on peut donc, en faiſant la diviſion, la mettre ſous cette forme,

$$\left.\frac{\begin{array}{l} b.\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + e\theta^{n-3} \ldots + p\theta + q \\ + \frac{\theta}{t}.\left(c\theta^{n-2} + e\theta^{n-3} \ldots + p\theta + q\right) \\ + \frac{\theta^2}{t^2}.\left(e\theta^{n-3} + \text{\&c.} \ldots + p\theta + q\right) \\ + \text{\&c.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{q\theta^{n-1}}{t^{n-1}} \end{array}}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + e\theta^{n-3} \ldots + p\theta + q - z\theta^n}\right\} ; (A)$$

La recherche du coëfficient de θ^i dans le développement de

cette fraction, se réduit ainsi à déterminer, quel que soit r, le coëfficient de θ^r dans le développement de la fraction

$$\frac{1}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + e\theta^{n-3} \ldots + p\theta + q - z\theta^n}.$$

Pour cela, considérons généralement la fraction $\frac{P}{Q}$, P & Q étant des fonctions rationnelles & entières de θ, la première étant d'un ordre inférieur à celui de la seconde. Supposons que Q ait un facteur $\theta - \alpha$, élevé à la puissance s, & faisons $Q = (\theta - \alpha)^s . R$; on peut toujours, comme l'on sait, décomposer la fraction $\frac{P}{Q}$ en deux autres, $\frac{A}{(\theta - \alpha)^s} + \frac{B}{R}$, A & B étant des fonctions rationnelles & entières de θ, la première de l'ordre $s - 1$, & la seconde d'un ordre inférieur à celui de R; on aura donc

$$\frac{A}{(\theta - \alpha)^s} + \frac{B}{R} = \frac{P}{(\theta - \alpha)^s . R},$$

ce qui donne

$$A = \frac{P}{R} - \frac{B.(\theta - \alpha)^s}{R}.$$

Si l'on considère A, B, P & R, comme des fonctions rationnelles & entières de $\theta - \alpha$, A sera une fonction de l'ordre $s - 1$, & par conséquent, il sera égal au développement de $\frac{P}{R}$, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de $\theta - \alpha$, pourvu que l'on s'arrête à la puissance $s - 1$.

Soit donc

$$\frac{P}{R} = y + y_1 . (\theta - \alpha) + y_2 . (\theta - \alpha)^2 + \&c,$$

on aura

$$\frac{A}{(\theta - \alpha)^s} = \frac{y}{(\theta - \alpha)^s} + \frac{y_1}{(\theta - \alpha)^{s-1}} + \frac{y_2}{(\theta - \alpha)^{s-2}} + \&c,$$

en

en rejetant les puissances positives ou nulles de $\theta - \alpha$; $\frac{A}{(\theta - \alpha)^s}$ sera par conséquent égal au coëfficient de t^{s-1}, dans le développement de

$$\frac{y + y_1 . t + y_2 . t^2 + \&c.}{\theta - \alpha - t}.$$

Or, si l'on nomme P' & R' ce que deviennent P & R, lorsqu'on y change $\theta - \alpha$ en t, ou ce qui revient au même, θ en $t + \alpha$, on aura

$$\frac{P'}{R'} = y + y_1 . t + y_2 . t^2 + \&c.$$

Partant $\frac{A}{(\theta - \alpha)^s}$ sera égal au coëfficient de t^{s-1} dans le développement de $\frac{P'}{R' . (\theta - \alpha - t)}$, & par conséquent, il sera égal à $\frac{1}{1.2.3 \ldots (s-1) . \partial t^{s-1}} . \partial^{s-1} . \frac{P'}{R' . (\theta - \alpha - t)}$, pourvu que l'on suppose $t = 0$, après les différenciations. Maintenant le coëfficient de θ^r, dans $\frac{P'}{R' . (\theta - \alpha - t)}$, étant égal à $- \frac{P'}{R' . (\alpha + t)^{r+1}}$; ce même coëfficient, dans $\frac{1}{1.2.3 \ldots (s-1) . \partial t^{s-1}} . \partial^{s-1} . \frac{P'}{R' . (\theta - \alpha - t)}$, sera $- \frac{1}{1.2.3 \ldots (s-1) . \partial t^{s-1}} . \partial^{s-1} . \frac{P'}{R' (\alpha + t)^{r-1}}$, t étant supposé nul après les différenciations. Cette dernière quantité sera donc le coëfficient de θ^r, dans le développement de $\frac{A}{(\theta - \alpha)^s}$; or, si l'on restitue dans P' & R', $\theta - \alpha$ au lieu de t, ce qui les change en P & R, on aura

$$\partial^{s-1} . \frac{\frac{P'}{R' (t + \alpha)^{r+1}}}{\partial t^{s-1}} = \partial^{s-1} . \frac{\frac{P}{R . \theta^{r+1}}}{\partial \theta^{r+1}},$$

pourvu que l'on suppose $\theta = \alpha$, après les différenciations

dans le second membre de cette équation;

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1).\partial\theta^{s-1}}.\partial^{s-1}.\frac{P}{R.\theta^{r+1}}$$

sera donc, avec cette condition, le coëfficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{A}{(\theta-\alpha)^s}$.

Il suit de-là que si l'on suppose

$$Q = a.(\theta-\alpha)^s.(\theta-\alpha')^{s'}.(\theta-\alpha'')^{s''}. + \&c.$$

le coëfficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{P}{Q}$, sera

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots.(s-1).\partial\theta^{s-1}}.\partial^{s-1}.\left\{\frac{P}{a\theta^{r+1}.(\theta-\alpha')^{s'}.(\theta-\alpha'')^{s''}.\&c.}\right\}$$

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots.(s'-1).\partial\theta^{s'-1}}.\partial^{s'-1}.\left\{\frac{P}{a\theta^{r+1}.(\theta-\alpha).(\theta-\alpha'').\&c.}\right\}$$

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots.(s''-1).\partial\theta^{s''-1}}.\partial^{s''-1}.\left\{\frac{P}{a\theta^{r+1}.(\theta-\alpha).(\theta-\alpha').\&c.}\right\}$$

en faisant après la différenciation, $\theta = \alpha$ dans le premier terme, $\theta = \alpha'$ dans le second terme, $\theta = \alpha''$ dans le troisième terme, & ainsi de suite. Cela posé, soit

$$V = a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2}\ldots\ldots + p\theta + q,$$

& supposons qu'en mettant cette quantité sous la forme d'un produit, on ait

$$V = a.(\theta-\alpha).(\theta-\alpha').(\theta-\alpha'').\&c.$$

en développant la fraction $\frac{1}{V-z\theta^n}$ dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de z, on aura

$$\frac{1}{V}+\frac{z\theta^n}{V^2}+\frac{z^2.\theta^{2n}}{V^3}+\frac{z^3.\theta^{3n}}{V^3}+\&c.$$

& le coëfficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{1}{V^s}$, sera par ce qui précède, égal à

$$-\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1).\alpha^{s}.\partial\theta^{s-1}}.\partial^{s-1}.\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\theta^{r+1}.(\theta-\alpha')^{s}.(\theta-\alpha'')^{s}.\&c.}\\ +\frac{1}{\theta^{r+1}.(\theta-\alpha)^{s}.(\theta-\alpha'')^{s}.\&c.}\\ +\frac{1}{\theta^{r+1}.(\theta-\alpha)^{s}.(\theta-\alpha')^{s}.\&c.}\\ +\&c.\end{array}\right\}$$

pourvu qu'après les différenciations, on suppose $\theta = \alpha$ dans le premier terme, $\theta = \alpha'$ dans le second terme, $\theta = \alpha''$ dans le troisième terme, &c. Soit $Z_r^{(s-1)}$ ce que devient alors cette quantité; le coëfficient de θ^i dans le développement de la fraction $\frac{1}{V - z\theta^n}$, sera

$$Z_i^{(0)} + Z_{i-n}^{(1)}.z + Z_{i-2n}^{(2)}.z^2 + Z_{i-3n}^{(3)}.z^3 + \&c.$$

on aura donc pour le coëfficient de θ^i dans le développement de la fraction (A), & par conséquent pour l'expression de $\frac{1}{t^i}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^i} = \; & b.Z_{i-n+1}^{(0)} + bz.Z_{i-2n+1}^{(1)} + bz^2.Z_{i-3n+1}^{(2)}\\ & + bz^3.Z_{i-4n+1}^{(3)} + \&c.\\ & + c.Z_{i-n+2}^{(0)} + cz.Z_{i-2n+2}^{(1)} + cz^2.Z_{i-3n+2}^{(2)}\\ & + cz^3.Z_{i-4n+2}^{(3)} + \&c.\\ & + e.Z_{i-n+3}^{(0)} + ez.Z_{i-2n+3}^{(1)} + ez^2.Z_{i-3n+3}^{(2)}\\ & + ez^3.Z_{i-4n+3}^{(3)} + \&c.\\ & + \&c.\\ & + \frac{1}{t}.\left\{\begin{array}{l} c.Z_{i-n+1}^{(0)} + cz.Z_{i-2n+1}^{(1)} + cz^2.Z_{i-3n+1}^{(2)}\\ + cz^3.Z_{i-4n+1}^{(3)} + \&c.\\ + e.Z_{i-n+2}^{(0)} + ez.Z_{i-2n+2}^{(1)} + ez^2.Z_{i-3n+2}^{(2)}\\ + ez^3.Z_{i-4n+2}^{(3)} + \&c.\\ + \&c.\end{array}\right\}; (\mu)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{t^2}\cdot\left\{\begin{array}{l} e.Z^{(0)}_{i-n+1}+e\zeta.Z^{(1)}_{i-2n+1}+e\zeta^2.Z^{(2)}_{i-3n+1} \\ +e\zeta^3.Z^{(3)}_{i-4n+1}+\&c. \\ +\&c. \end{array}\right\}$$

$+$ &c.

. . . .

$$+\frac{1}{t^{n-1}}\cdot\{q.Z^{(0)}_{i-n+1}+q\zeta.Z^{(1)}_{i-2n+1}+q\zeta^2.Z^{(2)}_{i-3n+1}+\&c.\}$$

Présentement, si l'on désigne par $\nabla.y_x$, la quantité $ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} \ldots + q.y_{x+n}$; par $\nabla^2.y_x$, la quantité $a.\nabla.y_x + b.\nabla.y_{x+1} + c.\nabla.y_{x+2}\ldots \ldots + q.\nabla.y_{x+n}$; par $\nabla^3.y_x$, la quantité $a.\nabla^2.y_x + b.\nabla^2.y_{x+1} + c.\nabla^2.y_{x+2} \ldots + q.\nabla^2.y_{x+n}$, & ainsi de suite; il est visible, par l'*article II*, que le coëfficient de t^x dans le développement de $\frac{u\zeta^s}{t^r}$, sera $\nabla^s.y_{x+r}$; en multipliant donc l'équation précédente par u, & en ne considérant dans chaque terme que le coëfficient de t^x, c'est-à-dire en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes, on aura

$$\begin{aligned} y_{x+i} = {} & y_x.\{bZ^{(0)}_{i-n+1}+cZ^{(0)}_{i-n+2}+eZ^{(0)}_{i-n+3}\ldots+q.Z^{(0)}_{i}\} \\ & +\nabla.y_x.\{bZ^{(1)}_{i-2n+1}+cZ^{(1)}_{i-2n+2}+eZ^{(1)}_{i-2n+3}\ldots+q.Z^{(1)}_{i-n}\} \\ & +\nabla^2.y_x.\{bZ^{(2)}_{i-3n-1}+cZ^{(2)}_{i-3n+2}+eZ^{(2)}_{i-3n+3}\ldots+q.Z^{(2)}_{i-2n}\} \\ & +\&c. \\ & + y_{x+1}.\{cZ^{(0)}_{i-n+1}+eZ^{(0)}_{i-n+2}\ldots+q.Z^{(0)}_{i-1}\} \\ & +\nabla.y_{x+1}.\{cZ^{(1)}_{i-2n+2}+eZ^{(1)}_{i-2n+2}\ldots+q.Z^{(1)}_{i-n-1}\}; \quad (B) \\ & +\&c. \end{aligned}$$

$$+ \quad y_{x+2}.\{eZ^{(0)}_{i-n+1} \;\ldots\ldots\; + q.Z^{(0)}_{i-2} \quad\}$$

$$+ \nabla . y_{x+2}.\{eZ^{(1)}_{i-2n+1} \;\ldots\ldots\; + q.Z^{(1)}_{i-n-2} \}$$

$$+ \;\&c.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ q.y_{x+n-1}.Z^{(0)}_{i-n+1} + q.\nabla.y_{x+n-1}.Z^{(1)}_{i-2n+1}$$

$$+ q.\nabla^2 y_{x+n-1}.Z^{(2)}_{i-3n+1} + \;\&c.$$

Cette formule servira à interpoler les suites, dont la dernière raison des termes est celle d'une suite récurrente; car il est clair, que dans ce cas, $\nabla.y_x$, $\nabla^2.y_x$, $\nabla^3.y_x$, &c, iront toujours en diminuant, & finiront par être nuls dans l'infini.

Si l'une de ces quantités est nulle, par exemple, si l'on a $\nabla^r.y_x = 0$, la formule précédente donnera l'expression générale de y_x, qui satisfait à cette équation. Pour le faire voir, supposons d'abord $\nabla.y_i = 0$, ou, ce qui revient au même,

$$0 = ay_i + by_{i+1} + cy_{i+2} \;\ldots\; + q.y_{i+n};$$

si l'on fait dans ce cas $x = 0$, dans la formule précédente, elle deviendra

$$y_i = \quad y_0.\{bZ^{(0)}_{i-n+1} + cZ^{(0)}_{i-n+2} + eZ^{(0)}_{i-n+3} \ldots + q.Z^{(0)}_{i} \}$$

$$+ y_1.\{cZ^{(0)}_{i-n+1} + eZ^{(0)}_{i-n+2} \;\ldots\ldots\ldots\; + q.Z^{(0)}_{i-1}\}$$

$$+ y_2.\{eZ^{(0)}_{i-n+1} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; + q.Z^{(0)}_{i-2}\}$$

$$+ \;\&c.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ q.y_{n-1}.Z^{(0)}_{i-n+1}.$$

$y_0, y_1, y_2 \ldots y_{n-1}$ ſont les n premières valeurs de y_i; ce ſont les n conſtantes arbitraires que l'intégration de l'équation $\nabla . y_i = 0$ introduit.

Si l'on a $\nabla^2 . y_i = 0$, la formule générale *(B)* donnera, en y ſuppoſant encore $x = 0$,

$$\begin{aligned} y_i = y_0 . \{ & b . Z^{(0)}_{i-n+1} + c\, Z^{(0)}_{i-n+2} + \&c. \ldots\ldots + q . Z^{(0)}_{i} \} \\ + \nabla . y_0 . \{ & b . Z^{(1)}_{i-2n+1} + c\, Z^{(1)}_{i-2n+2} + \&c. \ldots + q . Z^{(1)}_{i-n} \} \\ + y_1 . \{ & c\, Z^{(0)}_{i-n+1} + \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + q . Z^{(0)}_{i-1} \} \\ + \nabla y_1 . \{ & c\, Z^{(1)}_{i-2n+1} + \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + q . Z^{(1)}_{i-n+1} \} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + q . Z^{(0)}_{i-n+1} & . y_{n-1} + q . Z^{(1)}_{i-2n+1} . \nabla . y_{n-1}, \end{aligned}$$

$y_0, \nabla . y_0, y_1, \nabla . y_1 \ldots\ldots y_{n-1}, \nabla . y_{n-1}$ étant les $2n$ conſtantes arbitraires qu'introduit l'intégration de l'équation $\nabla^2 . y_i = 0$. On auroit de la même manière la valeur de y_i, dans le cas de $\nabla^3 . y_i = 0$, $\nabla^4 . y_i = 0$, &c. & l'on voit ainſi l'analogie qui exiſte entre l'interpolation des ſuites & l'intégration des équations linéaires aux différences finies.

V I.

SOIT $y_x = y'_x + y''_x$, & ſuppoſons que u' ſoit la fonction génératrice de y'_x, & u'' celle de y''_x; on aura $u = u' + u''$; ſoit encore $u'' . z^r = \lambda$, ou $u'' = \frac{\lambda}{z^r}$; ſi l'on déſigne par X_{x+i} le coëfficient de t^{x+i} dans le développement de λ; on aura par l'*article II*, $X_{x+i} = \nabla^r . y''_{x+i}$; preſentement on a

$$\frac{1}{z^r} = \frac{t^{nr}}{(at^n + bt^{n-1} + ct^{n-2} \ldots\ldots + q)^r}.$$

Or le coëfficient de t^{x+i}, dans le développement du second membre de cette équation, est égal à celui de θ^{x+i-ns} dans le développement de $\frac{1}{(a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} \ldots + q)^s}$, & par l'*article précédent*, ce dernier coëfficient est égal à $Z^{(s-1)}_{x+i-ns}$; donc le coëfficient de t^{x+i}, dans le développement de $\frac{\lambda}{z^s}$, sera

$$X_{x+i-ns} . Z^{(s-1)}_0 + X_{x+i-ns-1} . Z^{(s-1)}_1 + \&c \ldots X_0 . Z^{(s-1)}_{x+i-ns},$$

ou $\Sigma . X_r . Z^{(s-1)}_{x+i-ns-r}$, l'intégrale étant prise relativement à r, & depuis $r = o$ jusqu'à $r = x + i - ns$; cette intégrale sera l'expression de y''_{x+i}.

Dans le cas présent, il est facile de la réduire à des intégrales relatives à i; car il résulte de l'expression que nous avons donnée de $Z_i^{(s-1)}$ dans l'*article précédent*, que celle de $Z^{(s-1)}_{x+i-ns-r}$ est réductible à des termes de cette forme $K\text{Ϭ}^r . r^\mu$, en sorte que le terme correspondant de $\Sigma . X_r . Z^{(s-1)}_{x+i-ns-r}$ sera $K . \Sigma . \text{Ϭ}^r . r^\mu X_r$, K étant fonction de $x + i - ns$; or si l'on désigne par la caractéristique Σ', l'intégrale relative à i, on aura

$$K . \Sigma . \text{Ϭ}^r . r^\mu . X_r = K . \Sigma' . \text{Ϭ}^{x+i-ns} . (x + i - ns)^\mu . X_{x+i-ns},$$

pourvu que l'on termine l'intégrale relative à r, lorsque $r = x + i - ns$; on réduira ainsi l'intégrale $\Sigma . X_r . Z^{(s-1)}_{x+i-ns-r}$ à des intégrales uniquement relatives à la variable i. Cela posé, si dans la formule *(B)* on fait $x = o$, & $\nabla^s . y_i = o$, elle donnera

$$y_i^{\prime} + \Sigma \, . \, X_r \, . \, Z_{i-ns-r}^{(s-1)}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} + y_0 \, . \, \{ b \, . \, Z_{i-n+1}^{(0)} + c \, . \, Z_{i-n+2}^{(0)} \ldots\ldots + q \, . \, Z_i^{(0)} \} \\ + \nabla \, . \, y_1 \, . \, \{ b \, . \, Z_{i-2n+1}^{(1)} + c \, . \, Z_{i-2n+2}^{(1)} \ldots\ldots + q \, . \, Z_{i-n}^{(1)} \} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \nabla^{s-1} . \, y_1 \, . \, \{ b \, . \, Z_{i-sn+1}^{(s-1)} + c \, . \, Z_{i-sn+2}^{(s-1)} \ldots\ldots + q \, . \, Z_{i-sn+n}^{(s-1)} \} \end{array} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} y_1 \, . \, \{ c \, . \, Z_{i-n+1}^{(0)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + q \, . \, Z_{i-1}^{(0)} \} \\ + \text{\&c.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \nabla^{s-1} . \, y_1 \, . \, \{ c \, . \, Z_{i-sn+1}^{(s-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + q \, . \, Z_{i-sn+n-1}^{(s-1)} \} \end{array} \right\}$$

$$+ \text{\&c.}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ q \, . \, Z_{i-n+1}^{(0)} \, . \, y_{n-1} + q \, . \, Z_{i-2n+1}^{(1)} \, . \, \nabla \, . \, y_{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + q \, . \, Z_{i-sn+1}^{(s-1)} \, . \, \nabla^{s-1} . \, y_{n-1},$$

y_0, $\nabla . y_0 \ldots \nabla^{s-1} . y_0$, y_1, $\nabla . y_1 \ldots \nabla^{s-1} . y_1$, &c. . . . . . y_{n-1}, $\nabla . y_{n-1} \ldots \nabla^{s-1} . y_{n-1}$ étant les sn arbitraires de l'intégrale de l'équation $\nabla^s . y_i = 0$, ou $\nabla^s . y_i^{\prime} + \nabla^s . y_i^{\prime\prime} = 0$; or $\nabla^s . y_i^{\prime\prime}$ étant égal à X_i, cette équation devient

$$0 = \nabla^s . y_i^{\prime} + X_i;$$

on aura donc, par la formule précédente, l'intégrale de toutes les équations linéaires aux différences finies, dont les coëfficiens sont constans, dans le cas où elles ont un dernier terme qui est fonction de i.

VII.

On peut donner à l'expression de $\frac{1}{t^i}$, une infinité d'autres formes parmi lesquelles il s'en trouve qui peuvent être

être utiles dans plusieurs cas. Voici comment on peut y parvenir.

Pour cela, supposons qu'au lieu de donner, comme ci-dessus, à $\frac{1}{t^i}$, cette forme

$$\frac{1}{t^i} = Z + \frac{1}{t}.Z^{(1)} + \frac{1}{t^2}.Z^{(2)} \ldots + \frac{1}{t^{n-1}}.Z^{(n-1)},$$

on lui donne celle-ci,

$$\frac{1}{t^i} = Z + (\tfrac{1}{t} - 1).Z^{(1)} + (\tfrac{1}{t} - 1)^2.Z^{(2)} \ldots + (\tfrac{1}{t} - 1)^{n-1}.Z^{(n-1)};$$

la question se réduit à déterminer Z, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, &c.

On mettra d'abord l'équation

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots\ldots + \frac{p}{t^{n-1}} + \frac{q}{t^n};$$

sous cette forme,

$$z = a' + b'.(\tfrac{1}{t} - 1) + c'.(\tfrac{1}{t} - 1)^2 \ldots$$
$$\ldots + p'.(\tfrac{1}{t} - 1)^{n-1} + q.(\tfrac{1}{t} - 1)^n,$$

& l'on aura

$$a = a' - b' + c' - \&c. \ldots \mp p' \pm q';$$

les signes supérieurs ayant lieu si n est pair, & les signes inférieurs si n est impair. On multipliera ensuite, comme précédemment, le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{1}{1-\frac{\theta}{t}}$, par

$$(a - z).\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} \ldots + p\theta + q,$$

en observant de substituer dans le numérateur, 1.° au lieu de z,

$$a' + b'.(\tfrac{1}{t} - 1) + c'.(\tfrac{1}{t} - 1)^2 + \&c;$$

2.° au lieu de $a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} +$ &c. la quantité $\theta^n . \{a' + b' . (\frac{1}{\theta} - 1) + c' . (\frac{1}{\theta} - 1)^2 +$ &c.$\}$

Si de plus, on fait, pour abréger, $\frac{1}{t} - 1 = \frac{1}{t'}$, on aura

$$\frac{b'.\theta^{n-1}.(1 - \theta - \frac{\theta}{t'}) + c'.\theta^{n-2}.[(1-\theta)^2 - \frac{\theta^2}{t'^2}] + \&c. \ldots + q.[(1-\theta)^n - \frac{\theta^n}{t'^n}]}{(1 - \frac{\theta}{t}).(a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} \ldots\ldots + p\theta + q - z\theta^n)};$$

or on a $1 - \frac{\theta}{t} = 1 - \theta - \frac{\theta}{t'}$; en divisant donc le numérateur de la fraction précédente, par cette quantité, elle se réduira à celle-ci,

$$\frac{\begin{array}{l} b'.\theta^{n-1} + c'\theta^{n-2}.(1 - \theta + \frac{\theta}{t'}) + e'\theta^{n-3}.[(1-\theta)^2 + (1-\theta).\frac{\theta}{t'} + \frac{\theta^2}{t'^2}] + \&c. \\ + q.[(1-\theta)^{n-1} + (1-\theta)^{n-2}.\frac{\theta}{t'} + (1-\theta)^{n-3}.\frac{\theta^2}{t'^2} + \&c.] \end{array}}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + p\theta + q - z\theta^n},$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\frac{\begin{array}{l} b'\theta^{n-1} + c'\theta^{n-1}.(\frac{1}{\theta} - 1) + e'.\theta^{n-1}.(\frac{1}{\theta} - 1)^2 \ldots + q\theta^{n-1}.(\frac{1}{\theta} - 1)^{n-1} \\ + \frac{\theta^{n-1}}{t'}.\{c' + e'.(\frac{1}{\theta} - 1) \ldots\ldots\ldots + q.(\frac{1}{\theta} - 1)^{n-2}\} \\ + \frac{\theta^{n-1}}{t'^2}.\{e' + \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + q.(\frac{1}{\theta} - 1)^{n-3}\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{q\theta^{n-1}}{t'^{n-1}} \end{array}}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + p\theta + q - z\theta^n},$$

De-là, il est facile de conclure que si l'on conserve à $Z_r^{(s-1)}$, la même signification que nous lui avons donnée dans l'*article V*, & que l'on considère qu'en désignant par q_i, le coëfficient de θ^i dans le développement d'une fonction

quelconque de θ, ce même coëfficient dans le développement de cette fonction multipliée par $(\frac{1}{\theta} - 1)^{\mu}$, sera, par l'*article II*, $\Delta^{\mu} . q_i$, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{t^{\mu}} = b'.Z^{(0)}_{i-n+1} + b'.z.Z^{(1)}_{i-2n+1} + b'.z^2.Z^{(2)}_{i-3n+1} + \&c. \\ \quad + c' . \Delta . Z^{(0)}_{i-n+1} + c' . z . \Delta . Z^{(1)}_{i-2n+1} \\ \quad + c' . z^2 . \Delta . Z^{(2)}_{i-3n+1} + \&c. \\ \quad + e' . \Delta^2 . Z^{(0)}_{i-n+1} + e' . z . \Delta^2 . Z^{(1)}_{i-2n+1} \\ \quad + e' . z^2 . \Delta^2 . Z^{(2)}_{i-3n+1} + \&c. \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + q.\Delta^{n-1}.Z^{(0)}_{i-n+1} + q.z.\Delta^{n-1}.Z^{(1)}_{i-2n+1} \\ \quad + q.z^2.\Delta^{n-1}.Z^{(2)}_{i-3n+1} + \&c. \end{array}\right\} ;(\mu')$$

$$+ \frac{1}{t'} . \left\{\begin{array}{l} c'.Z^{(0)}_{i-n+1} + c' . z . Z^{(1)}_{i-2n+1} + \&c. \\ + e'.\Delta.Z^{(0)}_{i-n+1} + e'.z'.\Delta Z^{(1)}_{i-2n+1} + \&c. \\ + \&c. \end{array}\right\}$$

$$+ \frac{1}{t'^2} . \left\{\begin{array}{l} e' . Z^{(0)}_{i-n+1} + e' . z . Z^{(1)}_{i-2n+1} + \&c. \\ + \&c. \end{array}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{q}{t'^{n-1}} . \left\{Z^{(0)}_{i-n+1} + z . Z^{(1)}_{i-2n+1} + \&c.\right\}$$

Présentement, il est visible par l'*article II*, que le coëfficient de t^x dans le développement de la fonction $\frac{u z^s}{t'^{\mu}}$, est $\Delta^{\mu} . \nabla^s . y_x$; l'équation précédente donnera donc en la

multipliant par u, & en repaſſant des fonctions génératrices aux variables correſpondantes,

$$y_{x+1} = y_x . \{b^1 . Z^{(0)}_{i-n+1} + c^1 . \Delta . Z^{(0)}_{i-n+1} + e^1 . \Delta^2 . Z^{(0)}_{i-n+1} \ldots$$
$$\ldots + q . \Delta^{n-1} . Z^{(0)}_{i-n+1}\}$$
$$+ \nabla . y_x . \{b^1 . Z^{(1)}_{i-2n+1} + c^1 . \Delta . Z^{(1)}_{i-2n+1} + e^1 . \Delta^2 . Z^{(1)}_{i-2n+1} \ldots$$
$$\ldots + q . \Delta^{n-1} . Z^{(1)}_{i-2n+1}\}$$
$$+ \nabla^2 . y_x . \{b^1 . Z^{(2)}_{i-3n+1} + c^1 . \Delta . Z^{(2)}_{i-3n+1} + e^1 . \Delta^2 . Z^{(2)}_{i-3n+1} \ldots$$
$$\ldots + q . \Delta^{n-1} . Z^{(2)}_{i-3n+1}\}$$
$$+ \&c.$$
$$+ \Delta . y_x . \{c^1 . Z^{(0)}_{i-n+1} + e^1 . \Delta . Z^{(0)}_{i-2n+1} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + q . \Delta^{n-2} . Z^{(0)}_{i-n+1}\}$$
$$+ \Delta . \nabla . y_x . \{c^1 . Z^{(1)}_{i-2n+1} + e^1 . \Delta . Z^{(1)}_{i-2n+1} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + q . \Delta^{n-2} . Z^{(1)}_{i-2n+1}\}$$
$$+ \Delta . \nabla^2 . y_x . \{c^1 . Z^{(2)}_{i-3n+1} + e^1 . \Delta . Z^{(2)}_{i-3n+1} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + q . \Delta^{n-2} . Z^{(2)}_{i-3n+1}\}$$
$$+ \&c.$$
$$+ \Delta^2 . y_x . \{e^1 . Z^{(0)}_{i-n+1} \ldots\ldots + q . \Delta^{n-3} . Z^{(0)}_{i-n+1}\}$$
$$+ \Delta^2 . \nabla . y_x . \{e^1 . Z^{(1)}_{i-2n+1} \ldots\ldots + q . \Delta^{n-3} . Z^{(1)}_{i-2n+1}\}$$
$$+ \&c.$$
$$+ q . Z^{(0)}_{i-n+1} . \Delta^{n-1} . y_x + q . Z^{(1)}_{i-2n+1} . \Delta^{n-1} . \nabla . y_x$$
$$+ q . Z^{(2)}_{i-3n+1} . \Delta^{n-1} . \nabla^2 . y_x + \&c.$$

VIII.

SUPPOSONS dans la formule précédente, x & i infiniment grands, de manière que l'on ait $i = \frac{x^1}{\partial x^1}$ & $x = \frac{\varpi}{\partial x^1}$, y_{x+1}

deviendra une fonction de $\varpi + x'$, que nous désignerons par $\varphi(\varpi + x')$; supposons de plus

$$a' = a''; \; b' = \frac{b''}{\partial x'}; \; c' = \frac{c''}{\partial x'^2} \ldots\ldots q = \frac{q''}{\partial x'^n};$$

l'équation

$$0 = a' + b'.\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) + c'.\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^2 \ldots\ldots + q.\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^n.$$

donnera pour θ, n racines de cette forme,

$$\theta = 1 + f\partial x'; \; \theta = 1 + f'\partial x'; \; \theta = 1 + f''\partial x', \text{ \&c.}$$

ce seront les quantités que nous avons nommées α, α', α'', &c. dans l'expression de $Z_r^{(i-1)}$ de l'*article V*, & les valeurs de f, f', f'', &c. seront données par les n racines de l'équation

$$0 = a'' - b''f + c''f^2 \ldots\ldots \pm q''.f^n.$$

Maintenant, si l'on fait $\theta = 1 + h\partial x'$, on aura $\frac{1}{\theta^i} = \frac{1}{(1 + h\partial x')^i}$; le logarithme hyperbolique de cette dernière quantité est $- i \log.(1 + h\partial x') = - ih\partial x' = - hx'$; d'où l'on tire $\frac{1}{\theta^i} = e^{-hx'}$, e étant ici le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; on a d'ailleurs

$$a = a' - b' + c' - \text{\&c.} \ldots \pm q = a'' - \frac{b''}{\partial x'} + \frac{c''}{\partial x'^2} \ldots\ldots \pm \frac{q''}{\partial x'^n};$$

& cette valeur de a se réduit au terme $\pm \frac{q''}{\partial x'^n}$, parce qu'il est infiniment plus grand que les autres; l'expression de $Z_r^{(s-1)}$ de l'*article V*, donnera donc en y changeant r en $i - 1$,

$$Z_{i-1}^{(s-1)} = - \frac{\partial x'}{1.2.3\ldots(s-1).(\pm q'')\,\partial h^{s-1}} . \partial^{s-1}. \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{e^{-hx'}}{(h-f')^s.(h-f'')^s.\text{\&c.}} \\ + \dfrac{e^{-hx'}}{(h-f)^s.(h-f'')^s.\text{\&c.}} \\ + \dfrac{e^{-hx'}}{(h-f)^s.(h-f')^s.\text{\&c.}} \\ + \text{\&c.} \end{array} \right\}$$

la différence ∂^{s-1} étant prise en ne faisant varier que h, & en substituant, après les différenciations, f au lieu de h dans le premier terme, f^1 au lieu de h dans le second terme, & ainsi de suite. Nommons $X^{(s-1)}.\partial x^1$ la quantité précédente, nous aurons, à l'infiniment petit près,

$$Z^{(s-1)}_{i\pm\mu} = Z^{(s-1)}_{i-1} = X^{(s-1)}.\partial x^1;$$

d'ailleurs, on a $y_x = \varphi(\varpi)$, & la caractéristique Δ des différences finies doit se changer ici dans la caractéristique ∂ des différences infiniment petites; en sorte que l'équation

$$\nabla . y_x = a y_x + b y_{x+1} + c . y_{x+2} + \&c.$$

ou, ce qui revient au même, celle-ci,

$$\nabla . y_x = a'' + \frac{b''}{\partial x^1} . \Delta . y_x + \frac{c''}{\partial x^{1\,2}} . \Delta^2 . y_x + \&c.$$

devient, en y changeant ∂x^1 en $\partial\varpi$,

$$\nabla . y_x = a'' + b'' . \frac{\partial . \varphi(\varpi)}{\partial\varpi} + c'' . \frac{\partial^2 . \varphi(\varpi)}{\partial\varpi^2} + e'' . \frac{\partial^3 . \varphi(\varpi)}{\partial\varpi^3} \ldots + q'' . \frac{\partial^r . \varphi(\varpi)}{\partial\varpi^r};$$

l'expression de $y_{x+\nu}$ trouvée dans l'*article précédent*, deviendra donc

$$\varphi . (\varpi + x^1) =$$

$$\varphi(\varpi) . \{b'' X^{(0)} + c'' . \frac{\partial X^{(0)}}{\partial x^1} + e'' . \frac{\partial^2 . X^{(0)}}{\partial x^{1\,2}} + \&c.\}$$

$$+ \nabla . \varphi(\varpi) . \{b'' X^{(1)} + c'' . \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x^1} + e'' . \frac{\partial^2 . X^{(1)}}{\partial x^{1\,2}} + \&c.\}$$

$$+ \nabla^2 . \varphi(\varpi) . \{b'' X^{(2)} + c'' . \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x^1} + e'' . \frac{\partial^2 . X^{(2)}}{\partial x^{1\,2}} + \&c.\}$$

$+ \&c.$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{\partial.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi}.\{c''X^{(0)} + e''.\frac{\partial X^{(0)}}{\partial x'} + \&c.\} \\
&+ \frac{\partial.\nabla.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi}.\{c''X^{(1)} + e''.\frac{\partial X^{(1)}}{\partial x'} + \&c.\} \\
&+ \frac{\partial.\nabla^2.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi}.\{c''X^{(2)} + e''.\frac{\partial X^{(2)}}{\partial x'} + \&c.\} \\
&+ \&c. \\
&+ \frac{\partial^2.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi^2}.\{e''X^{(0)} + \&c.\} \\
&+ \frac{\partial^2.\nabla.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi^2}.\{e''X^{(1)} + \&c.\} \\
&+ \&c. \\
&+ q''.\frac{\partial^{n-1}.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi^{n-1}}.X^{(0)} + q''.\frac{\partial^{n-1}.\nabla.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi^{n-1}}.X^{(1)} \\
&+ q''.\frac{\partial^{n-1}.\nabla^2.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi^{n-1}}.X^{(2)} + \&c.
\end{aligned}
\quad ;(C)
$$

Cette formule ſervira à interpoler les ſuites, dont la dernière raiſon des termes eſt celle d'une équation-linéaire aux différences infiniment petites dont les coëfficiens ſont conſtans.

Si l'on a

$$\nabla.\varphi(\varpi) = a''.\varphi(\varpi) + b''.\frac{\partial.\varphi(\varpi)}{\partial\varpi},$$

on aura $f = \frac{a''}{b''}$, & $\nabla.\varphi(\varpi) = b''.e^{-f\varpi}.\frac{\partial.[e^{f\varpi}.\varphi(\varpi)]}{\partial\varpi}$;
l'expreſſion de $X^{(s-1)}$ devient dans ce cas particulier,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(s-1).b''^s}.x^{s-1}.e^{-fx'};$$

on aura donc

$$\varphi.(\varpi + x') = e^{-f\varpi-fx'}.\{e^{f\varpi}.\varphi(\varpi) + \frac{x'}{b''}.\frac{\partial.[e^{f\varpi}.\varphi(\varpi)]}{\partial\varpi} + \frac{x'^2}{b''^2}.\frac{\partial^2.[e^{f\varpi}.\varphi(\varpi)]}{1.2.\partial\varpi^2} + \&c.\}$$

En supposant $b'' = 1$, & $f = 0$, par conséquent, $a'' = 0$; on aura la formule connue de Taylor.

La formule (C) se terminera toutes les fois que l'on aura $\nabla^s . \varphi(\varpi) = 0$; si par exemple, $\nabla . \varphi(\varpi) = 0$, on aura

$$\varphi . (\varpi + x') =$$

$$\varphi(\varpi) . \{b'' . X^{(0)} + c'' . \frac{\partial X^{(0)}}{\partial x'} + \&c. \ldots + q'' . \frac{\partial^{n-1} X^{(0)}}{\partial x'^{n-1}}\}$$

$$+ \frac{\partial . \varphi(\varpi)}{\partial \varpi} . \{c'' . X^{(0)} + e'' . \frac{\partial X^{(0)}}{\partial x'} + \&c. \ldots + q'' . \frac{\partial^{n-2} X^{(0)}}{\partial x'^{n-2}}\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ q'' X^{(0)} . \frac{\partial^{n-1} . \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^{n-1}},$$

ce sera l'intégrale de l'équation $0 = \nabla \varphi(\varpi + x')$, ou, ce qui revient au même, de celle-ci,

$$0 = a'' . \varphi(\varpi + x') + b'' . \frac{\partial . \varphi(\varpi + x')}{\partial x'}$$
$$+ c'' . \frac{\partial^2 . \varphi(\varpi + x')}{\partial x'^2} \ldots + q'' . \frac{\partial^n . \varphi(\varpi + x')}{\partial x'^n};$$

$\varphi(\varpi)$, $\frac{\partial . \varphi(\varpi)}{\partial \varpi}$, $\frac{\partial^2 . \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^2}$ ...... $\frac{\partial^{n-1} . (\varpi)}{\partial \varpi^{n-1}}$ étant les n constantes arbitraires que l'intégration introduit. On aura, par la même formule, les intégrales des équations $\nabla^2 . \varphi(\varpi + x') = 0$, $\nabla^3 . \varphi(\varpi + x') = 0$, &c.

Si l'on fait $\varphi(\varpi + x') = y'_{x'} + y''_{x'}$ & que l'on suppose $\nabla^s . y''_{x'} = V$, V étant une fonction donnée de x'; on trouvera facilement, par l'*article VI*, que si l'on change dans l'expression de $X^{(s-1)}$, x' en $\varpi + x' - r$, & dans V, x' en $r - \varpi$, & que l'on nomme R ce que devient la première de ces deux quantités, & S ce que devient la seconde, on aura $y''_{x'} = \int R S \partial r$, l'intégrale étant prise depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \varpi + x'$; si l'on suppose de plus, dans la formule (C), $\nabla^s . \varphi(\varpi + x') = 0$, elle

elle donnera

$$y^{1}_{x^{1}} + \int RS\partial r = \quad y_0 . \{b'' X^{(0)} + c'' . \frac{\partial X^{(0)}}{\partial x^1} + \&c.\}$$

$$+ \nabla . y_0 . \{b'' X^{(1)} + c'' . \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x^1} + \&c.\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \nabla^{(s-1)} . y_0 . \{b'' X^{(s-1)} + c'' . \frac{\partial X^{(s-1)}}{\partial x^1} + \&c.\}$$

$$+ (\frac{\partial y_0}{\partial \varpi}) . \{c'' . X^{(0)} + \&c.\}$$

$$+ \nabla . (\frac{\partial y_0}{\partial \varpi}) . \{c'' . X^{(1)} + \&c.\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \nabla^{(s-1)} . (\frac{\partial y_0}{\partial \varpi}) . \{c'' . X^{(s-1)} + \&c.\}$$

$$+ \&c.$$

$$+ q'' . (\frac{\partial^{n-1} . y_0}{\partial \varpi^{n-1}}) . X^{(0)} + q'' . \nabla . (\frac{\partial^{n-1} . y_0}{\partial \varpi^{n-1}}) . X^{(1)} \ldots$$

$$\ldots + q'' . \nabla^{s-1} . (\frac{\partial^{n-1} . y_0}{\partial \varpi^{n-1}}) . X^{(s-1)},$$

y_0, $(\frac{\partial y_0}{\partial \varpi})$, &c. $\nabla . y_0$, $\nabla . (\frac{\partial y}{\partial \varpi})$, &c. étant les sn conſtantes arbitraires de l'intégrale de l'équation

$$0 = \nabla^{s} . \varphi(\varpi + x^1), \text{ ou } \nabla^{s} . y^{1}_{x^1} + V = 0;$$

la formule précédente ſervira donc à intégrer toutes les équations linéaires aux différences infiniment petites, dont les coëfficiens ſont conſtans, lorſqu'elles ont un dernier terme qui eſt fonction de x^1 ſeul.

IX.

De la transformation des Suites.

ON voit par ce qui précède, avec quelle facilité toute la théorie des ſuites récurrentes découle de la conſidération

des fonctions génératrices ; cette considération peut servir encore à transformer d'une manière plus générale & plus simple que par les méthodes connues, une suite dans une autre dont les termes suivent une loi donnée.

Pour cela, considérons la suite

$$y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \ldots + y_x + y_{x+1} \ldots + y_\infty; \quad (\gamma)$$

& nommons, comme ci-dessus, u la somme de la série,

$$y_0 + y_1 . t + y_2 . t^2 + y_3 . t^3 \ldots + y_x . t^x + y_{x+1} . t^{x+1} \ldots + y_\infty . t^\infty;$$

il est visible que le coëfficient de t^x, dans le développement de la fraction $\frac{u}{1 - \frac{1}{t}}$, sera égal à la somme de la suite proposée (γ), depuis le terme y_x jusqu'à l'infini: or, si l'on multiplie le numérateur & le dénominateur de cette fraction par

$$a + b + c + e + \&c. - \left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} + \&c.\right),$$

le numérateur sera divisible par $1 - \frac{1}{t}$, & le quotient de la division sera

$$u . \left\{ \begin{array}{l} \qquad b + c + e + \&c. \\ + \frac{1}{t}(c + e + \&c.) + \frac{1}{t^2}(e + \&c.) \\ + \&c. \end{array} \right\};$$

donc si l'on fait pour abréger,

$$a + b + c + e + \&c. = K,$$

$$a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} + \&c. = z,$$

on aura

$$\frac{u}{1 - \frac{1}{t}} = u . \frac{[b + c + e + \&c. + \frac{1}{t} . (c + e + \&c.) + \frac{1}{t^2} . (e + \&c.) + \&c.]}{K - z};$$

en développant le second membre de cette équation, par rapport aux puissances de z, on aura

$$a.\left\{\begin{array}{l} b + c + e + \&c. \\ + \frac{1}{t}.(c + e + \&c.) \\ + \frac{1}{t^2}.(e + \&c.) \\ + \&c. \end{array}\right\}.\left\{\frac{1}{K} + \frac{z}{K^2} + \frac{z^2}{K^3} + \frac{z^3}{K^4} + \&c.\right\}$$

Maintenant, le coëfficient de t^r, dans un terme quelconque tel que $\frac{a z^s}{t^r}$, est, par l'*article II*, égal à $\nabla^s . y_{x+r}$; ce coëfficient sera donc, dans la quantité précédente, égal à

$$\begin{array}{l}(b + c + e + \&c.).\left\{\frac{y_x}{K} + \frac{\nabla . y_x}{K^2} + \frac{\nabla^2 . y_x}{K^3} + \frac{\nabla^3 . y_x}{K^4} + \&c.\right\} \\ + (c + e + \&c.).\left\{\frac{y_{x+1}}{K} + \frac{\nabla . y_{x+1}}{K^2} + \frac{\nabla^2 . y_{x+1}}{K^3} + \frac{\nabla^3 . y_{x+1}}{K^4} + \&c.\right\} \\ + (e + \&c.).\left\{\frac{y_{x+2}}{K} + \frac{\nabla . y_{x+2}}{K^2} + \frac{\nabla^2 . y_{x+2}}{K^3} + \frac{\nabla^3 . y_{x+2}}{K^4} + \&c.\right\} \\ + \&c.\end{array}$$

ce sera la valeur de la suite proposée (γ) depuis le terme y_x jusqu'à l'infini.

Si l'on fait $x = 0$, on aura une nouvelle suite égale à la proposée, mais dont les termes suivront une autre loi; & si les quantités $\nabla . y_x$, $\nabla^2 y_x$, &c. vont en décroissant, cette nouvelle suite sera convergente; elle se terminera toutes les fois que l'on aura $\nabla^s . y_x = 0$, ce qui aura lieu lorsque la suite proposée sera récurrente; on aura donc de cette manière la somme des séries récurrentes.

La transformation des suites se réduit à déterminer l'intégrale $\Sigma . y_x$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, & toutes les manières d'exprimer cette intégrale donneront autant de transformées différentes; ce qui consiste, par ce qui

précède, à déterminer le coëfficient de t^x dans le développement de $\frac{u}{1-\frac{1}{t}}$. Pour cela, soit généralement z une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$, & nommons $\nabla . y_x$ le coëfficient de t^x dans $u z$; les coëfficiens de t^x dans $u z^2$, $u z^3$, $u z^4$, &c. seront $\nabla^2 . y_x$, $\nabla^3 . y_x$, $\nabla^4 . y_x$, &c. Cela posé, on multipliera le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{u}{1-\frac{1}{t}}$ par $K - z$, & l'on prendra K de manière qu'il soit égal à z, lorsqu'on fait t égal 1 dans cette dernière quantité; $K - z$ sera ainsi divisible par $1 - \frac{1}{t}$. Soit $q + \frac{q^{(1)}}{t} + \frac{q^{(2)}}{t^2} + \frac{q^{(3)}}{t^3} +$ &c. le quotient de la division; on aura

$$\frac{u}{1-\frac{1}{t}} = \frac{uq}{K} . \left(1 + \frac{z}{K} + \frac{z^2}{K^2} + \frac{z^3}{K^3} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{uq^{(1)}}{K.t} . \left(1 + \frac{z}{K} + \frac{z^2}{K^2} + \frac{z^3}{K^3}\right)$$
$$+ \&c.$$

ce qui donne, en repassant des fonctions génératrices à leurs variables correspondantes,

$$\Sigma . y_x = \frac{q . y_x}{K} + \frac{q . \nabla . y_x}{K^2} + \frac{q . \nabla^2 . y_x}{K^3} + \&c.$$
$$+ \frac{q^{(1)} . y_{x+1}}{K} + \frac{q^{(1)} . \nabla . y_{x+1}}{K^2} + \frac{q^{(1)} . \nabla^2 . y_{x+1}}{K^3} + \&c.$$
$$+ \frac{q^{(2)} . y_{x+2}}{K} + \frac{q^{(2)} . \nabla . y_{x+2}}{K^2} + \frac{q^{(2)} . \nabla^2 . y_{x+2}}{K^3} + \&c.$$
$$+ \&c.$$

l'intégrale $\Sigma . y_x$ étant prise depuis y_x jusqu'à y_∞; & si l'on fait dans l'équation précédente $x = 0$, on aura une nouvelle suite égale à la proposée, & qui sera par conséquent sa transformée.

X.

THÉORÈMES sur le développement des fonctions & de leurs différences, en séries.

En appliquant à des cas particuliers les résultats que nous avons donnés dans l'*article II*, on aura une infinité de théorèmes sur le développement de fonctions en suites; nous allons présenter ici les plus remarquables.

On a généralement

$$u \cdot \left(\frac{1}{t^i} - 1\right)^n = u \cdot \left\{\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^i - 1\right\}^n;$$

or il est clair que le coëfficient de t^x dans le premier membre de cette équation, est la différence $n^{\text{ième}}$ de y_x, x variant de i; car ce coëfficient dans $u \cdot \left(\frac{1}{t^i} - 1\right)$, est $y_{x+i} - y_x$, ou $'\Delta \cdot y_x$, en désignant par la caractéristique $'\Delta$ les différences finies, lorsque x varie de la quantité i; d'où il est aisé de conclure que ce même coëfficient dans le développement de $u.\left(\frac{1}{t^i} - 1\right)^n$, est $'\Delta^n \cdot y_x$. D'ailleurs, si l'on développe $u \cdot \left\{\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^i - 1\right\}^n$, suivant les puissances de $\frac{1}{t} - 1$, les coëfficiens de t^x dans les développemens de $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)$, $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2$, $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^3$, &c. seront, par l'*article II*, $\Delta \cdot y_x$, $\Delta^2 \cdot y_x$, $\Delta^3 \cdot y_x$, &c. en sorte que ce coëfficient dans $u \cdot \left\{\left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^i - 1\right\}^n$, sera $\{(1 + \Delta \cdot y_x)^i - 1\}^n$, pourvu que dans le développement de cette quantité, on applique à la caractéristique Δ les exposans des puissances de $\Delta \cdot y_x$, & qu'ainsi au lieu d'une puissance quelconque $(\Delta \cdot y_x)^m$, on écrive $\Delta^m \cdot y_x$; on aura donc

$$'\Delta^n \cdot y_x = \{(1 + \Delta \cdot y_x)^i - 1\}^n; \quad (1)$$

Si l'on désigne par la caractéristique ${}^{i}\Sigma$ l'intégrale finie, lorsque x varie de i, ${}^{i}\Sigma^{n} . y_x$ sera visiblement égal par l'*article II*, au coëfficient de t^x dans le développement de la fonction $u . (\frac{1}{t^i} - 1)^{-n}$, en faisant abstraction ici des constantes arbitraires que l'intégration doit introduire; or on a

$$u . (\frac{1}{t^i} - 1)^{-n} = u . \{(1 + \frac{1}{t} - 1)^i - 1\}^{-n};$$

de plus, le coëfficient de t^x dans $u . (\frac{1}{t} - 1)^{-m}$, est, quel que soit m, $\Sigma^{m} . y_x$, en faisant abstraction des constantes arbitraires, & ce coëfficient dans $u . (\frac{1}{t} - 1)^{m}$, est $\Delta^{m} . y_x$; on aura donc, en faisant toujours abstraction des constantes arbitraires,

$${}^{i}\Sigma^{n} . y_x = \{(1 + \Delta . y_x)^i - 1\}^{-n}; \quad (2)$$

pourvu que dans le développement du second membre de cette équation, on applique à la caractéristique Δ les exposans des puissances de $\Delta . y_x$, & que l'on change les différences négatives en intégrales; & comme dans ce développement, l'intégrale $\Sigma^{n} . y_x$ se rencontre, & que cette intégrale peut être censée renfermer n constantes arbitraires, l'équation (2) est encore vraie en ayant égard aux constantes arbitraires.

On peut observer ici que cette équation se déduit de l'équation (1), en y faisant n négatif, & en y changeant les différences négatives en intégrales, c'est-à-dire en écrivant ${}^{i}\Sigma^{n} . y_x$ au lieu de ${}^{i}\Delta^{-n} . y_x$, & $\Sigma^{m} . y_x$ au lieu de $\Delta^{-m} . y_x$

Les équations (1) & (2) auroient également lieu si x, au lieu de varier de l'unité dans $\Delta . y_x$, y varioit d'une quantité quelconque ϖ; mais alors la variation de x dans ${}^{i}\Delta . y_x$, au lieu d'être i, seroit $i\varpi$. En effet, il est clair que si dans y_x on fait $x = \frac{x'}{\varpi}$, x' variera de ϖ lorsque x variera de

l'unité; $\Delta . y_x$ se changera ainsi dans $\Delta . y_{x'}$, la variation de x' étant ϖ, & $'\Delta . y_x$ se changera dans $'\Delta . y_{x'}$, la variation de x' étant $i\varpi$. Cela posé, si l'on suppose dans ces équations, que la variation de x est infiniment petite & égale à ∂x dans $\Delta . y_x$; cette différence se changera dans la différentielle infiniment petite ∂y_x; si de plus on fait i infini & $i\partial x = \alpha$, α étant une quantité finie, la variation de x dans $'\Delta . y_x$ sera α; on aura donc

$$'\Delta^n . y_x = \{(1 + \partial y_x)^i - 1\}^n$$

$$'\Sigma^n . y_x = \frac{1}{[(1 + \partial y_x)^i - 1]^n}.$$

or on a

$$\log.(1 + \partial y_x)^i = i . \log.(1 + \partial y_x) = i\partial y_x = i\partial x . \frac{\partial y_x}{\partial x} = \alpha . \frac{\partial y_x}{\partial x},$$

ce qui donne

$$(1 + \partial y_x)^i = e^{\alpha . \frac{\partial y_x}{\partial x}},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; donc

$$'\Delta^n . y_x = (e^{\alpha . \frac{\partial y_x}{\partial x}} - 1)^n; \quad (3)$$

$$'\Sigma^n . y_x = \frac{1}{(e^{\alpha . \frac{\partial y_x}{\partial x}} - 1)^n}; \quad (4)$$

en ayant soin d'appliquer à la caractéristique ∂ les exposans des puissances de ∂y_x, & de changer les différences négatives en intégrales.

Si dans les équations (1) & (2), on suppose encore i infiniment petit & égal à ∂x, on aura $'\Delta^n . y_x = \partial^n . y_x$, & $'\Sigma^n . y_x = \frac{1}{\partial x^n} \int^n . y \partial x^n$; on a d'ailleurs

$$(1 + \Delta y_x)^i = e^{\partial x \log. (1 + \Delta y_x)} = 1 + \partial x \log. (1 + \Delta y_x);$$

ces équations deviendront ainſi

$$\frac{\partial^n . y_x}{\partial x^n} = [\log.(1 + \Delta . y_x)]^n; \quad (5)$$

$$\int^n . y_x . \partial x^n = \frac{1}{[\log.(1 + \Delta . y_x)]^n}; \quad (6)$$

On peut remarquer ici une analogie ſingulière entre les puiſſances poſitives & les différences; l'équation

$$'\Delta . y_x = (1 + \Delta y_x)^i - 1$$

a encore lieu en élevant ſes deux membres à la puiſſance n, pourvu que l'on applique aux caractériſtiques Δ & $'\Delta$ les puiſſances de $\Delta . y_x$ & de $'\Delta . y_x$; car il eſt clair que dans ce cas on aura l'équation (1).

La même analogie ſubſiſte entre les puiſſances négatives & les intégrales, & l'équation précédente a lieu encore en élevant ſes deux membres à la puiſſance $-n$, pourvu que l'on change en intégrales du même ordre, les puiſſances négatives de $\Delta . y_x$ & de $'\Delta . y_x$; on formera ainſi l'équation (2).

Il en eſt de même de l'équation

$$'\Delta . y_x = e^{\alpha . \frac{\partial y_x}{\partial x}} - 1,$$

en élevant ſes deux membres aux puiſſances n & $-n$; elle ſera encore vraie, & ſe changera dans les équations (3) & (4), pourvu que l'on change les puiſſances poſitives de $'\Delta . y_x$ & de ∂y_x en différences du même ordre, & les puiſſances négatives en intégrales du même ordre. On voit au reſte, que ces analogies tiennent à ce que les produits de la fonction u, génératrice de y_x, par les puiſſances ſucceſſives de $\frac{1}{t} - 1$, ſont les fonctions génératrices des différences finies ſucceſſives de y_x, tandis que les quotiens de u, par ces mêmes puiſſances, ſont les fonctions génératrices des intégrales finies de y_x.

XI. Les

X I.

Les formules précédentes ne peuvent être d'usage que dans le cas où les différences finies & infiniment petites de y_x vont en décroissant ; mais il y a une infinité de cas dans lesquels cela n'a pas lieu, & où il est cependant utile d'avoir l'expression des différences & des intégrales, en séries convergentes ; le plus simple de tous, est celui dans lequel les termes d'une série dont les différences sont convergentes, sont multipliés par les termes d'une progression géométrique : nous allons nous en occuper d'abord.

Le terme général des suites ainsi formées, peut être représenté par $h^x . y_x$, y_x étant le terme général d'une suite dont les différences sont convergentes. Cela posé, nommons u la somme de la suite infinie

$$y_0 + y_1 . h . t + y_2 . h^2 . t^2 + y_3 . h^3 . t^3 + \&c. \ldots + y_\infty . h^\infty . t^\infty ;$$

on a

$$u . (\frac{1}{t^i} - 1)^n = u . \{h^i . (1 + \frac{1}{h t} - 1)^i - 1\}^n .$$

Le coëfficient de t^x, dans le premier membre de cette équation, est la différence finie $n^{\text{ième}}$ de $h^x . y_x$, x variant de la quantité i ; d'ailleurs, si l'on développe le second membre, par rapport aux puissances de $\frac{1}{h t} - 1$, le coëfficient de t^x, dans $u . (\frac{1}{h t} - 1)^r$, sera, quel que soit r, $h^x . \Delta^r . y_x$; l'équation précédente donnera donc, en repassant par l'*article II*, des fonctions génératrices à leurs variables correspondantes,

$$^i\Delta^n . h^x . y_x = h^x . \{h^i . (1 + \Delta . y_x)^i - 1\}^n ; \quad (7)$$

pourvu que dans le développement du second membre de cette équation, on applique à la caractéristique Δ, les exposans des puissances de $\Delta . y_x$, & qu'ainsi, au lieu de $(\Delta y_x)^0$, on écrive $\Delta^0 . y_x$, c'est-à-dire y_x.

En changeant n en $-n$, on aura, comme dans l'*article précédent*,

$$ {}^i\Sigma^n . h^x . y_x = \frac{h^x}{[h^i . (1 + \Delta y_x)^i - 1]^n} + a x^{n-1} + b x^{n-2} + \&c. \ldots + f; \quad (8) $$

$a, b, \ldots f$, étant les n constantes arbitraires de l'intégrale du premier membre, dont l'addition devient inutile dans le cas où $h = 1$, parce qu'alors le second membre renferme l'intégrale $\Sigma^n . y_x$, qu'il ne renferme plus lorsque h diffère de l'unité.

Si l'on suppose y_x égal à une fonction y' de x', x' étant égal à $\frac{x}{r}$, & r étant supposé infini; on aura $\Delta y_x = \partial y'$, la différence $\partial x'$ étant égale à $\frac{1}{r}$; de plus, si l'on fait $h^r = p$, on aura $h^x = p^{x'}$, & la fonction $h^x . y_x$ se changera dans $p^{x'} . y'$; or, si l'on suppose i infiniment grand, & $\frac{i}{r} = \alpha$, il est clair que x variant de i, x' variera de α; en sorte que ${}^\alpha\Delta^n . p^{x'} . y'$ & ${}^\alpha\Sigma^n . p^{x'} . y'$ seront la différence & l'intégrale finie $n^{ième}$ de $p^{x'} . y'$, x' variant de la quantité α; on a d'ailleurs $h^i = p^\alpha$; les équations (7) & (8) deviendront conséquemment

$$ {}^\alpha\Delta^n . p^{x'} . y' = p^{x'} . \{p^\alpha . (1 + \partial y')^i - 1\}^n, $$

$$ {}^\alpha\Sigma^n . p^{x'} . y' = \frac{p^{x'}}{[p^\alpha . (1 + \partial y')^i - 1]^n} + a x'^{n-1} + b x'^{n-2} + \&c. $$

or on a

$$ (1 + \partial y')^i = e^{\alpha . \frac{\partial y'}{\partial x'}}; \text{ donc} $$

$$ {}^\alpha\Delta^n . p^{x'} . y' = p^{x'} . \left(p^\alpha . e^{\alpha . \frac{\partial y'}{\partial x'}} - 1\right)^n; \quad (9) $$

$$ {}^\alpha\Sigma^n . p^{x'} . y' = \frac{p^{x'}}{\left\{p^\alpha . e^{\alpha . \frac{\partial y'}{\partial x'}} - 1\right\}^n} + a x'^{n-1} + b x'^{n-2} \ldots + f; \quad (10) $$

en ayant soin, dans le développement de ces équations, d'écrire y^{ι}, au lieu de $(\frac{\partial y^{\iota}}{\partial x^{\iota}})^{0}$, & $\frac{\partial^{\mu}.y^{\iota}}{\partial x^{\iota\mu}}$, au lieu de $(\frac{\partial y^{\iota}}{\partial x^{\iota}})^{\mu}$, μ étant quelconque.

Si dans les formules (7) & (8), on suppose i infiniment petit & égal à ∂x, ${}^{\iota}\Delta^{n}.h^{x}.y_{x}$ se changera dans $\partial^{n}.h^{x}.y_{x}$, & ${}^{\iota}\Sigma^{n}.h^{x}.y_{x}$ dans $\int^{n}.h^{x}.y_{x}$; on a d'ailleurs

$$h^{i}.(1+\Delta.y_{x})^{i} = 1+\partial x.\log.[h(1+\Delta.y_{x})];$$

partant on aura

$$\frac{\partial^{n}.h^{x}.y_{x}}{\partial x^{n}} = h^{x}.[\log.h.(1+\Delta.y_{x})]^{n}; \quad (11)$$

$$\int^{n}.h^{x}.y_{x}.\partial x^{n} = \frac{h^{x}}{[\log.h.(1+\Delta.y_{x})]^{n}} + ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots + f; \quad (12)$$

Je dois observer ici que les équations (1), (2), (3), (4), (5) & (6) de l'*article précédent*, ont été trouvées par M. de la Grange, dans les Mémoires de Berlin pour l'*année 1771*, au moyen de l'analogie qui existe entre les puissances positives & les différences, & entre les puissances négatives & les intégrales; mais cet illustre Auteur se contente de la supposer sans en donner la démonstration qu'il regarde comme très-difficile: quant aux équations (7), (8), (9), (10), (11) & 12, elles sont nouvelles, à l'exception de l'équation (10), dont M. Euler a donné le cas particulier où $n = 1$, dans ses Institutions de Calcul différentiel.

XII.

On auroit une infinité de théorèmes analogues à ceux des *articles précédens*, si au lieu de considérer les différences & les intégrales de y_{x}, on considéroit toute autre fonction de cette variable; il sera facile de les déduire de la solution générale du Problème suivant.

$\Gamma.(y_{x})$ représentant une fonction quelconque linéaire de y_{x},

y_{x+1}, y_{x+2}, &c. & $\nabla . y_x$ une autre fonction linéaire de ces mêmes variables ; on propose de trouver l'expression de $\Gamma . y_x$, dans une suite ordonnée suivant les quantités $\nabla . y_x$, $\nabla^2 . y_x$, $\nabla^3 . y_x$, &c.

Pour cela, soit u la fonction génératrice de y_x, us celle de $\Gamma . y_x$, & uz celle de $\nabla . y_x$, s & z étant fonctions de $\frac{1}{t}$; on commencera par tirer de l'équation qui exprime la relation de $\frac{1}{t}$ & de z, la valeur de $\frac{1}{t}$ en z, & en la substituant dans s, on aura la valeur de s en z; mais comme il peut arriver que l'on ait plusieurs valeurs de $\frac{1}{t}$ en z, on aura autant d'expressions différentes de s. Pour en avoir une qui puisse appartenir indifféremment à toutes ces valeurs de s, nous supposerons que le nombre des valeurs de $\frac{1}{t}$ en z soit n, & nous donnerons à l'expression de s la forme suivante,

$$s = Z + \frac{1}{t} . Z^{(1)} + \frac{1}{t^2} . Z^{(2)} \ldots + \frac{1}{t^{n-1}} . Z^{(n-1)},$$

Z, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, &c. étant des fonctions de Z, qu'il s'agit de déterminer; or si l'on substitue successivement dans cette équation, au lieu de $\frac{1}{t}$, ses n valeurs en z, on formera n équations au moyen desquelles on déterminera les n quantités Z, $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, &c. il ne s'agira plus ensuite que de réduire ces quantités en séries ordonnées par rapport aux puissances de z, & de les substituer dans l'équation précédente. Cela posé, si l'on multiplie cette équation par u, le coëfficient de t^x dans us, sera $\Gamma . y_x$; ce même coëfficient dans un terme quelconque, tel que $\frac{uz^s}{t^r}$, sera par l'*article II*, égal à $\nabla^s . y_{x+r}$; l'équation précédente donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes, une expression de

$\Gamma . y_x$ par une suite ordonnée suivant les quantités $\nabla . y_x$, $\nabla^2 . y_x$, $\nabla^3 . y_x$, &c. $\nabla . y_{x+1}$, $\nabla^2 . y_{x+1}$, &c. . . . . $\nabla . y_{x+n-1}$, &c.

On peut supposer encore pour plus de généralité, que les quantités $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, $Z^{(3)}$, &c. au lieu d'être multipliées par $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t^2}$, $\frac{1}{t^3}$, &c. sont multipliées par des fonctions quelconques de $\frac{1}{t}$, & l'on aura par ce moyen, une infinité d'expressions différentes de $\Gamma . y_x$.

Si l'on suppose

$$s = \frac{1}{t^i},$$

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots\ldots + \frac{q}{t^n},$$

$\Gamma . y_x$ se changera dans y_{x+i}; on aura donc, par ce procédé, la valeur de y_{x+i} en fonction de $\nabla . y_x$, $\nabla^2 . y_x$, &c. mais la méthode que nous avons donnée pour cet objet dans l'*article V*, est d'un usage beaucoup plus facile.

XIII.

Des Suites à deux variables.

Considérons une fonction $y_{x,x'}$ de deux variables x & x', & nommons u la suite infinie,

$$\begin{aligned} & y_{0,0} + y_{1,0}.t + y_{2,0}.t^2 + y_{3,0}.t^3 \ldots\ldots + y_{x,0}.t^x + y_{x+1,0}.t^{x+1} \ldots\ldots \\ & \quad \ldots + y_{\infty,0}.t^{\infty} \\ & + y_{0,1}.t' + y_{1,1}.t'.t + y_{2,1}.t'.t^2 \ldots + y_{x-1,1}.t'.t^{x-1} + y_{x,1}.t'.t^x \ldots \\ & \quad \ldots + y_{\infty,1}.t'.t^{\infty} \\ & + y_{0,2}.t'^2 + y_{1,2}.t'^2.t \ldots + y_{x-2,2}.t'^2.t^{x-2} \ldots\ldots \\ & \quad \ldots + y_{\infty,2}.t'^2.t^{\infty} \\ & + \&c. \end{aligned}$$

le coëfficient de $t^x \cdot t'^{x'}$, ſera $y_{x,x'}$; ainſi u ſera la fonction génératrice de $y_{x,x'}$, & ſi l'on déſigne par la caractériſtique Δ, les différences finies lorſque x ſeul varie, & par la caractériſtique Δ', ces différences lorſque x' ſeul varie, la fonction génératrice de $\Delta . y_{x,x'}$ ſera, par l'*article II*, $u . (\frac{1}{t} - 1)$, & celle de $\Delta' . y_{x,x'}$ ſera $u . (\frac{1}{t'} - 1)$; partant la fonction génératrice de $\Delta . \Delta' . y_{x,x'}$ ſera $u . (\frac{1}{t} - 1) . (\frac{1}{t'} - 1)$; d'où il eſt facile de conclure que celle de $\Delta^i . \Delta'^{i'} . y_{x,x'}$ ſera $u . (\frac{1}{t} - 1)^i . (\frac{1}{t'} - 1)^{i'}$.

En général, ſi l'on déſigne par $\nabla . y_{x,x'}$ la quantité

$$\begin{aligned} A . y_{x,x'} &+ B . y_{x+1,x'} + C . y_{x+2,x'} + \&c. \\ &+ B' . y_{x,x'+1} + C' . y_{x+1,x'+1} + \&c. \\ &+ C'' . y_{x,x'+2} + \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

Si l'on déſigne pareillement par $\nabla^2 . y_{x,x'}$, une fonction dans laquelle $\nabla . y_{x,x'}$ entre de la même manière que $y_{x,x'}$ entre dans $\nabla . y_{x,x'}$; ſi l'on déſigne encore par $\nabla^3 . y_{x,x'}$, une fonction dans laquelle $\nabla^2 . y_{x,x'}$ entre de la même manière que $y_{x,x'}$ dans $\nabla . y_{x,x'}$, & ainſi de ſuite; la fonction génératrice de $\nabla^n . y_{x,x'}$ ſera

$$u . \left\{ \begin{aligned} A &+ \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \&c. \\ &+ \frac{B'}{t'} + \frac{C'}{t . t'} + \&c. \\ &+ \frac{C''}{t'^2} + \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned} \right\}^n$$

Partant

$$u . t^r . t'^{r'} . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^i . \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'} . \left\{\begin{array}{l} A + \frac{B}{t} + \&c. \\ + \frac{B'}{t'} + \&c. \end{array}\right\}^n$$

eſt la fonction génératrice de $\Delta^i . \Delta'^{i'} . \nabla^n . y_{x-r, x'-r'}$.

s étant ſuppoſée une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$ & de $\frac{1}{t'}$, ſi l'on développe s^i ſuivant les puiſſances de ces variables, & que l'on déſigne par $\frac{K}{t^m . t'^{m'}}$ un terme quelconque de ce développement; le coëfficient de $t^x . t'^{x'}$ dans $\frac{K . u}{t^m . t'^{m'}}$ ſera $K . y_{x+m, x'+m'}$; on aura donc le coëfficient de $t^x . t'^{x'}$ dans us^i, ou ce qui revient au même, on aura $\nabla^i . y_{x, x'}$, 1.° en ſubſtituant dans s, y_x au lieu de $\frac{1}{t}$, & $y_{x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'}$; 2.° en développant ce que devient alors us^i ſuivant les puiſſances de y_x & de $y_{x'}$, & en écrivant au lieu d'un terme quelconque, tel $K . (y_x)^m . (y_{x'})^{m'}$, $K . y_{x+m, x'+m'}$, & par conſéquent en ſubſtituant $K . y_{x, x'}$ au lieu du terme tout conſtant K ou $K . (y_x)^0 . (y_{x'})^0$.

Si au lieu de développer s^i ſuivant les puiſſances de $\frac{1}{t}$ & de $\frac{1}{t'}$, on le développe ſuivant les puiſſances de $\frac{1}{t} - 1$ & de $\frac{1}{t'} - 1$, & que l'on déſigne par $K . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^m . \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{m'}$, un terme quelconque de ce développement; le coëfficient de $t^x . t'^{x'}$, dans $K . u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^m . \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{m'}$, ſera $K . \Delta^m . \Delta'^{m'} . y_{x, x'}$; on aura donc $\nabla^i . y_{x, x'}$, 1.° en ſubſtituant dans s, $\Delta . y_{x, x'}$ au lieu de

$\frac{1}{t} - 1$, & $\Delta' . y_{x,x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'} - 1$; 2.° en développant ce que devient alors s^i suivant les puissances de $\Delta . y_{x,x'}$ & de $\Delta' . y_{x,x'}$, & en appliquant aux caractéristiques Δ & Δ' les exposans de ces puissances, c'est-à-dire en écrivant au lieu d'un terme quelconque tel que $K . (\Delta . y_{x,x'})^m . (\Delta' . y_{x,x'})^{m'}$, celui-ci, $K . \Delta^m . \Delta'^{m'} . y_{x,x'}$.

Soit Σ la caractéristique des intégrales finies relatives à x, & Σ' celle des intégrales relatives à x'; soit de plus z la fonction génératrice de $\Sigma^i . \Sigma'^{i'} . y_{x,x'}$; on aura $z . (\frac{1}{t} - 1)^i . (\frac{1}{t'} - 1)^{i'}$ pour la fonction génératrice de $y_{x,x'}$; cette fonction génératrice doit, en n'ayant égard qu'aux puissances positives ou nulles de t & de t', se réduire à u; on aura ainsi

$$z . (\frac{1}{t} - 1)^i . (\frac{1}{t'} - 1)^{i'} = u + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t^3} \ldots + \frac{q}{t^i} + \frac{a'}{t'} + \frac{b'}{t'^2} + \frac{c'}{t'^3} \ldots + \frac{q'}{t'^{i'}},$$

$a, b, c, \ldots q$, étant des fonctions arbitraires de t', & $a', b', c' \ldots q'$, étant des fonctions arbitraires de t; partant

$$z = \frac{u t^i . t'^{i'} + a . t^{i-1} . t'^{i'} + b . t^{i-2} . t'^{i'} \ldots + q . t'^{i'} + a' . t^i . t'^{i'-1} + b' . t^i . t'^{i'-2} \ldots + q' . t^i}{(1 - t)^i . (1 - t')^{i'}}.$$

XIV.

De l'interpolation des Suites à deux variables, & de l'intégration des équations linéaires aux différences partielles finies & infiniment petites.

$y_{x+i, x'+i'}$ est évidemment égal au coëfficient de $t^x . t'^{x'}$ dans le développement de $\frac{u}{t^i . t'^{i'}}$; or on a

$$\frac{u}{t^{i}.t'^{i'}} = u.\left(1+\frac{1-t}{t}\right)^{i}.\left(1+\frac{1-t'}{t'}\right)^{i'} =$$

$$u.\left\{\begin{array}{l}
1 + i.\frac{1-t}{t} + \frac{i.(i-1)}{1.2}.\left(\frac{1-t}{t}\right)^{2} \\
+ \frac{i.(i-1).(i-2)}{1.2.3}.\left(\frac{1-t}{t}\right)^{3} + \&c. \\
+ i'.\left(\frac{1-t'}{t'}\right) + i'.i.\left(\frac{1-t'}{t'}\right).\left(\frac{1-t}{t}\right) \\
+ i'.\frac{i.(i-1)}{1.2}.\left(\frac{1-t'}{t'}\right).\left(\frac{1-t}{t}\right)^{2} + \&c. \\
+ \frac{i'.(i'-1)}{1.2}.\left(\frac{1-t'}{t'}\right)^{2} \\
+ \frac{i'.(i'-1)}{1.2}.i.\left(\frac{1-t'}{t'}\right)^{2}.\frac{1-t}{t} + \&c. \\
+ \&c.
\end{array}\right.$$

le coëfficient de $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{r}.\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}$ étant égal à $\frac{i.(i-1).(i-2)\ldots(i-r+1)}{1.2.3\ldots r}.\frac{i'.(i'-1).(i'-2)\ldots(i'-r'+1)}{1.2.3\ldots r'}$.

Maintenant, le coëfficient de $t^{x}.t'^{x'}$, dans le développement de $u.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{r}.\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{r'}$, est $\Delta^{r}.\Delta'^{r'}.y_{x,x'}$; on aura donc en passant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$\begin{aligned}
y_{x+i,x'+i'} = y_{x,x'} &+ i.\Delta.y_{x,x'} + \frac{i.(i-1)}{1.2}.\Delta^{2}.y_{x,x'} + \&c. \\
&+ i'.\Delta'.y_{x,x'} + i'.i.\Delta'.\Delta.y_{x,x'} + \&c. \\
&+ \frac{i'.(i'-1)}{1.2}.\Delta'^{2}.y_{x,x'} + \&c. \\
&+ \&c.
\end{aligned}$$

équation qui peut être mise sous cette forme très-simple,

$$y_{x+i,x'+i'} = (1+\Delta.y_{x,x'})^{i}.(1+\Delta'.y_{x,x'})^{i'}.$$

pourvu que dans le développement du second membre de cette dernière équation, on applique aux caractéristiques Δ & Δ' les exposans des puissances de $\Delta . y_{x,x'}$ & de $\Delta' . y_{x,x'}$, & par conséquent qu'au lieu du terme tout constant, ou multiplié par $(\Delta . y_{x,x'})^0 . (\Delta' . y_{x,x'})^0$, on écrive $y_{x,x'}$.

X V.

Supposons maintenant qu'au lieu d'interpoler suivant les différences de la fonction $y_{x,x'}$, on veuille interpoler suivant d'autres loix; pour cela, soit

$$z = A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \frac{D}{t^3} \ldots\ldots + \frac{P}{t^{n-1}} + \frac{q}{t^n}$$
$$+ \frac{B'}{t'} + \frac{C'}{t'.t} + \frac{D'}{t'.t^2} + \&c.$$
$$+ \frac{C''}{t'^2} + \frac{D''}{t'^2.t} + \&c,$$
$$+ \&c.$$
$$[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$$
$$+ \frac{1}{t'^{n'}}.$$

Si l'on fait

$$A + \frac{B'}{t'} + \frac{C''}{t'^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{t'^{n'}} = a;$$
$$B + \frac{C'}{t'} + \frac{D''}{t'^2} + \&c. = b,$$
$$C + \frac{D'}{t'} + \&c. = c,$$
$$\&c.$$

on aura

$$z = a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \&c\ldots\ldots + \frac{q}{t^n},$$

Il est facile d'en conclure, comme dans l'*article V*, les valeurs

successives de $\frac{1}{t^{n+1}}$, $\frac{1}{t^{n+2}}$, $\frac{1}{t^{n+3}}$, &c. en fonctions de a, b, c, &c. & z; & il est visible que dans aucun terme de l'expression de $\frac{1}{t^i}$, la somme des puissances de $\frac{1}{t}$ & de $\frac{1}{t'}$, ne surpassera pas i, lorsque i sera un nombre entier positif, n' étant supposé égal ou moindre que n.

Considérons maintenant la formule (μ) de l'*article V*, & supposons qu'en développant suivant les puissances de $\frac{1}{t'}$, la quantité

$$\begin{aligned} & b.Z^{(0)}_{i-n+1} + bz.Z^{(1)}_{i-2n+1} + \&c. \\ + & c\,Z^{(0)}_{i-n+2} + cz.Z^{(1)}_{i-2n+2} + \&c. \\ + & \&c. \end{aligned}$$

on ait

$$\begin{aligned} & M + Nz + \&c. + \frac{1}{t'}.(M^{(1)} + N^{(1)}z + \&c.) \\ & + \frac{1}{t'^2}.(M^{(2)} + N^{(2)}.z + \&c.) \ldots + \frac{1}{t'^i}.M^{(i)}; \end{aligned}$$

les puissances ultérieures de $\frac{1}{t'}$ se détruisant réciproquement, puisque l'expression de $\frac{1}{t^i}$ ne doit point les renfermer. Supposons pareillement qu'en développant la quantité

$$\begin{aligned} & c.Z^{(0)}_{i-n+1} + cz.Z^{(1)}_{i-2n+1} + \&c. \\ + & e\,Z^{(0)}_{i-n+2} + ez.Z^{(1)}_{i-2n+2} + \&c. \end{aligned}$$

on ait

$$\begin{aligned} & M_1 + N_1.z + \&c. + \frac{1}{t'}.(M_1^{(1)} + N_1^{(1)}.z + \&c.) \\ & + \frac{1}{t'^2}.(M_1^{(2)} + N_1^{(2)}.z + \&c.) \ldots + \frac{1}{t'^{i-1}}.M_1^{(i-1)}; \end{aligned}$$

qu'en développant la quantité

$$e Z^{(0)}_{i-n+1} + \&c.$$
$$+ \&c.$$

on ait

$$M_2 + N_2 . z + \&c. \frac{1}{t'} . (M_2^{(1)} + N_2^{(1)} . z + \&c.) \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{t'^{i-2}} . M_2^{(i-2)},$$

& ainſi de ſuite ; on aura

$$\begin{aligned}\frac{T}{t} = M + Nz + \&c. &+ \frac{1}{t'} . (M^{(1)} + N^{(1)} . z + \&c.) \\ &+ \frac{1}{t'^2} . (M^{(2)} + N^{(2)} . z + \&c.) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{t'^i} . M^{(i)}\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{t} . \left\{\begin{aligned} &M_1 + N_1 . z + \&c. \\ &+ \frac{1}{t'} . (M_1^{(1)} + N_1^{(1)} . z + \&c.) \\ &+ \frac{1}{t'^2} . (M_1^{(2)} + N_1^{(2)} . z + \&c.) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{t'^{i-1}} . M_1^{(i-1)} \end{aligned}\right\}$$

$$+ \frac{1}{t^2} . \left\{\begin{aligned} &M_2 + N_2 . z + \&c. \\ &+ \frac{1}{t'} . (M_2^{(1)} + N_2^{(1)} . z + \&c.) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{t'^{i-2}} . M_2^{(i-2)} \end{aligned}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{t^{n-1}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} M_{n-1} + N_{n-1} \cdot z + \&c. \\ + \frac{1}{t^1} \cdot (M^{(1)}_{n-1} + N^{(1)}_{n-1} \cdot z + \&c.) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \frac{1}{t^{i-n+1}} \cdot M^{(i-n+1)}_{n-1} \end{array} \right\}$$

Cela posé, si l'on nomme $\nabla \cdot y_{x,x^1}$ la quantité

$$\begin{array}{l} A \cdot y_{x,x^1} + B \cdot y_{x+1,x^1} + C \cdot y_{x+2,x^1} + \&c. \\ \qquad + B^1 \cdot y_{x,x^1+1} + C^1 \cdot y_{x+1,x^1+1} + \&c. \\ \qquad\qquad + C^{11} \cdot y_{x,x^1+2} + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad + \&c. \end{array}$$

le coëfficient de $t^x \cdot t^{1^{x^1}}$ dans le développement de la quantité $\frac{u \cdot z^\mu}{t^r \cdot t^{1^{r^1}}}$, sera par l'*article XIII*, $\nabla^\mu \cdot y_{x+r,\,x^1+r^1}$; l'équation précédente donnera conséquemment, en la multipliant par u, & en passant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$y_{x+1,\,x^1} = \left\{ \begin{array}{l} M \cdot y_{x,x^1} + N \cdot \nabla \cdot y_{x,x^1} + \&c. \\ + M^{(1)} \cdot y_{x,x^1+1} + N^{(1)} \cdot \nabla \cdot y_{x,x^1+1} + \&c. \\ + M^{(2)} \cdot y_{x,x^1+2} + N^{(2)} \cdot \nabla \cdot y_{x,x^1+2} + \&c. \\ + \&c. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + M^{(i)} \cdot y_{x,x^1+i} \end{array} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} M_1 \cdot y_{x+1,x^1} + N_1 \cdot \nabla \cdot y_{x+1,x^1} + \&c. \\ + M_1^{(1)} \cdot y_{x+1,x^1+1} + N_1^{(1)} \cdot \nabla \cdot y_{x+1,x^1+1} + \&c. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + M_1^{(i-1)} \cdot y_{x+1,x^1+i-1} \end{array} \right\}$$

$$+ \&c.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} M_{n-1}\cdot y_{x+n-1,x'}+N_{n-1}\cdot\nabla\cdot y_{x+n-1,x'}+\&c. \\ +M^{(1)}_{n-1}\cdot y_{x+n-1,x'+1}+N^{(1)}_{n-1}\cdot\nabla\cdot y_{x+n-1,x'+1}+\&c. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +M^{(i-n+1)}_{n-1}\cdot y_{x+n-1,x'+i-n+1} \end{array}\right\}$$

XVI.

Si l'on suppose $\nabla\cdot y_{i,x'}=0$, on aura, en faisant $x=0$ dans l'équation précédente,

$$\begin{array}{rl} y_{i,x'}= & M\cdot y_{0,x'}+M^{(1)}\cdot y_{0,x'+1}+M^{(2)}\cdot y_{0,x'+2}\ldots\ldots \\ & \qquad\ldots\ldots+M^{(i)}\cdot y_{0,x'+i} \\ & +M_1\cdot y_{1,x'}+M_1^{(1)}\cdot y_{1,x'+1}+M_1^{(2)}\cdot y_{1,x'+2}\ldots\ldots \\ & \qquad\ldots\ldots+M_1^{(i-1)}\cdot y_{1,x'+i-1} \\ & +\&c. \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +M_{n-1}\cdot y_{n-1,x'}+M^{(1)}_{n-1}\cdot y_{n-1,x'+1}\ldots\ldots \\ & \qquad\ldots\ldots+M^{(i-n+1)}_{n-1}\cdot y_{n-1,x'+i-n+1} \end{array}$$

$M^{(r)}$, $M_1^{(r)}$, $M_2^{(r)}$, &c. étant des fonctions de i & de r, l'expression précédente de $y_{i,x'}$ peut être mise sous cette forme très-simple,

$$y_{i,x'}=\Sigma\cdot\left\{\begin{array}{l} M^{(r)}\cdot y_{0,x'+r}+M_1^{(r-1)}\cdot y_{1,x'+r-1}+M_2^{(r-2)} \\ \cdot y_{1,x'+r-2}\ldots\ldots+M^{(r-n+1)}_{n-1}\cdot y_{n-1,x'+r-n+1} \end{array}\right\};\ (\lambda)$$

l'intégrale étant prise par rapport à r, depuis $r=0$ jusqu'à $r=i+1$, par rapport au premier terme; depuis $r=1$ jusqu'à $r=i+1$, par rapport au second terme, & ainsi de suite. Cette expression de $y_{i,x'}$ sera l'intégrale complète de l'équation $\nabla\cdot y_{x,x'}=0$, ou, ce qui revient au même, de celle-ci,

$$0 = A.y_{i,x'} + B.y_{i+1,x'} + C.y_{i+2,x'} \ldots + P.y_{i+n-1,x'} + q.y_{i+n,x'}$$
$$+ B'.y_{i,x'+1} + C'.y_{i+1,x'+1} + \&c.$$
$$+ C''.y_{i,x'+2} + \&c.$$
$$+ \&c.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ y_{i,x'\pm n}.$$

Il est visible que dans cette intégrale, les quantités $y_{0,x'}$, $y_{1,x'}$, $y_{2,x'}$, ... $y_{n-1,x'}$ sont les n fonctions arbitraires qu'introduit l'intégration de l'équation $\nabla y_{i,x'} = 0$; pour les déterminer, il faut connoître immédiatement, ou du moins pouvoir conclure des conditions du Problème, les n premiers rangs verticaux de la Table suivante,

$$\begin{array}{l} y_{0,0},\ y_{1,0},\ y_{2,0},\ y_{3,0} \ldots\ldots\ldots\ldots y_{x,0},\ y_{x+1,0} \ldots\ldots\ldots y_{\infty,0} \\ y_{0,1},\ y_{1,1},\ y_{2,1},\ y_{3,1} \ldots\ldots\ldots\ldots y_{x,1},\ y_{x+1,1} \ldots\ldots\ldots y_{\infty,1} \\ y_{0,2},\ y_{1,2},\ y_{2,2},\ y_{3,2} \ldots\ldots\ldots\ldots y_{x,2},\ y_{x+1,2} \ldots\ldots\ldots y_{\infty,2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{0,x'},\ y_{1,x'},\ y_{2,x'},\ y_{3,x'} \ldots\ldots y_{x,x'},\ y_{x+1,x'} \ldots\ldots y_{\infty,x'} \end{array} ; (Q)$$

&c.

REMARQUE.

DANS un grand nombre de Problèmes, & principalement dans ceux qui concernent l'analyse des hasards, les n premiers rangs verticaux sont des suites récurrentes dont la loi est connue; dans ce cas, $y_{0,x'}$, $y_{1,x'}$, &c. sont données par des termes de la forme $A.p^{x'}$; supposons conséquemment que l'expression de $y_{0,x'}$ renferme le terme $A.p^{x'}$, la partie correspondante de $\Sigma.M^{(r)}.y_{0,x'+r}$ sera

$$A.p^{x'}.\{M^{0} + M^{(1)}.p + M^{(2)}.p^{2} + M^{(3)}.p^{3} \ldots + M^{(t)}.p^{t}\};$$

mais $M^{(0)} + \frac{M^{(1)}}{t'} + \frac{M^{(2)}}{t'^{2}} \ldots + \frac{M^{(t)}}{t'^{t}}$ est le développement de $b.Z^{(0)}_{i-n+1} + c.Z^{(0)}_{i-n+2} + \&c.$

suivant les puissances de $\frac{1}{t'}$; en changeant donc dans cette dernière quantité $\frac{1}{t'}$ en p, & nommant P ce qu'elle devient alors, on aura $A.P.p^{x'}$ pour la partie de $\Sigma.M^{(r)}.y_{0,x'+r}$, qui répond au terme $A.p^{x'}$. Il suit de-là, que si la valeur de $y_{0,x'}$ est égale à $A.p^{x'} + A'.p'^{x'} + A''.p''^{x'} +$ &c. & que l'on nomme P', P'', &c. ce que devient P, en y changeant successivement p en p', p'', &c. on aura

$$\Sigma.M^{(r)}.y_{0,x'+r} = A.P.p^{x'} + A'.P'.p'^{x'} + A''.P''.p''^{x'} + \text{\&c.}$$

On trouvera pareillement que si la valeur de $y_{1,x'}$ est exprimée par $B.q^{x'} + B'.q'^{x'} + B''.q''^{x'} +$ &c. & que l'on nomme Q, Q', Q'', &c. ce que devient la quantité $cZ^{(0)}_{i-n+1} + eZ^{(0)}_{i-n+2} +$ &c. lorsqu'on y change successivement $\frac{1}{t'}$ en q, q', q'', &c. on aura

$$\Sigma.M_1^{(r-1)}.y_{1,x'+r-1} = BQ.q^{x'} + B'Q'.q'^{x'} + B''Q''.q''^{x'} + \text{\&c.}$$

& ainsi de suite; on aura ainsi l'expression de $y_{i,x'}$ la plus simple à laquelle on puisse parvenir.

Si l'on a $\nabla^n.y_{x,x'} = 0$, on aura, en faisant $x = 0$ dans l'expression générale de $y_{x+i,x'}$ de l'*article précédent*,

$$\begin{aligned} y_{i,x'} = \; & M.y_{0,x'} + M^{(1)}.y_{0,x'+1} + \text{\&c.} \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots + M^{(i)}.y_{0,x'+i} \\ & + N.\nabla.y_{0,x'} + N^{(1)}.\nabla.y_{0,x'+1} + \text{\&c.} \\ & + M_1.y_{1,x'} + M_1^{(1)}.y_{1,x'+1} + \text{\&c.} \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots + M_1^{(i-1)}.y_{1,x'+i-1} \\ & + N_1.\nabla.y_{1,x'} + N_1^{(1)}.\nabla.y_{1,x'+1} + \text{\&c.} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + M_{n-1}.y_{n-1,x'} + M^{(1)}_{n-1}.y_{n-1,x'+1} \ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots + M^{(i-n+1)}_{n-1}.y_{n-1,x'+i-n+1} \\ & + N_{n-1}.\nabla.y_{n-1,x'} + \text{\&c.} \end{aligned}$$

$y_{0,x'}$, $y_{1,x'}$ ... $y_{n-1,x'}$, $\nabla . y_{0,x'}$, $\nabla . y_{1,x'}$ ... $\nabla . y_{n-1,x'}$ étant les $2n$ fonctions arbitraires de l'intégrale de l'équation $\nabla^2 . y_{i,x'} = 0$; on aura de la même manière, les intégrales des équations $\nabla^3 . y_{i,x'} = 0$; $\nabla^4 . y_{i,x'} = 0$, &c.

J'ai nommé ailleurs (*voyez les Tomes VI & VII des Mémoires des Savans Étrangers*) les féries formées d'après l'équation $\nabla^r . y_{i,x} = 0$, *fuites récurrorécurrentes;* elles diffèrent des fuites récurrentes, en ce que dans celles-ci les termes ne font fonctions que d'une feule variable : ainfi tous leurs termes dans la *Table (Q)*, font ou dans un même rang vertical, ou dans un même rang horizontal, ou fur une même droite inclinée à l'horizon d'une manière quelconque; au lieu que les termes d'une fuite *récurrorécurrente* étant fonctions de deux variables, rempliffent toute l'étendue de la *Table (Q)*, & forment une furface, de forte que les quantités arbitraires qui dans le cas des fuites récurrentes, font déterminées par autant de points de la ligne fur laquelle leurs termes font difpofés, fe déterminent ici par des lignes droites ou par des polygones placés arbitrairement dans la Table précédente. L'équation qui exprime la loi d'une fuite récurrente eft aux différences finies; celle qui exprime la loi d'une fuite *récurrorécurrente* eft aux différences finies partielles, & fon intégrale renferme un nombre de fonctions arbitraires égal au degré de cette équation.

XVII.

La valeur de $y_{i,x'}$ dans la formule (λ) de l'*article précédent*, dépendant de la connoiffance de $M^{(r)}$, $M_1^{(r-1)}$, &c. il eft vifible que ces quantités feront connues lorfque l'on aura le coëfficient de $\frac{1}{t^r}$ dans le développement de $Z^{(0)}_{i-x+1}$; tout fe réduit donc à déterminer ce coëfficient: or on a par l'*article V*,

$$Z_i^{(0)} = -\frac{1}{\alpha . \alpha^{i+1} . (\alpha - \alpha') . (\alpha - \alpha'') . \&c.},$$

$$-\frac{1}{\alpha . \alpha'^{i+1} . (\alpha' - \alpha) . (\alpha' - \alpha'') . \&c.},$$

$$-\frac{1}{\alpha . \alpha''^{i+1} . (\alpha'' - \alpha) . (\alpha'' - \alpha') . \&c.},$$

$$- \&c.$$

α, α', α'', &c. étant fonctions de $\frac{1}{t'}$. Si l'on fait $\frac{1}{t'} = s$, & que l'on différencie l'expression précédente de $Z_i^{(0)}$, n fois de suite par rapport à s, on aura $n + 1$ équations au moyen desquelles en éliminant les n quantités α^i, α'^i, α''^i, &c. on parviendra à une équation entre $Z_i^{(0)}$, $\frac{\partial . Z_i^{(0)}}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 . Z_i^{(0)}}{\partial s^2}$, &c. dont les coëfficiens seront fonctions de α', α'', &c. & de leurs différences : or il est clair que α, α', α'', &c. doivent entrer de la même manière dans ces coëfficiens ; on pourra donc, par les méthodes connues, les déterminer en fonctions rationnelles des coëfficiens de l'équation qui donne les valeurs de α, α', &c. & des différences de ces coëfficiens, & par conséquent en fonctions rationnelles de s ; en faisant ensuite disparoître les dénominateurs de ces fonctions, on aura une équation linéaire entre $Z_i^{(0)}$ & ses différentielles, dont les coëfficiens seront des fonctions rationnelles & entières de s, ou, ce qui revient au même, de $\frac{1}{t'}$. Cela posé, considérons un terme quelconque de cette équation, tel que $\frac{K}{t'^m} . \frac{\partial^\mu . Z_i^{(0)}}{\partial t^\mu}$, & nommons λ_r le coëfficient de $\frac{1}{t^r}$ dans le développement de $Z_i^{(0)}$; ce coëfficient, dans le développement de $\frac{K}{t^m} . \frac{\partial^\mu . Z_i^{(0)}}{\partial t^\mu}$, sera $K . (r - m + \mu)$

$r.(r-m+\mu-1).(r-m+\mu-2)\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots(r-m).\lambda_{r-m+\mu}$; en repassant ainsi des fonctions génératrices à leurs variables correspondantes, l'équation précédente entre $Z^{(0)}_{i-n+1}$ & ses différences, donnera une équation entre λ_r, λ_{r+1}, &c. dont les coëfficiens sont variables, & en l'intégrant, on aura la valeur de λ_r.

Il suit de-là que l'intégration de toute équation linéaire aux différences finies partielles dont les coëfficiens sont constans, dépend 1.° de l'intégration d'une équation linéaire aux différences finies dont les coëfficiens sont variables; 2.° d'une intégrale *définie;* je nomme ainsi toute intégrale prise depuis une valeur déterminée de la variable jusqu'à une autre valeur déterminée. L'intégrale définie dont dépend la valeur de $y_{i,x}$ dans la formule (λ), est relative à r, & doit s'étendre depuis $r=0$ jusqu'à $r=i$. Relativement aux équations différentielles du premier ordre, on a

$$Z_i^{(0)} = -\frac{1}{a.\alpha^{i+1}};$$

on a de plus,

$$a = A + B's,$$

$$\alpha = -\frac{B}{a},$$

ce qui donne

$$Z_i^{(0)} = -\frac{(A+B's)^i}{(-B)^{i+1}};$$

d'où l'on tire cette équation différentielle,

$$0 = \frac{\partial Z_i^{(0)}}{\partial s}.(A+B's) - iB'.Z_i^{(0)},$$

ce qui donne l'équation aux différences finies,

$$0 = A(r+1).\lambda_{r+1} + B'r.\lambda_r - iB'\lambda_r;$$

on a ensuite dans ce cas,

$$M^{(r)} = B.\lambda_r;$$

la formule (λ) de l'*article précédent*, deviendra donc

$$y_{i,x'} = B.\Sigma.\lambda_r.y_{0,x'+r},$$

ce sera l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles,

$$0 = Ay_{i,x'} + B.y_{i+1,x'} + B'.y_{i,x'+1},$$

pourvu que l'intégrale soit prise depuis $r = 0$, jusqu'à $r = i + 1$, & que la constante arbitraire de la valeur de λ_r, soit telle que $\lambda_0 = -\frac{A^i}{(-B)^{i+1}}$.

En passant du fini à l'infiniment petit, la méthode précédente donnera l'intégrale des équations linéaires aux différences infiniment petites partielles dont les coëfficiens sont constans, 1.° en intégrant une équation linéaire aux différences infiniment petites; 2.° au moyen d'intégrales définies; ce qui donne l'intégration de ces équations dans une infinité de cas qui se refusent aux méthodes connues; mais comme le passage du fini à l'infiniment petit peut offrir ici quelques difficultés, j'ai préféré de chercher une méthode directement applicable aux équations linéaires aux différences infiniment petites partielles, & j'ai trouvé la suivante qui a l'avantage de s'étendre aux équations linéaires dont les coëfficiens sont variables. Je me bornerai à considérer les équations différentielles du second ordre, comme étant celles qui se présentent le plus fréquemment dans l'application de l'analyse aux questions physiques.

XVIII.

TOUTES les équations linéaires aux différences infiniment petites partielles du second ordre, peuvent être mises sous cette forme,

$$0 = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial s \partial s'}\right) + m\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + n\left(\frac{\partial u}{\partial s'}\right) + lu(S);$$

m, *n* & *l* étant des fonctions quelconques données de *s* & de *s'*,

& si l'on nomme $\varphi_1(s)$, l'intégrale $\int \partial s . \varphi(s)$; $\varphi_2(s)$, l'intégrale $\int \partial s . \varphi_1(s)$; $\varphi_3(s)$, l'intégrale $\int \partial s . \varphi_2(s)$, & ainsi de suite; si l'on nomme pareillement $\psi_1(s')$, l'intégrale $\int \partial s' . \psi(s')$; $\psi_2(s')$, l'intégrale $\int \partial s' . \psi_1(s')$; $\psi_3(s')$, l'intégrale $\int \partial s' . \psi_2(s')$, & ainsi de suite, la valeur de u peut être exprimée par une suite de cette forme,

$$u = A . \varphi_1(s) + A^{(1)} . \varphi_2(s) + A^{(2)} . \varphi_3(s) + A^{(3)} . \varphi_4(s) + \&c. + B . \psi_1(s') + B^{(1)} . \psi_2(s') + B^{(2)} . \psi_3(s') + B^{(3)} . \psi_4(s') + \&c.$$

$\varphi(s)$ & $\psi(s')$ étant deux fonctions arbitraires, l'une de s, & l'autre de s'; *(voyez sur cela les Mémoires de l'Académie pour l'année 1773, page 355 & suiv.)*. Cela posé, si l'on substitue cette valeur de u dans l'équation (S), & que l'on compare séparément les termes multipliés par $\varphi(s)$, $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, &c. $\psi(s)$, $\psi_1(s')$, $\psi_2(s')$, &c. on aura pour déterminer A, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, &c. B, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, &c. les équations suivantes,

$$o = \left(\frac{\partial A}{\partial s'}\right) + mA;$$

$$\left.\begin{aligned} o &= \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial s'}\right) + mA^{(1)} + \left(\frac{\partial\partial A}{\partial s \partial s'}\right) + m\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right) + n\left(\frac{\partial A}{\partial s'}\right) + l . A \\ o &= \left(\frac{\partial A^{(2)}}{\partial s'}\right) + mA^{(2)} + \left(\frac{\partial\partial A}{\partial s \partial s'}\right) + m\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial s}\right) + n\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial s'}\right) + l . A^{(1)} \end{aligned}\right\}; (\gamma)$$

&c.

$$o = \left(\frac{\partial B}{\partial s}\right) + nB;$$

$$\left.\begin{aligned} o &= \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial s}\right) + nB^{(1)} + \left(\frac{\partial\partial B}{\partial s \partial s'}\right) + m\left(\frac{\partial B}{\partial s}\right) + n\left(\frac{\partial B}{\partial s'}\right) + l . B \\ o &= \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial s}\right) + nB^{(2)} + \left(\frac{\partial\partial B^{(1)}}{\partial s \partial s'}\right) + m\left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial s}\right) + n\left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial s'}\right) + l . B^{(1)} \end{aligned}\right\}; (\gamma')$$

&c.

Lorsqu'en satisfaisant à ces équations, on parvient à trouver $A^{(\mu)} = o$, ou $B^{(\mu)} = o$, μ étant un nombre entier

positif, alors u peut toujours s'exprimer en termes finis, en n'ayant égard qu'aux seules variables s & s' de l'équation; j'ai donné dans les Mémoires cités une méthode générale & fort simple, pour avoir dans ce cas l'intégrale complète de cette équation; mais si l'une ou l'autre des deux équations $A^{(\mu)} = 0$, & $B^{(\mu)} = 0$, ne peut avoir lieu, il faut nécessairement, pour avoir l'expression de u en termes finis, y introduire une nouvelle variable de la manière suivante.

Pour cela, nous observerons que si l'on fait commencer l'intégrale $\int \partial s . \varphi(s)$, lorsque $s = 0$, on aura

$$\int \partial s . \varphi(s) = \partial s . \{\varphi(0) + \varphi(\partial s) + \varphi(2\partial s) + \varphi(3\partial s) \dots \dots + \varphi(r\partial s) + \varphi[(r+1).\partial s] \dots + \varphi(s)\};$$

donc si l'on nomme T la suite

$$\varphi(0) + t.\varphi(\partial s) + t^2.\varphi(2\partial s) + t^3.\varphi(3\partial s) \dots$$

$$\dots + t^r.\varphi(r\partial s) + t^{r+1}.\varphi[(r+1).\partial s] \dots + t^{\frac{s}{\partial s}}.\varphi(s),$$

$\int \partial s . \varphi(s)$ ou $\varphi_1(s)$ sera égal au coëfficient de $t^{\frac{s}{\partial s}}$ dans le développement de la fonction $\frac{T.\partial s}{1-t}$; il est aisé d'en conclure, que $\varphi_2(s)$ sera égal au coëfficient de $t^{\frac{s}{\partial s}}$ dans le développement de $\frac{T\partial s^2}{(1-t)^2}$, & généralement que $\varphi_\mu.(s)$ sera égal au coëfficient de $t^{\frac{s}{\partial s}}$ dans le développement de $\frac{T.\partial s^\mu}{(1-t)^\mu}$; d'ailleurs, il est visible que le coëfficient de $\varphi(r\partial s)$ dans $\varphi_\mu.(s)$ est égal au coëfficient de $t^{\frac{s}{\partial s} - r}$ dans le développement de $\frac{\partial s^\mu}{(1-t)^\mu}$, & par conséquent égal à

$$\frac{\left(\frac{s}{\partial s}-r+1\right).\left(\frac{s}{\partial s}-r+2\right).\left(\frac{s}{\partial s}-r+3\right)\ldots\left(\frac{s}{\partial s}-r+\mu-1\right).\partial s^{\mu}}{1.2.3\ldots\ldots(\mu-1)}.$$

Suppoſons r infini & égal à $\frac{z}{\partial s}$, nous aurons $\frac{(s-z)^{\mu-1}.\partial s}{1.2.3\ldots(\mu-1)}$ pour ce coëfficient; d'où il ſuit que le coëfficient de $\varphi(r\partial s)$ ou $\varphi(z)$ dans l'expreſſion de u, ſera

$$\partial s.\left\{A+A^{(1)}.(s-z)+\frac{A^{(2)}}{1.2}.(s-z)^2+\frac{A^{(3)}}{1.2.3}.(s-z)^3+\frac{A^{(4)}}{1.2.3.4}(s-z)^4+\&c.\right\}$$

donc ſi l'on nomme $\Gamma.(s-z)$ la ſomme de la ſuite

$$A+A^{(1)}.(s-z)+\frac{A^{(2)}}{1.2}.(s-z)^2+\frac{A^{(3)}}{1.2.3}.(s-z)^3+\&c.$$

& que l'on ſuppoſe $\partial s=\partial z$, on aura $\int\partial z.\Gamma.(s-z).\varphi(z)$ égal à la ſuite

$$A.\varphi_1.(s)+A^{(1)}.\varphi_2.(s)+A^{(2)}.\varphi_3.(s)+A^{(3)}.\varphi_4.(s)+\&c.$$

pourvu que l'intégrale ſoit priſe depuis $z=0$ juſqu'à $z=s$.

Si l'on nomme pareillement $\Pi.(s'-z)$, la ſomme de la ſuite

$$B+B^{(1)}.(s'-z)+\frac{B^{(2)}}{1.2}.(s'-z)^2+\frac{B^{(3)}}{1.2.3}.(s'-z)^3+\&c.$$

on trouvera, par le même procédé, que $\int\partial z.\Pi.(s'-z).\psi(z)$ eſt égal à la ſuite

$$B.\psi_1.(s')+B^{(1)}.\psi_2.(s')+B^{(2)}.\psi_3.(s')+\&c.$$

pourvu que l'intégrale ſoit priſe depuis $z=0$ juſqu'à $z=s'$; on aura donc

$$u=\int\partial z.\Gamma.(s-z).\varphi(z)+\int\partial z.\Pi.(s'-z).\psi(z),$$

l'intégrale du premier terme étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, & celle du second terme étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s'$. On peut observer ici que les fonctions $\Gamma.(s - z)$, & $\Pi.(s' - z)$, sont autant de valeurs particulières qui satisfont pour u, à l'équation proposée aux différences partielles. En effet, il est clair, par la nature des valeurs de A, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, &c. que si l'on substitue dans cette équation, au lieu de u, la suite

$$A + A^{(1)}.(s - z) + \frac{A^{(2)}}{1.2}.(s - z)^2 + \&c.$$

z étant regardé comme constant, elle sera satisfaite. Mais parmi toutes les valeurs particulières de u, qui renferment une constante arbitraire z, il faut choisir pour $\Gamma.(s - z)$ celle qui donne $0 = (\frac{\partial u}{\partial s'}) + mu$, lorsque $z = s$; parce qu'alors u se réduit à A, & que l'on doit avoir $0 = (\frac{\partial A}{\partial s'}) + mA$; il faut pareillement choisir pour $\Pi.(s' - z)$ une valeur particulière de u, qui renferme une constante arbitraire z, & dans laquelle on ait $0 = (\frac{\partial u}{\partial s}) + nu$, lorsque $z = s'$, parce que dans ce cas, u se réduit à B, & que l'on doit avoir $0 = (\frac{\partial B}{\partial s}) + nB$. On peut parvenir directement à ces résultats, de la manière suivante.

Supposons que l'intégrale $\int p\, \partial z . \varphi(z)$, prise depuis z égal à une constante quelconque jusqu'à $z = s$, soit une valeur particulière de u; on aura dans ce cas,

$$(\frac{\partial u}{\partial s'}) = \int(\frac{\partial p}{\partial s'}).\partial z.\varphi(z),$$

$$(\frac{\partial u}{\partial s}) = \int(\frac{\partial p}{\partial s}).\partial z.\varphi(z) + P.\varphi(s),$$

P étant

P étant ce que devient p, lorſqu'on y fait $z = s$; de-là, on tirera

$$\left(\frac{\partial\partial u}{\partial s \partial s'}\right) = \int \left(\frac{\partial\partial p}{\partial s \partial s'}\right).\partial z.\varphi(z) + \left(\frac{\partial P}{\partial s'}\right).\varphi(s);$$

en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation (S) aux différences partielles, on aura

$$o = \left\{\left(\frac{\partial P}{\partial s'}\right) + mP\right\}.\varphi(s)$$
$$+ \int \partial z.\varphi(z).\left\{\left(\frac{\partial\partial p}{\partial s \partial s'}\right) + m\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) + n\left(\frac{\partial p}{\partial s'}\right) + lp\right\},$$

ce qui donne, en égalant ſéparément à zéro, les termes affectés du ſigne intégral,

$$o = \left(\frac{\partial P}{\partial s'}\right) + mP,$$
$$o = \left(\frac{\partial\partial p}{\partial s \partial s'}\right) + m.\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) + n.\left(\frac{\partial p}{\partial s'}\right) + l.p.$$

On voit ainſi que ſi l'on a deux valeurs particulières de u, repréſentées par p & p', qui renferment une conſtante arbitraire z, & qui ſoient telles que l'on ait

$$o = \left(\frac{\partial P}{\partial s'}\right) + mP,$$
$$o = \left(\frac{\partial P'}{\partial s}\right) + nP',$$

P étant ce que devient p lorſqu'on y fait $z = s$, & P' étant ce que devient p' lorſqu'on y fait $z = s'$, on aura pour l'expreſſion complète de u,

$$u = \int p\,\partial z.\varphi(z) + \int p'\,\partial z.\psi(z),$$

$\varphi(z)$ & $\psi(z)$ étant deux fonctions arbitraires de z, & l'intégrale du premier terme étant priſe depuis z égal à une conſtante quelconque que nous ſupppſerons zéro, juſqu'à $z = s$; celle du ſecond terme étant priſe depuis $z = o$ juſqu'à $z = s'$.

Si l'on change z en st dans le terme $\int p\,\partial z.\varphi(z)$, & que l'on nomme q ce que devient p par ce changement, on aura

$$\int p\,\partial z.\varphi(z) = \int qs.\partial t.\varphi(st),$$

& comme l'intégrale relative à z doit être prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, il est clair que l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$. Si l'on nomme pareillement q' ce que devient p', lorsqu'on y change z en $s't$, on aura

$$\int p'\partial z.\psi(z) = \int q's'\partial t.\psi(s't),$$

l'intégrale relative à t étant prise encore depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$; on peut conséquemment donner à u cette forme,

$$u = \int \partial t.\{sq.\varphi(st) + s'q'.\psi(s't)\},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$.

Si l'on nomme K l'intégrale $\int p\,\partial z.\varphi(z)$, prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$; cette intégrale prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, sera visiblement égale à $K - \int p\,\partial z.\varphi(z)$, cette dernière intégrale étant prise depuis $z = s$ jusqu'à $z = \infty$; donc si l'on fait $z = s + z'$, & que l'on nomme r ce que devient p par ce changement, on aura

$$\int p\,\partial z.\varphi(z) = K - \int r\,\partial z'.\varphi(s + z'),$$

l'intégrale relative à z étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, & l'intégrale relative à z' étant prise depuis $z' = 0$ jusqu'à $z' = \infty$. Si l'on nomme pareillement K' l'intégrale $\int p'\partial z.\varphi(z)$ prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$; que l'on fasse $z = s' + z'$, & que l'on nomme r' ce que devient p' par ce changement, on aura

$$\int p'\partial z.\psi(z) = K' - \int r'\partial z'.\psi(s' + z'),$$

l'intégrale relative à z étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s'$,

& l'intégrale relative à z' étant prise depuis $z' = 0$ jusqu'à $z' = \infty$; on aura donc

$$u = K + K' - \int \partial z' . \{ r . \phi (s + z') + r' \psi (s' + z') \}.$$

Les fonctions $\phi (s + z')$ & $\psi (s' + z')$ étant arbitraires & pouvant même être supposées discontinues, on peut sans nuire à la généralité de cette valeur de u, les suppposer telles que l'on ait $K + K' = 0$; on aura donc, en changeant le signe de ces fonctions,

$$u = \int \partial z . \{ r . \phi (s + z') + r' . \psi (s' + z') \}$$

l'intégrale étant prise depuis $z' = 0$ jusqu'à $z' = \infty$.

Ces différentes formes que l'on peut donner à u, ont chacune des avantages particuliers, suivant les différens Problèmes que l'on se propose de résoudre; on verra ci-après (*article XX*) un usage de la dernière, dans la théorie du son; mais on doit observer qu'elles sont toutes dépendantes d'intégrales définies, & qu'elles ne peuvent être ramenées à des intégrales indéfinies, que dans le cas où l'une ou l'autre des quantités p & p' est une fonction rationnelle & entière de z.

Toute la difficulté de l'intégration des équations linéaires aux différences partielles du second ordre, se réduit ainsi à déterminer ces quantités; c'est ce qui paroît très-difficile en général : nous nous bornerons conséquemment à considérer quelques cas particuliers qui sont relatifs à plusieurs Problèmes intéressans que l'on n'a pu résoudre encore que d'une manière particulière.

XIX.

SUPPOSONS d'abord m, n & l constans dans l'équation (S), on satisfera aux équations (γ) & (γ') de l'*article précédent*, en faisant

$$A = e^{-ms'-ns},$$

$$A^{(1)} = e^{-ms'-ns} . (mn - l) . s',$$

$$A^{(2)} = e^{-ms'-ns} . \frac{(mn - l)^2}{1.2} . s'^2,$$

. . . .

$$A^{(\mu)} = e^{-ms'-ns} \cdot \frac{(mn-l)}{1.2.3\ldots\mu} \cdot s'^{\mu},$$

&c.

$$B = e^{-ms'-ns},$$

$$B^{(1)} = e^{-ms'-ns} \cdot (mn - l) \cdot s,$$

$$B^{(2)} = e^{-ms'-ns} \cdot \frac{(mn-l)^2}{1.2} \cdot s^2,$$

. . . .

$$B^{(\mu)} = e^{-ms'-ns} \cdot \frac{(mn-l)^{\mu}}{1.2.3\ldots\mu} \cdot s^{\mu},$$

&c.

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité ; on aura ainsi

$$\Gamma.(s-z) = e^{-ms'-ns} \cdot \{1 + (mn-l) \cdot s' \cdot (s-z) + \frac{(mn-l)^2}{1.2} \cdot s'^2 \cdot (s-z)^2 + \frac{(mn-l)^3}{1.2.3} \cdot s'^3 \cdot (s-z)^3 + \&c.\}$$

en sorte que $\Gamma.(s-z)$ est égal à une fonction de $s'.(s-z)$, multipliée par $e^{-ms'-ns}$; soit y cette fonction, & nommons θ la quantité $s'.(s-z)$; $e^{-ms'-ns}.y$ sera, par ce précède, une intégrale particulière de l'équation proposée aux différences partielles ; on la substituera donc pour u dans cette équation, & l'on observera que dans ce cas

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) = -n e^{-ms'-ns} \cdot y + e^{-ms'-ns} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial s}\right);$$

or on a $\left(\frac{\partial \theta}{\partial s}\right) = s'$; partant

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) = e^{-ms'-ns} \cdot \left\{-ny + s'\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\right\};$$

on aura pareillement

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s'}\right) = e^{-ms'-ns} \cdot \left\{ -my + (s-z) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\right\},$$

$$\left(\frac{\partial \partial u}{\partial s . \partial s'}\right) = e^{-ms'-ns} \cdot \left\{mn . y - n(s-z) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\right.$$

$$\left. - m . s' \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \theta . \left(\frac{\partial \partial y}{\partial \theta^2}\right)\right\}.$$

Si l'on ſubſtitue ces valeurs dans l'équation (S), on aura celle-ci aux différences ordinaires,

$$o = (l - mn) . y + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \theta . \left(\frac{\partial \partial y}{\partial \theta^2}\right),$$

& il faudra déterminer les deux conſtantes arbitraires de ſon intégrale, de manière que l'on ait $y = 1$, & $\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = mn - l$ lorſque $\theta = o$. Soit $\daleth(\theta)$ ce que devient cette intégrale, on aura

$$\Gamma . (s - z) = e^{-ms'-ns} . \daleth . \{s' . (s - z)\};$$

il eſt aiſé de voir que l'on aura pareillement

$$\Pi . (s' - z) = e^{-ms'-ns} . \daleth . [s . (s' - z)];$$

partant

$$u = e^{-ms'-ns} . \left\{ \begin{array}{l} \int \partial z . \daleth . [s' . (s - z)] . \varphi(z) \\ + \int \partial z . \daleth . [s . (s' - z)] . \psi(z) \end{array} \right\}$$

l'intégrale du premier terme étant priſe depuis $z = o$ juſqu'à $z = s$, & l'intégrale du ſecond terme étant priſe depuis $z = o$ juſqu'à $z = s'$; en effet, ſi l'on ſubſtitue cette valeur de u dans l'équation propoſée aux différences partielles, on s'aſſurera facilement qu'elle y ſatisfait; mais pour faire cette ſubſtitution, on doit obſerver en général que ſi l'intégrale $\int u \partial z$ doit être priſe depuis $z = o$ juſqu'à $z = s$, ſa différence priſe par

rapport à s, eſt $\partial s \,. \int (\frac{\partial u}{\partial s})\, \partial z + U \partial s$, U étant ce que devient u lorſqu'on y ſuppoſe $z = s$.

Si l, m & n étant toujours ſuppoſés conſtans, on a $l - mn = 0$, on aura $y = 1$, & l'expreſſion de u deviendra

$$u = e^{-ms' - ns} . \left\{ \begin{array}{l} \int \partial z \,.\, \varphi(z) \\ + \int \partial z \,.\, \psi(z) \end{array} \right\} = e^{-ms' - ns} . [\varphi_1 .(s) + \psi_1 .(s')];$$

en ſorte que la valeur de u eſt alors indépendante de toute intégrale définie; mais ce cas eſt le ſeul où cela puiſſe avoir lieu, & c'eſt ce qui réſulte pareillement de ce qui a été démontré dans les Mémoires de l'Académie, *année 1773, page 369.*

L'équation des cordes vibrantes dans un milieu réſiſtant comme la vîteſſe, eſt

$$a^2 . (\frac{\partial \partial u}{\partial x^2}) = (\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}) + b\,(\frac{\partial u}{\partial t}),$$

u étant l'ordonnée de la corde vibrante dont l'abſciſſe eſt x; t repréſentant le temps, & a & b étant deux conſtantes dépendantes, l'une de la groſſeur & de la tenſion de la corde, & l'autre de l'intenſité de la réſiſtance. Si l'on fait $at + x = s$, & $at - x = s'$, l'équation précédente deviendra

$$0 = (\frac{\partial \partial u}{\partial s . \partial s'}) + \frac{b}{4a} . (\frac{\partial u}{\partial s}) + \frac{b}{4a} . (\frac{\partial u}{\partial s'});$$

l'expreſſion précédente de u deviendra donc, en y ſubſtituant au lieu de s & de s', leurs valeurs $at + x$ & $at - x$,

$$u = e^{\frac{bt}{2}} . \left\{ \begin{array}{l} \int \partial z \,.\, \mathrm{I} \,.\, [(at - x) . (at + x - z)] \,.\, \varphi(z) \\ + \int \partial z \,.\, \mathrm{I} \,.\, [(at + x) . (at - x - z)] \,.\, \psi(z) \end{array} \right\}$$

la première intégrale étant priſe depuis $z = 0$ juſqu'à $z = at + x$, & la ſeconde intégrale étant priſe depuis $z = 0$ juſqu'à $z = at - x$. On voit par-là que le

Problème des cordes vibrantes dépend alors de l'intégration de l'équation différentielle

$$o = -\frac{b^2}{16a^2}.y + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \theta.\left(\frac{\partial\partial y}{\partial \theta^2}\right);$$

on voit de plus qu'à cause du facteur $e^{-\frac{bt}{2}}$, l'ordonnée u de la corde vibrante diminue sans cesse & devient nulle après un temps infini, ce qui d'ailleurs est visible *a priori.*

XX.

SUPPOSONS encore dans l'équation générale (S) de l'*art. XVIII*, $m = \frac{f}{s+s'}$, $n = \frac{g}{s+s'}$ & $l = \frac{h}{(s+s')^2}$, en sorte que l'on ait à intégrer cette équation aux différences partielles,

$$o = \left(\frac{\partial\partial u}{\partial s.\partial s'}\right) + \frac{f}{s+s'}.\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \frac{g}{s+s'}.\left(\frac{\partial u}{\partial s'}\right) + \frac{h.u}{(s+s')^2}; \quad (T)$$

on s'assurera facilement que les valeurs suivantes satisfont aux équations (γ) & (γ') de l'article cité,

$$A = (s+s')^{-f},$$

$$A^{(1)} = \{f.(1-g)+h\}.\frac{A}{s+s'},$$

$$2.A^{(2)} = \{(f+1).(2-g)+h\}.\frac{A^{(1)}}{s+s'},$$

$$3.A^{(3)} = \{(f+2).(3-g)+h\}.\frac{A^{(2)}}{s+s'},$$

[. . . . .]

$$\mu.A^{(\mu)} = \{(f+\mu-1).(\mu-g)+h\}.\frac{A^{(\mu-1)}}{s+s'},$$

&c.

$$B = (s + s^1)^{-f},$$

$$B^{(1)} = \{g \cdot (1 - f) + h\} \cdot \frac{B}{s + s^1},$$

$$2 . B^{(2)} = \{(g + 1) \cdot (2 - f) + h\} \cdot \frac{B^{(1)}}{s + s^1};$$

$$3 . B^{(3)} = \{(g + 2) \cdot (3 - f) + h\} \cdot \frac{B^{(2)}}{s + s^1};$$

. . . . ;

$$\mu . B^{(\mu)} = \{(g + \mu - 1) . (\mu - f) + h\} . \frac{B^{(\mu - 1)}}{s + s^1},$$

&c.

on aura ainsi

$$\Gamma . (s - z) = (s + s^1)^{-f} . \left\{ \begin{array}{l} 1 + \{f(1 - g) + h\} . \frac{s - z}{s + s^1} \\ + \{(f + 1) . (2 - g) + h\} . (\frac{s - z}{s + s^1})^2 + \&c. \end{array} \right\}$$

donc si l'on fait $\frac{s - z}{s + s^1} = \theta$, $\Gamma . (s - z)$ sera égal à une fonction de θ, multipliée par $(s + s^1)^{-f}$. Nommons y cette fonction, en sorte que $\Gamma . (s - z) = (s + s^1)^{-f} . y$; $(s + s^1)^{-f} . y$ sera une valeur particulière de u, & l'on aura dans ce cas

$$(\frac{\partial u}{\partial s}) = -f . (s + s^1)^{-f-1} . y + (s + s^1)^{-f} . (\frac{\partial y}{\partial \theta}) . (\frac{\partial \theta}{\partial s});$$

or on a

$$(\frac{\partial \theta}{\partial s}) = \frac{1}{s + s^1} - \frac{(s - z)}{(s + s^1)^2} = \frac{1}{s + s^1} . (1 - \theta);$$

partant

$$(\frac{\partial u}{\partial s}) = (s + s^1)^{-f-1} . \{(\frac{\partial y}{\partial \theta}) . (1 - \theta) - fy\};$$

on

on trouvera pareillement

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s'}\right) = -(s+s')^{-f-1} \cdot \left\{fy + \theta \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\right\},$$

$$\left(\frac{\partial\partial u}{\partial s \partial s'}\right) = (s+s')^{-f-2} \cdot \left\{\begin{array}{c} f\cdot(f+1)\cdot y + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\cdot(2f\theta + 2\theta - f - 1) \\ -\theta\cdot(1-\theta)\cdot\left(\frac{\partial\partial y}{\partial \theta^2}\right) \end{array}\right\}$$

En ſubſtituant ces valeurs dans l'équation propoſée aux différences partielles, on aura l'équation ſuivante aux différences ordinaires,

$$0 = \theta\cdot(1-\theta)\cdot\left(\frac{\partial\partial y}{\partial \theta^2}\right) + \{\theta\cdot(g-f-2)+1\}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + (fg-f-h)\cdot y; \quad (a')$$

il faudra déterminer les deux conſtantes arbitraires de ſon intégrale, de manière que l'on ait $y = 1$, & $\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = f\cdot(1-g)+h$, lorſque $\theta = 0$; en nommant donc $\perp\cdot(\theta)$ ce que devient alors y, on aura

$$\Gamma\cdot(s-z) = \frac{\perp\cdot\left(\frac{s-z}{s+s'}\right)}{(s+s')^f}.$$

Si l'on change g en f, & réciproquement f en g dans l'équation (a'), on aura

$$0 = \theta\cdot(1-\theta)\cdot\left(\frac{\partial\partial y}{\partial \theta^2}\right) + \{\theta\cdot(f-g-2)+1\}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + (fg-g-h)\cdot y; \quad (b')$$

& ſi l'on détermine les deux conſtantes arbitraires, de manière que l'on ait $y = 1$, & $\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = g(1-f)+h$, lorſque $\theta = 0$; en nommant $\square\cdot(\theta)$ ce que devient alors y, on aura

$$\Pi\cdot(s'-z) = \frac{\square\cdot\left(\frac{s'-z}{s+s'}\right)}{(s+s')^g}.$$

Les deux fonctions $\perp.(\theta)$ & $\square.(\theta)$, ont entr'elles une relation fort simple, au moyen de laquelle, lorsque l'une des deux sera connue, l'autre le sera pareillement : en effet, si dans l'équation (b'), on fait $y' = (1 - \theta)^{f-g}.y$, on aura

$$0 = \theta.(1-\theta).\left(\frac{\partial\partial y'}{\partial\theta^2}\right) + \{\theta.(g-f-2)+1\}.\left(\frac{\partial y'}{\partial\theta}\right) + (fg-f-h).y';$$

équation qui est la même que l'équation (a'). De plus, comme on doit avoir, relativement à l'équation (b'), $y = 1$, & $\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right) = g - fg + h$, lorsque $\theta = 0$; on aura dans ce même cas, $y' = 1$, &

$$\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right) = \left(\frac{\partial y'}{\partial\theta}\right) - (f-g).y' = g - fg + h,$$

ce qui donne $\left(\frac{\partial y'}{\partial\theta}\right) = f - fg + h$; ainsi les deux constantes arbitraires de l'intégrale de l'équation en y', sont les mêmes que celles de l'intégrale de l'équation (a'), ce qui donne $y' = \perp.(\theta)$; partant $\square.(\theta) = (1-\theta)^{f-g}.\perp(\theta)$; on a d'ailleurs, relativement à l'équation (b'), $\theta = \frac{s'-z}{s+s'}$; donc

$$\square.\left(\frac{s'-z}{s+s'}\right) = \frac{(s+z)^{f-g}.\perp.\left(\frac{s'-z}{s+s'}\right)}{(s+s')^{f-g}},$$

& $$\Pi.(s'-z) = \frac{(s+z)^{f-g}.\perp.\left(\frac{s'-z}{s+s'}\right)}{(s+s')^{f}},$$

on aura conséquemment par l'*article XVIII*,

$$u = \frac{1}{(s+s')^f}.\left\{\begin{array}{l} \int\partial z.\perp.\left(\frac{s-z}{s+s'}\right).\varphi(z) \\ + \int\partial z.(s+z)^{f-g}.\perp.\left(\frac{s'-z}{s+s'}\right).\psi(z) \end{array}\right\}; (V)$$

la première intégrale étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, & la seconde étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s'$.

Si l'une ou l'autre des deux quantités $\perp . \left(\frac{s - z}{s + s'}\right)$ & $\square . \left(\frac{s' - z}{s + s'}\right)$, celle-ci, par exemple, $\perp . \left(\frac{s - z}{s + s'}\right)$ est une fonction rationnelle & entière de z; alors l'expression de u, considérée relativement à la fonction arbitraire correspondante qui dans ce cas est $\varphi(z)$, sera exprimée par une suite finie de termes multipliés par les intégrales successives de $\varphi(s)$; car il est clair qu'alors $\int \partial z . \perp . \left(\frac{s - z}{s + s'}\right) \varphi(z)$, sera composé de termes de la forme $H . \int z^{\mu} \partial z . \varphi(z)$, μ étant un nombre entier positif: or on a en intégrant par parties,

$$\int z^{\mu} . \partial z . \varphi(z) = z^{\mu} . \varphi_1(z) - \mu . z^{\mu - 1} . \varphi_2(z) + \mu . (\mu - 1) . z^{\mu - 2} . \varphi_3(z) \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \pm 1 . 2 . 3 \ldots \mu . \varphi_{\mu + 1}(z) + C,$$

expression délivrée du signe $\int$, & dans laquelle on doit faire $z = s$. On voit ainsi que la partie de l'expression de u relative à la fonction arbitraire $\varphi(z)$, est indépendante non-seulement de toute intégrale définie, mais encore de toute espèce d'intégrale: or il résulte de ce que j'ai démontré dans les *Mémoires* cités de 1773, que l'expression complète de u est alors entièrement indépendante de toute intégrale définie, c'est-à-dire qu'elle peut être exprimée par des intégrales indéfinies uniquement relatives aux variables s & s' de l'équation proposée. On peut s'en assurer encore très-aisément au moyen de la formule *(V)*; car il est visible que l'intégrale

$$\int \partial z . (s + z)^{f - g} . \perp . \left(\frac{s' - z}{s + s'}\right) . \psi(z)$$

sera dans ce cas réductible à des termes de cette forme,

$$H \int z^{\mu} \partial z . (s + z)^{f - g} . \psi(z).$$

μ étant un nombre entier positif ou zéro : or on peut par des intégrations par parties, réduire l'intégrale

$$\int z^{\mu} \partial z \cdot (s + z)^{f-g} \cdot \psi(z)$$

à des termes délivrés du signe $\int$, & à des intégrales de cette forme,

$$\int \partial z \cdot (s + z)^{r} \cdot \psi_{i}(z);$$

cette dernière intégrale devant être prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s'$, est évidemment égale à celle-ci,

$$\int \partial s' \cdot (s + s')^{r} \cdot \psi_{i}(s),$$

& par conséquent indépendante de toute intégrale définie : on voit par-là comment l'intégrale

$$\int \partial z \cdot (s + z)^{f-g} \cdot \text{I} \cdot \left(\frac{s'-z}{s+s'}\right) \cdot \psi(z)$$

peut se réduire à des intégrales indéfinies, quoique le facteur

$$(s + z)^{f-g} \cdot \text{I} \cdot \left(\frac{s'-z}{s+s'}\right)$$

puisse ne pas être une fonction rationnelle & entière de z.

Maintenant la condition nécessaire pour que l'expression de $\text{I} \cdot \left(\frac{s-z}{s+s'}\right)$, réduite en série, se termine, est que l'on ait $A^{(\mu)} = 0$, μ étant un nombre positif, ce qui donne

$$0 = (f + \mu - 1) \cdot (\mu - g) + h;$$

d'où l'on tire

$$\mu = \frac{1 + g - f \pm \sqrt{[(f + g - 1)^2 - 4h]}}{2}.$$

Lorsque l'une ou l'autre de ces deux valeurs de μ est zéro ou un nombre entier positif, alors $\text{I} \cdot \left(\frac{s-z}{s+s'}\right)$ est une

fonction rationnelle & entière de z; en changeant f en g & réciproquement, on aura

$$\mu = \frac{1 + f - g \pm \sqrt{[(f+g-1)^2 - 4h]}}{2},$$

& si l'une ou l'autre de ces valeurs de μ est zéro ou un nombre entier positif, la valeur de $\square . (\frac{s^1 - z}{s + s^1})$ sera une fonction rationnelle & entière de z; dans tous ces cas, l'expression de u ne dépendra d'aucune intégrale définie, autrement elle en sera nécessairement dépendante.

Si l'on nomme x la distance d'une molécule d'air à l'origine du son dans l'état d'équilibre, $x + u$ sa distance après le temps t, on aura

$$(\frac{\partial\partial u}{\partial t^2}) = a^2 . (\frac{\partial\partial u}{\partial x^2}) + \frac{m a^2}{x} . (\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{m a^2 u}{x^2},$$

a^2 étant un coëfficient constant dépendant de l'élasticité & de la densité de l'air, & m étant 0, ou 1, ou 2, suivant que l'on considère l'air ou avec une seule, ou avec deux, ou avec trois dimensions *(voyez sur cet objet les savantes Recherches de M. de la Grange sur le son, insérées dans le Tome II des Mémoires de la Société Royale de Thurin)*. Soit $x + at = s$; $x - at = s^1$; l'équation précédente deviendra

$$0 = (\frac{\partial\partial u}{\partial s \partial s^1}) + \frac{m}{2(s+s^1)} . [(\frac{\partial u}{\partial s}) + (\frac{\partial u}{\partial s^1})] - \frac{m u}{(s+s^1)^2};$$

la formule *(V)* deviendra donc

$$u = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} . x^{\frac{m}{2}}} . \left\{ \begin{array}{l} \int \partial z . \text{⅂} . (\frac{x + at - z}{2x}) . \varphi(z) \\ + \int \partial z . \text{⅂} . (\frac{x - at - z}{2x}) . \psi(z) \end{array} \right\}$$

la première intégrale étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = x + at$, & la seconde étant prise depuis $z = 0$

jusqu'à $z = x - at$. La fonction $\mathrm{I}.\left(\frac{x \pm at - z}{2x}\right)$ est la valeur de y, dans l'équation différentielle,

$$0 = \theta.(1-\theta).\left(\frac{\partial\partial y}{\partial\theta^2}\right) + \theta.(1-2\theta).\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right) + \frac{m^2+2m}{4}.y,$$

dans laquelle $\theta = \frac{x \pm at - z}{2x}$, les deux constantes arbitraires de son intégrale devant se déterminer, en sorte que l'on ait $y = 1$, & $\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right) = -\frac{m}{4}.(2+m)$.

Si l'on a $m = 0$ ou $m = 2$, la valeur de y, ordonnée suivant les puissances de θ, se termine, & alors la valeur de u est indépendante de toute intégrale définie; mais lorsque $m = 1$, ce qui a lieu quand on ne considère l'air qu'avec deux dimensions, l'expression de u est nécessairement dépendante d'une intégrale définie.

Si l'on change dans $\mathrm{I}.\left(\frac{x \pm at - z}{2x}\right)$, z en $x \pm at + z'$, on aura par l'*article XVIII*,

$$u = \frac{1}{2^{\frac{2}{m}}.x^{\frac{m}{2}}}.\int\partial z'.\mathrm{I}.\left(-\frac{z'}{2x}\right).\{\varphi(x+at+z') + \psi(x-at+z')\}$$

l'intégrale étant prise depuis $z' = 0$ jusqu'à $z' = \infty$. Il résulte évidemment de cette valeur de u, que la molécule d'air dont elle exprime le dérangement, ne commence à s'ébranler que lorsque $x - at + z'$ est égal ou moindre que le rayon de la petite sphère agitée au commencement; d'où il suit que dans les trois cas où l'air a une ou deux ou trois dimensions, la vîtesse du son est la même, & se détermine par l'équation $t = \frac{x}{a}$; on voit ainsi que les formes précédentes des intégrales des équations aux différences partielles, ont le même avantage dans les questions physiques, que les formes connues jusqu'à présent.

Nous pourrions encore appliquer la méthode précédente à la recherche des vibrations des cordes inégalement épaisses, à la théorie du son dans des tuyaux d'une figure quelconque, & à plusieurs autres questions importantes; mais ces discussions nous écarteroient trop de notre objet principal.

XXI.

REVENONS présentement aux équations linéaires aux différences finies partielles: quoique les formules que nous avons données dans l'*article XVI*, pour les intégrer, aient la plus grande généralité, il y a cependant quelques cas où elles ne peuvent servir; ces cas ont lieu lorsque l'équation $z = 0$ donne l'expression de $\frac{1}{t}$ en $\frac{1}{t^1}$ par une suite infinie, ce qui arrive toutes les fois que dans la fonction z, la plus haute puissance de $\frac{1}{t}$ est multipliée par une fonction rationnelle & entière de $\frac{1}{t^1}$. Pour avoir alors l'expression de y_{x,x^1} en termes finis, il est nécessaire de recourir à quelques artifices d'analyse que nous allons exposer, en les appliquant à l'équation suivante,

$$\frac{1}{t.t^1} - \frac{a}{t^1} - \frac{b}{t} - c = 0;$$

cette équation donne

$$\frac{1}{t} = \frac{c + \frac{a}{t^1}}{\frac{1}{t^1} - b};$$

partant,

$$\frac{1}{t^x . t^{1x^1}} = \frac{\left(c + \frac{a}{t^1}\right)^x}{t^{1x^1} . \left(\frac{1}{t^1} - b\right)^x}.$$

En développant par rapport aux puiſſances de $\frac{1}{t^1}$, le ſecond membre de cette équation, on auroit une ſuite infinie, ce qui donneroit y_{x,x^1} en ſuite infinie; pour obvier à cet inconvénient, nous mettrons l'équation précédente ſous cette forme,

$$\frac{1}{t^x . t^{1x^1}} = \frac{\left(\frac{1}{t^1} - b + b\right)^{x^1} . \left[c + ab + a\left(\frac{1}{t^1} - b\right)\right]^x}{\left(\frac{1}{t^1} - b\right)^x}.$$

Si l'on développe le ſecond membre de cette équation par rapport aux puiſſances de $\frac{1}{t^1} - b$, on aura

$$\frac{1}{t^x . t^{1x^1}} = \Big\{\left(\frac{1}{t^1} - b\right)^{x^1} + x^1 . b . \left(\frac{1}{t^1} - b\right)^{x^1-1}$$
$$+ \frac{x^1 . (x^1-1)}{1 . 2} . b^2 . \left(\frac{1}{t^1} - 1\right)^{x^1-2} + \&c.\Big\}$$
$$\times \Big\{a^x + x . (c + ab) . \frac{a^{x-1}}{\frac{1}{t^1} - b}$$
$$+ \frac{x . (x-1)}{1 . 2} . (c + ab)^2 . \frac{a^{x-2}}{\left(\frac{1}{t^1} - b\right)^2} + \&c.\Big\}$$

Soit

$$V = a^x;$$
$$V^{(1)} = x^1 . b . a^x + x . (c + ab) . a^{x-1};$$
$$V^{(2)} = \frac{x^1 . (x^1-1)}{1 . 2} . b^2 . a^x + x^1 . x . b . (c + ab) . a^{x-1} + \frac{x . (x-1)}{1 . 2} . (c + ab)^2 . a^{x-2}$$
$$V^{(3)} = \frac{x^1 . (x^1-1) . (x^1-2)}{1 . 2 . 3} . b^3 . a^x + \frac{x^1 . (x^1-1)}{1 . 2} . x . b^2 . (c + ab) . a^{x-1}$$
$$+ x^1 . \frac{x . (x-1)}{1 . 2} . b . (c + ab)^2 . a^{x-2} + \frac{x . (x-1) . (x-2)}{1 . 2 . 3} . (c + ab)^3 . a^{x-3};$$

&c.

on

on aura

$$\frac{u}{t^x . t'^{x'}} = u . \left\{ \begin{array}{l} V.(\frac{1}{t'} - b)^{x'} + V^{(1)} . (\frac{1}{t'} - b)^{x'-1} \\ + V^{(2)} . (\frac{1}{t'} - b)^{x'-2} \ldots\ldots + V^{(x')} \\ + \frac{V^{(x'+1)}}{\frac{1}{t'} - b} + \frac{V^{(x'+2)}}{(\frac{1}{t'} - b)^2} \ldots + \frac{V^{(x+x')}}{(\frac{1}{t'} - b)^x} \end{array} \right\}$$

or l'équation

$$\frac{1}{t . t'} - \frac{a}{t'} - \frac{b}{t} - c = 0,$$

donne

$$\frac{1}{\frac{1}{t'} - b} = \frac{\frac{1}{t} - a}{c + ab};$$

partant

$$\frac{u}{t^x . t'^{x'}} = u . \left\{ \begin{array}{l} V.(\frac{1}{t'} - b)^{x'} + V^{(1)} . (\frac{1}{t'} - b)^{x'-1} \ldots\ldots + V^{(x')} \\ + \frac{V^{(x'+1)}}{c + ab} . (\frac{1}{t} - a) + \frac{V^{(x'+2)}}{(c+ab)^2} . (\frac{1}{t} - a)^2 \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \frac{V^{(x+x')}}{(c+ab)^x} . (\frac{1}{t} - a)^x \end{array} \right\}$$

Pour repasser maintenant des fonctions génératrices à leurs variables correspondantes, nous observerons 1.° que le coëfficient de $t^0 . t'^0$ dans $\frac{u}{t^x . t'^{x'}}$, est $y_{x, x'}$; 2.° que ce même coëfficient dans un terme quelconque tel que $u . (\frac{1}{t'} - b)^r$ ou $u b^r . (\frac{1}{b t'} - 1)^r$, est égal à

$$b^r . \left\{ \frac{y_{0,r}}{b^r} - r . \frac{y_{0,r-1}}{b^{r-1}} + \frac{r . (r-1)}{1 . 2} . \frac{y_{0,r-2}}{b^{r-2}} - \&c. \right\}$$

& par conféquent égal à $b^{r} . {}'\Delta^{r} . (\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}})$, la caractériftique différentielle $'\Delta$ fe rapportant à la variabilité de x', & cette variable devant être fuppofée nulle après les différenciations ; 3.° que ce coëfficient dans $u . (\frac{1}{t} - a)^{r}$, eft $a^{r} . \Delta^{r} . (\frac{y_{x,0}}{a^{x}})$, la caractériftique Δ fe rapportant à la variabilité de x, & cette variable devant être fuppofée nulle après les différenciations; on aura donc avec cette condition,

$$ {}_{,x'} = V . b^{x'} . {}'\Delta^{x'} . (\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}) + V^{(1)} . b^{x'-1} . {}'\Delta^{x'-1} . (\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}) $$

$$ + V^{(2)} . b^{x'-2} . {}'\Delta^{x'-2} . (\frac{y_{0,x'}}{b^{x'}}) \ldots\ldots + V^{(x')} . y_{0,0} $$

$$ + \frac{V^{(x'+1)}}{c+ab} . a . \Delta . (\frac{y_{x,0}}{a^{x}}) + \frac{V^{(x'+2)}}{(c+ab)^{2}} . a^{2} . \Delta . (\frac{y_{x,0}}{a^{x}}) \ldots\ldots $$

$$ + \frac{V^{(x+x')}}{(c+ab)^{x}} . a^{x} . \Delta^{x} . (\frac{y_{x,0}}{a^{x}}) ; $$

ce fera l'intégrale complète de l'équation

$$ {}_{1,x'+1} - a . y_{x,x'+1} - b . y_{x+1,x'} - c . y_{x,x'} = 0 ; $$

& il eft vifible que cette intégrale fuppofe que l'on connoît le premier rang horizontal & le premier rang vertical de la *Table (Q)* de l'*article XVI.*

XXII.

POUR éclaircir par un exemple la méthode que nous avons donnée précédemment pour intégrer les équations aux différences finies partielles, fuppofons que l'on ait l'équation

$$ 0 = t . (\frac{1}{t} - 1)^{2} - t' . (\frac{1}{t'} - 1)^{2} , $$

on aura

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{2}.t^1 + \frac{1}{2t^1} \pm \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{t^1} - t^1\right).$$

Soit

$$\frac{1}{t^x} = Z + \frac{1}{t}.Z^{(1)},$$

Z & $Z^{(1)}$ étant des fonctions de t^1 & de x; on déterminera ces fonctions en substituant successivement dans l'équation précédente, au lieu de $\frac{1}{t}$, ses deux valeurs; ce qui donne

$$\left\{\frac{1}{2}t^1 + \frac{1}{2t^1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^1} - t^1\right)\right\}^x = Z + Z^{(1)}.\left\{\frac{1}{2t^1} + \frac{1}{2}t^1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^1} - t^1\right)\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}t^1 + \frac{1}{2t^1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^1} - t^1\right)\right\}^x = Z + Z^{(1)}.\left\{\frac{1}{2t^1} + \frac{1}{2}t^1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^1} - t^1\right)\right\}$$

d'où il est aisé de conclure

$$Z = \frac{\frac{1}{t^{1^{x-2}}} - t^{1^x}}{t^{1^2} - 1},$$

$$Z^{(1)} = \frac{\frac{1}{t^{1^x}} - t^{1^x}}{\frac{1}{t^1} - t^1};$$

partant

$$\frac{u}{t^x} = u.\frac{\left(\frac{1}{t^{1^{x-2}}} - t^{1^x}\right)}{t^{1^2} - 1} + \frac{u}{t}.\frac{\left(\frac{1}{t^{1^x}} - t^{1^x}\right)}{\frac{1}{t^1} - t^1}.$$

Présentement le coëfficient de $t^0.t^{1^{x'}}$ dans $\frac{u}{t^x}$, est $y_{x,x'}$; & si l'on désigne par $\top.\lambda_x$ & $\Pi.\lambda_{x'}$, les coëfficiens de t^x dans le développement des fonctions $\frac{v}{t^1 - 1}$ & $\frac{v}{\frac{1}{t} - 1}$,

v étant égal à la ſuite infinie, $\lambda_0 + \lambda_1 . t + \lambda_2 . t^2 +$ &c. on aura 1.° $\rceil . y_{0,x+x'-2}$ pour le coëfficient de $t^0 . t'^{x'}$ dans $\frac{u}{t'^{x-2} . (t'^2 - 1)}$; 2.° $\rceil . y_{0,x'-x}$ pour ce coëfficient dans $\frac{u\, t'^{x}}{t'^2 - 1}$; 3.° $\Pi . y_{1,x+x'}$ pour ce coëfficient dans $\frac{\frac{u}{t} . \frac{1}{t'^{x}}}{\frac{1}{t'} - t'}$; 4.° $\Pi . y_{1,x'-x}$ pour ce coëfficient dans $\frac{\frac{u}{t} . t'^{x}}{\frac{1}{t'} - t'}$; on aura donc

$$y_{x,x'} = \rceil . y_{0,x+x'-2} - \rceil . y_{0,x'-x} + \Pi . y_{1,x+x'} - \Pi . y_{1,x'-x};$$

& ſi l'on repréſente $\rceil . y_{0,x+x'-2} + \Pi . y_{1,x+x'}$ par $\varphi(x + x')$, & $- \rceil . y_{0,x'-x} - \Pi . y_{1,x'-x}$ par $\psi(x' - x)$, $\varphi(x)$ & $\psi(x)$ étant deux fonctions arbitraires de x, on aura

$$y_{x,x'} = \varphi . (x + x') + \psi . (x' - x).$$

Cela poſé, ſi l'on multiplie l'équation $0 = t . (\frac{1}{t} - 1)^2 - t' . (\frac{1}{t'} - 1)^2$ par u, & que l'on repaſſe des fonctions génératrices à leurs variables correſpondantes, on aura l'équation aux différences partielles,

$$y_{x+1,x'} - 2 y_{x,x'} + y_{x-1,x'} = y_{x,x'+1} - 2 y_{x,x'} + y_{x,x'-1};$$

ſon intégrale complète ſera par conſéquent

$$y_{x,x'} = \varphi(x + x') + \psi(x' - x),$$

ce qui eſt viſible d'ailleurs par la ſimple ſubſtitution, mais

j'ai cru que l'on ne feroit pas fâché de voir comment cette intégrale se déduit des méthodes précédentes.

Supposons maintenant que dans la Table suivante,

$$\begin{array}{l}
y_{0,0},\ y_{1,0},\ y_{2,0},\ y_{3,0},\ y_{4,0}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y_{n-1,0},\ y_{n,0}\\
y_{0,1},\ y_{1,1},\ y_{2,1},\ y_{3,1},\ y_{4,1}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y_{n-1,1},\ y_{n,1}\\
y_{0,2},\ y_{1,2},\ y_{2,2},\ y_{3,2},\ y_{4,2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y_{n-1,2},\ y_{n,2}\\
y_{0,3},\ y_{1,3},\ y_{2,3},\ y_{3,3},\ y_{4,3}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y_{n-1,3},\ y_{n,3};\ (Z)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\&c.\\
y_{0,\infty},\ y_{1,\infty},\ y_{2,\infty},\ y_{3,\infty},\ y_{4,\infty}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ y_{n-1,\infty},\ y_{n,\infty}
\end{array}$$

on connoisse les deux premiers rangs horizontaux compris entre les deux colonnes verticales extrêmes,

$$\begin{array}{l}
y_{0,0},\ y_{0,1},\ y_{0,2}\ \ldots\ldots\ y_{0,\infty},\\
y_{n,0},\ y_{n,1},\ y_{n,2}\ \ldots\ldots\ y_{n,\infty},
\end{array}$$

& que l'on connoisse de plus tous les termes de ces deux colonnes; on pourra déterminer toutes les valeurs de $y_{x,x'}$, qui tombent entre ces deux colonnes; car si l'on veut former le troisième rang horizontal, on reprendra l'équation

$$y_{x+1,x'} - 2y_{x,x'} + y_{x-1,x'} = y_{x,x'+1} - 2y_{x,x'} + y_{x,x'-1};$$

qui se réduit à

$$y_{x,x'+1} = y_{x+1,x'} + y_{x-1,x'} - y_{x,x'-1};$$

en y faisant $x' = 1$, & successivement $x = 1$, $x = 2$, $x = 3 \ldots\ldots x = n - 1$, on aura

$$\begin{array}{l}
y_{1,2} = y_{2,1} + y_{0,1} - y_{1,0}\\
y_{2,2} = y_{3,1} + y_{1,1} - y_{2,0}\\
y_{3,2} = y_{4,1} + y_{2,1} - y_{3,0}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{n-1,2} = y_{n,1} + y_{n-2,1} - y_{n-1,0}\ \&c.
\end{array}$$

on formera de la même manière le quatrième rang horizontal, & ainsi de suite à l'infini; mais si l'on vouloit déterminer les valeurs de $y_{x,x'}$ qui tombent hors de la Table (Z), les conditions précédentes ne suffiroient pas, & il seroit nécessaire d'y en joindre d'autres.

Cherchons présentement l'expression de $y_{x,x'}$; pour cela, reprenons l'intégrale

$$y_{x,x'} = \varphi(x' + x) + \psi(x' - x), \ldots\ldots$$

& supposons que le second rang horizontal qui détermine une des deux fonctions arbitraires, soit tel que l'on ait $\psi(x' - x) = \varphi(x - x')$, on aura

$$y_{x,x'} = \varphi(x' + x) + \varphi(x - x');$$

en faisant $x' = 0$, on aura $\varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot y_{x,0}$; partant

$$y_{x,x'} = \tfrac{1}{2} \cdot y_{x+x',0} + \tfrac{1}{2} \cdot y_{x-x',0}.$$

Il est aisé de voir que cette équation satisfait à l'équation proposée aux différences partielles; mais elle n'est qu'une intégrale particulière qui répond au cas où le second rang horizontal se forme du premier, au moyen de l'équation

$$y_{x,1} = \tfrac{1}{2} \cdot y_{x+1,0} + \tfrac{1}{2} \cdot y_{x-1,0}.$$

Tant que $x + x'$ sera égal ou moindre que n, & que $x - x'$ sera positif ou nul, on aura la valeur de $y_{x,x'}$ au moyen du premier rang horizontal; mais lorsque x' croissant, $x + x'$ deviendra plus grand que n, & que $x - x'$ deviendra négatif, il faudra déterminer les valeurs de $y_{x+x',0}$ & de $y_{x-x',0}$, au moyen des colonnes verticales extrêmes. Supposons que tous les termes de ces deux colonnes soient zéro, & qu'ainsi l'on ait $y_{0,x'} = 0$ & $y_{n,x'} = 0$; en faisant $x = 0$ dans l'équation. . . . .

$$y_{0,x'} = \tfrac{1}{2} \cdot y_{x'+x',0} + \tfrac{1}{2} \cdot y_{x-x',0}$$

on aura

$$y_{-x',0} = -y_{x',0};$$

en y faisant ensuite $x = n$, on aura

$$y_{n+x',0} = -y_{n-x',0}.$$

Si l'on change dans cette dernière équation, x' en $n + x'$, on aura

$$y_{2n+x',0} = -y_{-x',0} = y_{x',0};$$

en changeant encore x' en $n + x'$, on aura

$$y_{3n+x',0} = y_{n+x',0} = -y_{n-x',0};$$

d'où l'on tire généralement

$$y_{2rn+x',0} = y_{x',0},$$

&

$$y_{(2r+1).n+x',0} = -y_{n-x',0}.$$

On pourra ainsi, au moyen de ces deux équations, continuer les valeurs de $y_{x,0}$ à l'infini, du côté des valeurs positives de x, & l'on en conclura celles qui répondent à x négatif, au moyen de l'équation $y_{-x',0} = -y_{x',0}$; de-là résulte la construction suivante.

Si l'on représente les valeurs de $y_{x,0}$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, par les ordonnées des angles d'un polygone dont l'abscisse soit x, & dont les deux extrémités A & B aboutissent aux points où $x = 0$ & $x = n$; on portera ce polygone depuis $x = n$ jusqu'à $x = 2n$, en lui donnant une position contraire à celle qu'il avoit depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, c'est-à-dire une position telle que les parties qui étoient au-dessus de l'axe des abscisses se trouvent au-dessous, le point B du polygone restant d'ailleurs dans cette seconde position à la même place que dans la première, & le point A répondant ainsi à l'abscisse $x = 2n$; on placera ensuite ce même polygone depuis $x = 2n$ jusqu'à $x = 3n$, en lui donnant une position contraire à la seconde, &

par conséquent semblable à la première, de manière que le point A conserve dans cette troisième position, la même place que dans la seconde, & qu'ainsi le point B réponde à l'abscisse $x = 3n$; en continuant de placer ainsi ce polygone alternativement au-dessus & au-dessous de l'axe des abscisses, les ordonnées menées aux angles de ces polygones seront les valeurs de $y_{x,0}$ qui répondent à x positif.

Pareillement, on placera ce polygone depuis $x = 0$ jusqu'à $x = -n$, en lui donnant une position contraire à celle qu'il avoit depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, le point A restant d'ailleurs dans cette seconde position, à la même place que dans la première; on placera ensuite ce polygone depuis $x = -n$ jusqu'à $x = -2n$, en lui donnant une position contraire à la seconde, le point B restant d'ailleurs à la même place, & ainsi de suite à l'infini. Les ordonnées de ces polygones représenteront les valeurs de $y_{x,0}$ qui répondent à x négatif; on aura ensuite la valeur de $y_{x,x'}$, en prenant la moitié de la somme des deux ordonnées qui répondent aux abscisses $x + x'$ & $x - x'$.

Cette construction géométrique est générale, quelle que soit la nature du polygone que nous venons de considérer; elle servira à déterminer toutes les valeurs de $y_{x,x'}$, comprises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, & depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = \infty$, pourvu que l'on ait $y_{0,x'} = 0$ & $y_{n,x'} = 0$, & que d'ailleurs le second rang horizontal de la Table (Z), soit tel que l'on ait

$$y_{x,1} = \tfrac{1}{2} \cdot y_{x+1,0} + \tfrac{1}{2} \cdot y_{x-1,0},$$

ou ce qui revient au même,

$$y_{x,1} - y_{x,0} = \tfrac{1}{2} \cdot \{y_{x+1,0} - 2y_{x,0} + y_{x-1,0}\}.$$

On peut au reste s'assurer facilement de la vérité des résultats précédens dans des exemples particuliers, en donnant à n des valeurs particulières, en prenant ensuite des nombres à volonté pour former le premier rang horizontal de la Table (Z), & en formant le second rang au moyen

de

de l'équation $y_{x,1} = \frac{1}{2} \cdot y_{x+x',0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-x',0}$; enfin, en supposant généralement $y_{0,x'} = 0$, & $y_{n,x'} = 0$; car, si au moyen de ces conditions & de l'équation proposée aux différences partielles,

$$y_{x,x'+1} = y_{x+1,x'} + y_{x-1,x'} - y_{x,x'-1},$$

on forme les autres rangs horizontaux de la Table (Z), on trouvera qu'ils seront les mêmes que ceux qui résultent de la construction précédente.

On a, par ce qui précède,

$$y_{x,x'+n} = \frac{1}{2} \cdot y_{x+x'+n,0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-n-x',0}.$$

De plus, $\quad y_{x+x'+n,0} = -y_{n-x-x',0}$,

& $\quad y_{x-n-x',0} = -y_{n+x'-x,0}$;

donc

$$y_{x,x'+n} = -\frac{1}{2} \cdot y_{n-x-x',0} - \frac{1}{2} \cdot y_{n-x+x',0} = -y_{n-x,x'}.$$

Il suit de-là que dans la Table (Z), le $(x'+n)^{\text{ième}}$ rang horizontal est le $x'^{\text{ième}}$ rang horizontal, pris avec un signe contraire & dans un ordre renversé, c'est-à-dire que le terme $r^{\text{ième}}$ du rang $(x'+n)^{\text{ième}}$ est le terme $(n-r)^{\text{ième}}$ du $x'^{\text{ième}}$ rang, pris avec un signe contraire.

On a ensuite

$$y_{x,x'+2n} = \frac{1}{2} \cdot y_{2n+x+x',0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-x'-2n,0};$$

on a d'ailleurs

$$y_{2n+x+x',0} = y_{x+x',0},$$

& $y_{x-x'-2n,0} = -y_{2n+x'-x,0} = -y_{x'-x,0} = y_{x-x',0}$;

partant

$$y_{x,x'+2n} = \frac{1}{2} \cdot y_{x+x',0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-x',0} = y_{x,x'};$$

d'où il suit que le $(x'+2n)^{\text{ième}}$ rang horizontal est exactement égal au $x'^{\text{ième}}$ rang.

Considérons présentement les vibrations d'une corde dont la figure initiale soit quelconque, mais fort peu éloignée de l'axe des abscisses; nommons x l'abscisse; t le temps; $y_{x,t}$ l'ordonnée d'un point quelconque de la corde après le temps t; concevons de plus l'abscisse x partagée dans une infinité de petites parties égales à ∂x, & que nous prendrons pour l'unité. Cela posé, on aura par les principes connus de Dynamique,

$$\left(\frac{\partial\partial . y_{x,t}}{\partial t^2}\right) = \frac{a^2}{\partial x^2} \cdot (y_{x+1,t} - 2y_{x,t} + y_{x-1,t}),$$

a étant un coëfficient constant dépendant de la tension & de la grosseur de la corde. Si l'on fait $t = \frac{x'}{a}$, on aura $\partial t = \frac{\partial x'}{a}$, & $y_{x,t}$ deviendra une fonction de x & de x', que nous désignerons par $y_{x,x'}$; or la grandeur de ∂t étant arbitraire, on peut la supposer telle que la variation de x' soit égale à celle de x, que nous avons prise pour l'unité; l'équation précédente deviendra ainsi

$$y_{x,x'+1} - 2y_{x,x'} + y_{x,x'-1} = y_{x+1,x'} - 2y_{x,x'} + y_{x-1,x'};$$

x & x' étant des nombres infinis. Cette équation est la même que nous venons de considérer; ainsi la construction géométrique que nous avons donnée, au moyen du polygone qui représente la valeur de $y_{x,0}$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, peut être employée dans ce cas : le polygone sera ici la courbe initiale de la corde; mais pour cela, il faut supposer n égal à la longueur de la corde, & la concevoir partagée dans une infinité de parties; il faut de plus que la corde soit fixe à ses deux extrémités, afin que l'on ait $y_{0,x'} = 0$, & $y_{n,x'} = 0$; d'ailleurs, l'équation de condition

$$y_{x,1} - y_{x,0} = \tfrac{1}{2} \cdot (y_{x+1,0} - 2y_{x,0} + y_{x-1,0})$$

se change dans celle-ci,

$$\partial t \cdot \left(\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t}\right) = \frac{1}{2} \cdot \partial x^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \cdot y_{x,0}}{\partial x^2}\right),$$

ce qui donne $\left(\frac{\partial \cdot y_{x,0}}{\partial t}\right) = 0$; or $\left(\frac{\partial \cdot y_{x,0}}{\partial t}\right)$ eſt la vîteſſe initiale de la corde; cette vîteſſe doit donc être nulle à l'origine du mouvement. Toutes les fois que ces conditions auront lieu, la conſtruction précédente donnera toujours le mouvement de la corde, quelle que ſoit d'ailleurs ſa figure initiale, pourvu cependant que dans tous ſes points $y_{x+2,0} - 2y_{x+1,0} + y_{x,0}$ ſoit infiniment petit du ſecond ordre, c'eſt-à-dire que deux côtés contigus de la courbe ne forment point entr'eux un angle fini. Cette condition eſt néceſſaire pour que l'équation différentielle du Problème puiſſe ſubſiſter, & pour que celle-ci

$$\left(\frac{\partial \cdot y_{x,0}}{\partial t}\right) \cdot \partial t = \frac{1}{2} \cdot (y_{x+1,0} - 2y_{x,0} + y_{x-1,0})$$

donne $\left(\frac{\partial \cdot y_{x,0}}{\partial t}\right) = 0$; mais d'ailleurs il eſt évident par ce qui précède, que la figure initiale de la corde peut être diſcontinue & compoſée d'un nombre quelconque d'arcs de cercle, ou de portions de courbe qui ſe touchent.

On voit aiſément que toutes les différentes ſituations de la corde répondent aux rangs horizontaux de la Table *(Z)*, & comme les rangs qui correſpondent aux valeurs de x', $x' + 2n$, $x' + 4n$, &c. ſont les mêmes par ce qui précède, il en réſulte que la corde reviendra à la même ſituation après les temps t, $t + \frac{2n}{a}$, $t + \frac{4n}{a}$, &c. n étant toujours la longueur totale de la corde.

Cette analyſe des cordes vibrantes établit, ſi je ne me trompe, d'une manière inconteſtable la poſſibilité d'admettre des fonctions diſcontinues dans ce Problème; & il me paroît que l'on en peut généralement conclure que ces fonctions

peuvent être employées dans tous les Problèmes qui se rapportent aux différences partielles, pourvu qu'elles puissent subsister avec les équations différentielles & avec les conditions du Problème. On peut considérer en effet toute équation aux différences partielles infiniment petites, comme un cas particulier d'une équation aux différences partielles finies, dans laquelle on suppose que les variables deviennent infinies : or rien n'étant négligé dans la théorie des équations aux différences finies, il est visible que les fonctions arbitraires de leurs intégrales ne sont point assujetties à la loi de continuité, & que les constructions de ces équations par le moyen des polygones, ont lieu quelle que soit la nature de ces polygones. Maintenant lorsqu'on passe du fini à l'infiniment petit, ces polygones se changent dans des courbes qui par conséquent peuvent être discontinues : ainsi la loi de continuité ne paroît nécessaire ni dans les fonctions arbitraires des intégrales des équations aux différences partielles infiniment petites, ni dans les constructions géométriques qui représentent ces intégrales ; il faut seulement observer que si l'équation différentielle est de l'ordre n, & que l'on nomme u sa variable principale, x & t étant les deux autres variables, il ne doit point y avoir de saut entre deux valeurs consécutives de $\left(\frac{\partial^{n-1}.u}{\partial x^r.\partial t^{n-r-1}}\right)$, c'est-à-dire que la différence de cette quantité doit être infiniment petite par rapport à cette quantité elle-même. Cette condition est nécessaire pour que l'équation différentielle proposée puisse subsister, parce que toute équation différentielle suppose que les différences de u dont elle est composée, divisées par les puissances respectives de ∂x & de ∂t, sont des quantités finies & comparables entr'elles ; mais rien n'oblige d'admettre la condition précédente, relativement aux différences de u de l'ordre n ou d'un ordre supérieur : on doit donc assujettir les fonctions arbitraires de l'intégrale, à ce qu'il n'y ait point de saut entre deux valeurs consécutives d'une différence de ces fonctions moindre que n, & les courbes qui les représentent doivent être assujetties à une condition semblable, en

ſorte qu'il ne doit point y avoir de ſaut entre deux tangentes conſécutives, ſi l'équation eſt différentielle du ſecond ordre; ou entre deux rayons oſculateurs conſécutifs, ſi elle eſt différentielle du troiſième ordre, & ainſi de ſuite. Par exemple, dans le Problème des cordes vibrantes que nous venons d'analyſer, & qui conduit à une équation différentielle du ſecond ordre, il eſt néceſſaire que les courbes dont on fait uſage pour le conſtruire, ſoient telles que deux côtés contigus ne forment point entr'eux un angle fini: or c'eſt ce qui aura lieu dans la conſtruction que nous avons donnée, ſi la figure initiale de la corde eſt telle que cette condition ſoit remplie; car en la poſant alternativement au-deſſus & au-deſſous de l'axe des abſciſſes, comme nous l'avons preſcrit, la courbe infinie qui en réſulte ſatisfait dans toute ſon étendue à la même condition.

Le ſeul cas qui ſemble faire exception à ce que nous venons de dire, eſt celui dans lequel l'intégrale renferme les fonctions arbitraires & leurs différences; car en la ſubſtituant dans l'équation différentielle pour y ſatisfaire, on y introduit les différences des fonctions arbitraires d'un ordre ſupérieur à n, ce qui ſuppoſe que la loi de continuité s'étend au-delà des différences de l'ordre $n - 1$; mais on doit alors conſidérer comme les véritables fonctions arbitraires de l'intégrale, les différences les plus élevées de ces fonctions, & regarder toutes les différences inférieures comme leurs intégrales ſucceſſives, moyennant quoi la règle donnée précédemment ſur la continuité des fonctions arbitraires & de leurs différences, ſubſiſtera dans ſon entier. On peut même la préſenter d'une manière plus ſimple, en obſervant qu'il n'y a point de ſaut entre deux valeurs conſécutives de l'intégrale d'une fonction quelconque arbitraire & diſcontinue; car en nommant $\varphi(s)$ cette fonction, deux valeurs conſécutives de ſon intégrale $\int \partial s \,.\, \varphi(s)$ ne diffèrent entr'elles que de la quantité $\partial s \,.\, \varphi(s)$, qui ſeroit toujours infiniment petite, quand même il y auroit un ſaut entre deux valeurs conſécutives de $\varphi(s)$. La règle précédente peut donc ſe

réduire à la suivante. *Si l'intégrale d'une équation aux différences partielles de l'ordre* n, *renferme la différence* $r^{ième}$ *d'une fonction arbitraire de* s, *on pourra, au lieu de la différence* $(n + r)^{ième}$ *de cette fonction divisée par* ds^{n+r}, *employer une fonction quelconque discontinue de* s.

Lorsque dans le problème des cordes vibrantes, la figure initiale de la corde est telle que deux de ses côtés contigus forment un angle fini, par exemple, lorsqu'elle est formée par la réunion de deux lignes droites, il me semble que géométriquement la solution précédente ne peut être admise; mais si l'on considère physiquement ce Problème & tous les autres de ce genre, tels que celui du son, il paroît que l'on peut appliquer la construction que nous avons donnée, même au cas où la corde seroit formée du système de plusieurs lignes droites; car on voit *a priori* que son mouvement doit très-peu différer de celui qu'elle prendroit, en supposant qu'aux points où ces lignes se rencontrent, il y ait des petites courbes qui permettent d'employer cette construction.

XXIII.

On peut encore appliquer le calcul des fonctions *génératrices*, à l'intégration des équations aux différences partielles, en partie finies, & en partie infiniment petites; pour cela, considérons l'équation

$$0 = a y_{x,x'} + b . \Delta . y_{x,x'} - \left(\frac{\partial . y_{x,x'}}{\partial x'}\right),$$

la caractéristique finie Δ se rapportant à la variable x, dont la différence est l'unité, & la caractéristique ∂ se rapportant à la variable x', dont la différence est conséquemment $\partial x'$.

L'équation génératrice de la précédente est

$$0 = a + b . \left(\frac{1}{t} - 1\right) - \frac{1}{\partial x'} . \left(\frac{1}{t^{\partial x'}} - 1\right);$$

d'où l'on tire à l'infiniment petit près,

$$\frac{1}{t^x} = \frac{1}{(b\partial x')^x} \cdot \left\{ \frac{1}{t'^{\partial x'} \cdot (1 + a\partial x' - b\partial x')} - 1 \right\}^x.$$

Or si l'on nomme $y_{x,x'}$ le coëfficient de $t^x \cdot t'^{x'}$ dans u, le coëfficient de $t^0 \cdot t'^{x'}$ dans $\frac{u}{t^x}$, sera $y_{x,x'}$; ce même coëfficient dans $u \cdot \left\{ \frac{1}{t'^{\partial x'} \cdot (1 + a\partial x' - b\partial x')} - 1 \right\}^x$, sera

$$(1+a\partial x'-b\partial x')^{\frac{x'}{\partial x'}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y_{0,\,x'+x\partial x'}}{(1+a\partial x'-b\partial x')^{\frac{x'}{\partial x'}+x}} - x \cdot \dfrac{y_{0,\,x'+(x-1).\partial x'}}{(1+a\partial x'-b\partial x')^{\frac{x'}{\partial x'}+x-1}} \\ + \dfrac{x.(x-1)}{1.2} \cdot \dfrac{y_{0,\,x'+(x-2).\partial x'}}{(1+a\partial x'-b\partial x')^{\frac{x'}{\partial x'}+x-2}} - \&c. \end{array} \right\}$$

$$= (1 + a\partial x' - b\partial x')^{\frac{x'}{\partial x'}} \cdot \partial^x \cdot \left\{ \frac{y_{0,x'}}{(1 + a\partial x' - b\partial x')^{\frac{x'}{\partial x'}}} \right\}$$

or on a

$$(1 + a\partial x' - b\partial x')^{\frac{x'}{\partial x'}} = e^{(a-b).x'},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; le coëfficient de $t^0 \cdot t'^{x'}$ dans $u \cdot \left\{ \frac{1}{t'^{\partial x'} \cdot (1 + a\partial x' - b\partial x')} - 1 \right\}^x$, sera donc $e^{(a-b).x'} \cdot \partial^x \cdot \{y_{0,x'} \cdot e^{(b-a).x'}\}$; partant on aura

$$y_{x,x'} = \frac{e^{(a-b).x'}}{b^x} \cdot \frac{\partial^x \cdot e^{(b-a).x'} \cdot y_{0,x'}}{(\partial x')^x};$$

ou plus simplement,

$$y_{x,x'} = \frac{e^{(a-b).x'}}{b^x} \cdot \frac{\partial^x \cdot \varphi(x')}{(\partial x')^x};$$

$\varphi(x')$ étant une fonction arbitraire de x',

On peut intégrer par le même procédé, l'équation générale

$$0 = \Delta^n . y_{x,x'} + a . \Delta^{n-1} . \left(\frac{\partial . y_{x,x'}}{\partial x'}\right) + b . \Delta^{n-2} . \left(\frac{\partial^2 . y_{x,x'}}{\partial x'^2}\right) + \&c.$$

son équation génératrice est

$$0 = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n + \frac{a}{\partial x'} . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1} . \left(\frac{1}{t'^{\partial x'}} - 1\right) + \frac{b}{\partial x'^2} . \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{n-1} . \left(\frac{1}{t'^{\partial x'}} - 1\right)^2 + \&c.$$

en nommant donc α, α', α'' les n racines de l'équation

$$0 = v^n + a . v^{n-1} + b . v^{n-2} + c . v^{n-3} + \&c.$$

on aura les n équations partielles,

$$\frac{1}{t} = 1 + \frac{\alpha}{\partial x'} . \left(\frac{1}{t'^{\partial x'}} - 1\right),$$

$$\frac{1}{t} = 1 + \frac{\alpha'}{\partial x'} . \left(\frac{1}{t'^{\partial x'}} - 1\right),$$

&c.

la première donne

$$\frac{1}{t^x} = \frac{\alpha^x}{(\partial x')^x} . \left\{\frac{1}{t'^{\partial x'} . \left(1 - \frac{\partial x'}{\alpha}\right)} - 1\right\}^x$$

or le coëfficient de $t^0 . t'^{x'}$ dans $\frac{u}{t^x}$, est $y_{x,x'}$; ce même coëfficient dans $u . \left\{\frac{1}{t'^{\partial x'} . \left(1 - \frac{\partial x'}{\alpha}\right)} - 1\right\}^x$, est

$$\left(1-\frac{\partial x^1}{\alpha}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y_{0,\,x^1+x\,.\,\partial x^1}}{\left(1-\frac{\partial x^1}{\alpha}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}+x}} - x \cdot \dfrac{y_{0,\,x^1+(x-1)\,.\,\partial x^1}}{\left(1-\frac{\partial x^1}{\alpha}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}+x-1}} \\ + \dfrac{x\,.\,(x-1)}{1\,.\,2} \cdot \dfrac{y_{0,\,x^1+(x-2)\,.\,\partial x^1}}{\left(1-\frac{\partial x^1}{\alpha}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}+x-2}} - \&c. \end{array} \right\}$$

$$= \left(1-\frac{\partial x^1}{\alpha}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}} \cdot \partial^x \cdot \frac{y_{0,\,x^1}}{\left(1-\frac{\partial x^1}{\alpha}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}}} = e^{-\frac{x^1}{\alpha}} \cdot \partial^x \cdot y_{0,\,x^1} \cdot e^{\frac{x^1}{\alpha}};$$

parce que $\left(1-\frac{\partial x^1}{\alpha}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}} = e^{-\frac{x^1}{\alpha}}$; on aura donc

$$y_{x,\,x^1} = \alpha^x \cdot e^{-\frac{x^1}{\alpha}} \cdot \frac{\partial^x \cdot y_{0,\,x^1} \cdot e^{\frac{x^1}{\alpha}}}{(\partial x^1)^x},$$

ou plus simplement

$$y_{x,\,x^1} = \alpha^x \cdot e^{-\frac{x^1}{\alpha}} \cdot \frac{\partial^x \cdot \varphi(x^1)}{(\partial x^1)^x},$$

$\varphi(x^1)$ étant une fonction arbitraire de x^1.

Il suit de-là, que si l'on désigne par $\varphi^{1}(x^1)$, $\varphi^{11}(x^1)$, $\varphi^{111}(x^1)$, &c. d'autres fonctions arbitraires de x^1, l'expression complète de y_x sera

$$\begin{aligned} y_{x,\,x^1} = {} & \alpha^x \cdot e^{-\frac{x^1}{\alpha}} \cdot \frac{\partial^x \cdot \varphi(x^1)}{(\partial x^1)^x} \\ & + \alpha^{1x} \cdot e^{-\frac{x^1}{\alpha^1}} \cdot \frac{\partial^x \cdot \varphi^1(x^1)}{(\partial x^1)^x} \\ & + \alpha^{11x} \cdot e^{-\frac{x^1}{\alpha^{11}}} \cdot \frac{\partial^x \cdot \varphi^{11}(x^1)}{(\partial x^1)} \\ & + \&c. \end{aligned}$$

XXIV.

Théorèmes sur le développement des fonctions à deux variables, en séries.

Si l'on applique aux fonctions à deux variables, la méthode exposée dans les *articles X* & *XI*, on aura sur le développement de ces fonctions en séries, des théorèmes analogues à ceux auxquels nous sommes parvenus dans ces deux articles. Supposons que u soit égal à la suite infinie

$$\begin{array}{l} y_{0,0} + y_{1,0}.t + y_{2,0}.t^2 + y_{3,0}.t^3 + \&c. \\ \quad + y_{0,1}.t' + y_{1,1}.t'.t + y_{2,1}.t'.t^2 + \&c. \\ \qquad + \&c. \end{array}$$

& que l'on désigne par la caractéristique Δ la différence finie de $y_{x,x'}$, prise en faisant varier à la fois x & x', la fonction génératrice de $\Delta.y_{x,x'}$ sera $u.(\frac{1}{t.t'} - 1)$; d'où il suit, que la fonction génératrice de $\Delta^n.y_{x,x'}$ sera $u.(\frac{1}{t.t'} - 1)^n$; or on a $\frac{1}{t.t'} - 1 = (1 + \frac{1}{t} - 1).(1 + \frac{1}{t'} - 1) - 1$; ce qui donne

$$u.(\frac{1}{t.t'} - 1)^n = u.\{(1 + \frac{1}{t} - 1).(1 + \frac{1}{t'} - 1) - 1\}^n;$$

partant, si l'on désigne par la caractéristique Δ' la différence finie de $y_{x,x'}$, prise en ne faisant varier que x, & par la caractéristique Δ'', cette différence prise en ne faisant varier que x', on aura, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$\Delta^n.y_{x,x'} = \{(1 + \Delta'.y_{x,x'}).(1 + \Delta''.y_{x,x'}) - 1\}^n,$$

pourvu que dans le développement du second membre de cette équation, on applique aux caractéristiques Δ' & Δ'' les exposans des puissances de $\Delta'.y_{x,x'}$ & de $\Delta''.y_{x,x'}$.

En changeant n en $-n$, on s'aſſurera facilement par un raiſonnement analogue à celui de l'*article X*, que l'équation précédente deviendra

$$\Sigma^n . y_{x,x^1} = \frac{1}{[(1 + \Delta^1 . y_{x,x^1}).(1 + \Delta^{11} . y_{x,x^1}) - 1]^n},$$

pourvu que dans le développement du ſecond membre de cette équation, on change les différences négatives en intégrales.

Il eſt clair que $u.(\frac{1}{t^i . t^{1 i^1}} - 1)^n$ eſt la fonction généra-trice de la différence finie $n^{ième}$ de y_{x,x^1}, lorſque x varie de i & que x^1 varie de i^1; or on a

$$u.(\frac{1}{t^i . t^{1 i^1}} - 1)^n = u.\{(1 + \frac{1}{t} - 1)^i . (1 + \frac{1}{t^1} - 1)^{i^1} - 1\}^n;$$

donc, ſi l'on déſigne par la caractériſtique $'\Delta$ les différences finies, & par la caractériſtique $'\Sigma$ les intégrales finies, lorſque x varie de i & que x^1 varie de i^1, on aura, en repaſſant des fonctions génératrices aux variables correſpondantes,

$$'\Delta^n . y_{x,x^1} = \{(1 + \Delta^1 . y_{x,x^1})^i . (1 + \Delta^{11} . y_{x,x^1})^{i^1} - 1\}^n,$$

$$'\Sigma^n . y_{x,x^1} = \frac{1}{[(1 + \Delta^1 . y_{x,x^1})^i . (1 + \Delta^{11} . y_{x,x^1})^{i^1} - 1]^n},$$

pourvu que dans le développement des ſeconds membres de ces équations, on applique aux caractériſtiques Δ^1 & Δ^{11} les expoſans des puiſſances de $\Delta^1 . y_{x,x^1}$ & de $\Delta^{11} . y_{x,x^1}$, & que l'on change les différences négatives en intégrales.

Les deux équations précédentes ont encore lieu, en ſuppoſant que dans les différences $\Delta^1 . y_{x,x^1}$ & $\Delta^{11} . y_{x,x^1}$, x & x^1, au lieu de varier de l'unité, varient d'une quantité quelconque ϖ; on doit ſeulement obſerver que dans la différence $'\Delta . y_{x,x^1}$, x variera de $i\varpi$, & x^1 variera de $i^1\varpi$; or ſi l'on ſuppoſe ϖ infiniment petit, les différences $\Delta^1 . y_{x,x^1}$ & $\Delta^{11} . y_{x,x^1}$ ſe changeront, la première dans $\partial x . (\frac{\partial . y_{x,x^1}}{\partial x})$, & la ſeconde

dans $\partial x' . (\frac{\partial . y_{x,x'}}{\partial x'})$; de plus, si l'on fait i & i' infiniment grands, & que l'on suppose $i \partial x = \alpha$, & $i' \partial x' = \alpha'$, on aura

$$(1 + \Delta' . y_{x,x'})^i = \{1 + \partial x . (\frac{\partial . y_{x,x'}}{\partial x})\}^{\frac{\alpha}{\partial x}} = e^{\alpha . (\frac{\partial . y_{x,x'}}{\partial x})},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; on aura pareillement

$$(1 + \Delta'' . y_{x,x'})^{i'} = e^{\alpha' . (\frac{\partial . y_{x,x'}}{\partial x'})},$$

partant

$$\Delta^n . y_{x,x'} = \left\{ e^{\alpha . (\frac{\partial . y_{x,x'}}{\partial x}) + \alpha' . (\frac{\partial . y_{x,x'}}{\partial x'})} - 1 \right\}^n$$

$$\Sigma^n . y_{x,x'} = \frac{1}{\left\{ e^{\alpha . (\frac{\partial . y_{x,x'}}{\partial x}) + \alpha' . (\frac{\partial . y_{x,x'}}{\partial x'})} - 1 \right\}^n}$$

x variant de α, & x' variant de α' dans les deux premiers membres de ces équations.

Si au lieu de supposer ϖ infiniment petit, on le suppose fini, & i infiniment petit & égal à ∂x; si l'on suppose de plus i' infiniment petit & égal à $\partial x'$, on aura

$$(1 + \Delta' . y_{x,x'})^i = (1 + \Delta' . y_{x,x'})^{\partial x} = 1 + \partial x . \log. (1 + \Delta . y_{x,x'});$$

on aura pareillement

$$(1 + \Delta'' . y_{x,x'})^{i'} = 1 + \partial x' . \log. (1 + \Delta . y_{x,x'});$$

d'ailleurs $\Delta^n . y_{x,x'}$ se change en $\partial^n . y_{x,x'}$; partant

$$\partial^n . y_{x,x'} = \{[1 + \partial x . \log. (1 + \Delta' . y_{x,x'})] . [1 + \partial x' . \log. (1 + \Delta'' . y_{x,x'})] - 1\}^n,$$

ou plus ſimplement

$$\partial^n . y_{x,x'} = \{\partial x . \log. (1 + \Delta^{I} . y_{x,x'}) + \partial x' . \log. (1 + \Delta^{II} . y_{x,x'})\}^n.$$

On pourroit obtenir de cette manière une infinité d'autres formules ſemblables; mais il ſuffit d'avoir expoſé la méthode pour y parvenir.

Tout ce que nous avons dit ſur les fonctions à deux variables, pouvant s'appliquer également à celles de trois ou d'un plus grand nombre de variables, nous n'inſiſterons pas davantage ſur cet objet.



ANALYSE
DE LA
TERRE BOLAIRE JAUNE DU BERRY.
MANIÈRE de préparer le Rouge de Prusse & le Rouge d'Angleterre. *

Par M. SAGE.

Lû le 21 Juillet 1779.

LE Rouge qu'on emploie pour mettre en couleur les carreaux d'appartemens, & quelquefois pour polir les glaces & pour imprimer quelques papiers, se prépare en Hollande avec une espèce de bol jaune que les Hollandois tirent de la seigneurie de Beuvrière, paroisse de Saint George en Berry, à deux lieues de Vierzon, sur les bords du Cher. M. le Monnier, de l'Académie, dit dans un Mémoire qu'il a donné sur cette espèce de terre bolaire, qu'elle se trouve à 18 ou 20 toises de profondeur; qu'avant d'y parvenir, on traverse entr'autres une masse de grès tendre, *qui* a environ 24 pieds d'épaisseur; qu'on trouve ensuite de l'argile & des cailloux; enfin un banc de sablon blanc très-fin, de l'épaisseur d'un pied: c'est immédiatement au-dessous de ce banc que se trouve la première couche de terre bolaire jaune, qui a la même épaisseur que celle du banc de sablon. On rencontre alternativement des couches de sablon & de terre bolaire; mais ce qu'il y a de remarquable, comme l'observe M. le Monnier, c'est que ce bol ne contient point de sablon.

Les lits de terre bolaire jaune du Berry, n'ont point toujours la même épaisseur; il y en a qui n'ont que 6 pouces, d'autres en ont 18; la nuance jaune varie aussi en intensité:

* J'ai donné à M. Gobet une note sur la préparation de cette terre, il l'a imprimé *page 578* du second volume des anciens Minéralogistes.

on trouve quelquefois dans cette terre bolaire, des géodes martiales connues ſous le nom de *pierre d'aigle.*

M. le Vicomte de Riffardo, à qui appartient cette terre, m'ayant apporté, en 1777, de cette eſpèce d'ocre, me demanda quel parti il pourroit en tirer, m'ajoutant qu'il n'avoit pu en trouver le débit à Paris, tandis qu'il eſpéroit le faire avec avantage, parce qu'il en avoit vendu la même année pour quarante mille livres, à quinze francs les huit quintaux, à un particulier qui la faiſoit paſſer en Hollande: il me dit encore, que depuis environ cent ans, la même compagnie de Hollande achetoit de cette terre bolaire, toute la quantité qu'on pouvoit lui en fournir: M. de Riffardo m'ajouta, que d'après la propoſition qu'on lui avoit faite de s'engager à ne livrer de cette terre qu'à cette même compagnie, il n'avoit pas voulu y ſouſcrire, eſpérant découvrir comment les Hollandois en tiroient parti. M. de Riffardo s'étant adreſſé à moi, je fis les recherches pour y parvenir.

L'emploi de l'ocre jaune n'étant point aſſez conſidérable dans le Commerce, pour que j'euſſe pu croire qu'on débitât la terre du Berry ſous forme de bol jaune; & ayant reconnu qu'elle prenoit une belle couleur rouge par la calcination, & qu'après avoir été diviſée, elle reſſembloit au rouge qu'on vend dans le Commerce ſous les noms de *rouge de Pruſſe*, de *rouge d'Angleterre*, j'eſſayai ces mêmes terres, qui me parurent en rapport avec notre bol calciné.

Des expériences comparées m'ayant fait connoître l'identité qu'il y avoit entre ces préparations, il ne me reſtoit plus qu'à trouver la manière d'obtenir une nuance égale dans le rouge: j'ai reconnu qu'elle dépendoit du degré de chaleur qu'on employoit pour le faire naître.

Lorſqu'on calcine en morceaux la terre bolaire jaune, elle éclate & ſe diviſe avec beaucoup de bruit; ſi les morceaux ſont un peu épais, il arrive alors que leur ſurface a ſouvent éprouvé trop de feu, tandis que le centre eſt encore jaune.

Ayant reconnu que la nuance rouge que le bol jaune prenoit par la calcination, étoit ſujette à varier, quoique les

morceaux qui avoient été expoſés au feu à diverſes repriſes euſſent une teinte jaune égale, & voulant déterminer d'où provenoient ces différentes dégradations, je calcinai à un feu gradué le bol jaune, & je vis que ſa couleur diſparoiſſoit à meſure que l'eau contenue dans cette terre, s'exhaloit, & qu'elle prenoit une couleur rouge plus ou moins foncée, ſuivant le degré de feu qu'on lui avoit fait éprouver; que cette couleur rouge paſſoit au brun, & qu'elle finiſſoit par devenir noire; mais alors le bol eſt à demi-vitrifié, & donne des étincelles lorſqu'on le frappe avec le briquet.

Pour m'aſſurer ſi l'eau qui ſe dégageoit de la terre bolaire jaune étoit pure, j'ai diſtillé de cette terre dans une cornue de verre lutée; l'eau qu'elle a fournie étoit limpide, & contenoit un peu d'acide vitriolique: ce qui reſtoit dans la cornue étoit d'un beau rouge, & avoit diminué d'un dixième de ſon poids. Dans cet état, la terre bolaire peut encore s'imbiber d'eau, mais elle ne s'y diviſe pas auſſi aiſément qu'avant d'avoir été calcinée; cependant la terre argileuſe qu'elle contient peut encore ſe laiſſer pénétrer par l'huile, & faire corps avec elle; propriété que n'a point l'ocre martial pur.

Le bol jaune de Berri m'a produit, par la réduction, 15 livres de fer par quintal, ce qui eſt à peu-près en rapport avec la quantité de fer que j'ai extrait de cette terre, en employant la ſublimation avec le ſel ammoniac: pour cet effet, j'ai diſtillé au fourneau de réverbère, dans une cornue de verre lutée, 100 grains de terre bolaire jaune avec une once de ſel ammoniac qui s'eſt ſublimé avec le fer, & a pris une belle couleur jaune; j'ai diſtillé le réſidu jaunâtre avec une once de ſel ammoniac; il s'eſt ſublimé coloré en jaune. Ce qui reſtoit dans la cornue étoit blanchâtre; je l'ai mis dans de l'eau diſtillée; le ſel martial qu'il contenoit s'y eſt diſſout: j'ai filtré, deſſéché & peſé ce réſidu, & j'ai trouvé qu'il ne peſoit que 50 grains, en ajoutant les [illegible]0 livres d'eau que la terre bolaire contient par quintal, & l'accrétion en peſanteur abſolue, dont le fer eſt ſuſceptible lorſqu'il eſt

dans

dans l'état de chaux *(a)*; il paroît que le fer ne se trouve dans la terre bolaire jaune de Berri que dans la proportion d'environ un cinquième.

Pour obtenir une couleur rouge d'une nuance égale par la calcination du bol jaune, il faut le diviser & le calciner à un feu médiocre, ayant soin de le retirer de temps en temps de cette terre pour l'exposer à l'air, afin de reconnoître quelle sera sa nuance après le refroidissement: je pense que pour préparer en grand ce rouge, il suffiroit de calciner la terre bolaire au fourneau de reverbère anglois, ayant seulement soin que l'aire de ce fourneau fût presque plat, afin de retirer plus facilement cette terre avec les râbles.

Le rouge dit de *Prusse* a une couleur plus vive que celui d'Angleterre; le premier se vend quarante-huit livres le quintal, & le second vingt-cinq livres *(b)*. On prend les lits de bol jaune les plus colorés pour préparer le rouge de Prusse, & ceux qui le sont moins, pour faire le rouge d'Angleterre.

Il résulte des expériences précédentes, qu'un quintal de terre bolaire jaune de Berri, contient

Eau acidule	10[#]
Chaux de fer	40.
Argile	50.
	100.

(a) Si l'on réduit le fer à l'état de chaux, par la calcination, ce métal augmente de 40 à 45 livres par quintal; si l'on a précipité le fer de sa dissolution par le moyen d'un alkali, ce précipité, qui est une espèce de chaux de fer, se trouve être augmenté de 80 à 90 livres par quintal. Voyez mes Élémens de Minéralogie, *tome II, pages 160 & 165.*

(b) Les Hollandois ne payent la terre bolaire jaune du Berri, que trente-sept sous six deniers le quintal.



OBSERVATION
SUR
UN ÉTRANGLEMENT D'INTESTIN,
Produit par l'épiploon devenu adhérent au-dessus d'une poche contre nature, formée dans l'intérieur du bas-ventre.

Par M. BORDENAVE.

Lû le 21 Août 1779.

UN homme, âgé d'environ 45 ans, ressentit tout-à-coup, le 7 Juillet 1779, des douleurs vives de colique, accompagnées de nausées & de vomissement. Étant appelé auprès de lui, & après lui avoir fait les questions convenables sur l'espèce de douleur qu'il éprouvoit, sur le siége de la douleur, sur les causes qui avoient pu produire cet accident, &c. je tâtai le ventre, auquel je n'observai rien de particulier; il étoit peu tendu, & ne paroissoit douloureux que vers la région de l'estomac.

Je crus, d'après ces considérations, devoir regarder cette espèce de colique comme bilieuse: en conséquence je lui prescrivis d'abord une potion huileuse, une boisson mucilagineuse & des lavemens émolliens. Les lavemens produisirent seulement l'évacuation des matières contenues dans les derniers intestins; la potion huileuse fut revomie en détail, & les accidens restèrent à peu-près les mêmes. Le lendemain, je crus devoir insister sur l'usage des mêmes remèdes; mais les lavemens produisoient peu d'effet, le vomissement persistoit, & les douleurs de colique étoient seulement un peu diminuées.

Le 9 au matin, le malade en vomissant, rendit deux gros vers strongles, & des matières qui avoient la couleur & l'odeur des matières stercorales; je crus alors que ces accidens pouvoient dépendre en partie de la présence de ces corps

étrangers, & j'espérois que leur issue alloit les dissiper. Comme le malade avoit des hoquets continuels, des nausées, des vomissemens fréquens, je lui prescrivis une potion anti-spasmodique, dans laquelle entroit la liqueur anodine minérale d'Hoffman, la limonade pour boisson, & toujours les lavemens.

Le 10, le malade parut éprouver quelque soulagement par l'usage de ces remèdes; le hoquet étoit moindre, ainsi que le vomissement; il y avoit un peu de sommeil, & des lavemens laxatifs procurèrent quelques évacuations grisâtres. Les 11, 12, 13, 14 & 15, les choses furent à peu-près dans le même état. Le 16, le pouls s'étant un peu élevé, cependant sans tension au ventre, le malade fut saigné; on cessa la potion, & je lui prescrivis l'eau de Vichy pour boisson, d'abord simple & ensuite aiguisée par 2 gros de sel d'Epsom. Cette boisson passa assez bien; les urines devinrent abondantes; le vomissement fut plus rare & a manqué quelquefois pendant 24 & 30 heures; mais rien n'a passé par le bas, & les évacuations inférieures, toujours rares & en petite quantité, n'étoient que le produit de la secrétion qui se faisoit dans les gros intestins.

Le 20, le malade éprouva des douleurs & un gonflement des hémorroïdes. Ces douleurs, & en même temps la situation habituelle du malade sur le côté droit, sembloient annoncer un engorgement étendu jusqu'à la veine-porte; en conséquence les sangsues lui furent appliquées, & procurèrent une médiocre évacuation de sang. Les accidens, quoique moindres en apparence, continuèrent; le pouls devint plus petit, le malade s'affoiblit, & enfin mourut le 24 Juillet, après dix-huit jours de vomissemens habituels, & seulement quelques légères déjections de matières stercorales, sans qu'aucune matière ait passé de haut en bas, excepté la veille de sa mort qu'il eut une évacuation bilieuse.

Les accidens ayant été permanens malgré les remèdes les mieux indiqués, d'un autre côté, n'ayant trouvé aucune tumeur au ventre vers les ouvertures naturelles, ni aucun endroit spécialement douloureux, malgré les recherches les

plus exactes, je ne pouvois regarder la maladie comme une suite de hernie. Je crus donc devoir plutôt soupçonner une invagination d'intestin, ou un étranglement causé par quelque bride intérieure, dont la nature & le siége étoient également inconnues : tel avoit été le jugement que j'avois porté, & que je crus devoir vérifier par l'examen du sujet.

A l'ouverture du bas-ventre, j'aperçus d'abord l'épiploon qui, au lieu d'être étendu sur la surface des intestins & flottant, étoit comme roulé & resserré sur lui-même, & comprimant les intestins dans son passage, alloit adhérer au péritoine au-dessus du pubis; il formoit ainsi une espèce de corde, qui avoit rétréci les intestins dans tous les points de son contact.

Ayant détruit son adhérence inférieure pour reconnoître l'état des parties au-dessous, je trouvai en général les intestins grêles fort dilatés, dans un état de phlogose, & avec quelques points gangréneux. Les ayant examinés avec soin, je découvris une forte adhérence d'une portion de l'intestin *ileum* étranglé, au-dessous de l'endroit d'où j'avois détaché l'épiploon; cet intestin, dilaté en ce lieu comme une espèce de jabot, étoit engagé dans une poche formée dans le péritoine, au-dessus de la tunique vaginale du cordon auquel elle étoit adhérente. Cette poche étoit fort épaisse, *carniforme*, & présentoit une cavité presque ovoïde; la portion d'intestin qui y étoit contenue, y adhéroit & étoit gangrenée; l'intestin, resserré à son entrée dans cette poche, ne permettoit plus le passage des matières; son diamètre naturel étoit fort diminué au-dessous de l'étranglement, & j'ai reconnu, par l'examen, que la portion de l'*ileum* qui étoit au-dessous, n'étoit pas éloignée du *cæcum* de huit pouces.

En réfléchissant sur la densité de cette poche & sur sa situation, on peut présumer qu'elle ne s'étoit pas formée depuis peu, & qu'elle étoit la suite d'une disposition vicieuse déjà ancienne : ce qui paroît confirmé par l'habitude qu'avoit le malade de se coucher sur le côté droit depuis plusieurs années, & par la douleur qu'il éprouvoit en se couchant du côté opposé.

Ce ſujet ayant été occupé à des travaux quelquefois pénibles, ne peut-on pas penſer ou qu'il a fait quelque effort, ou peut-être qu'il aura été frappé dans ces parties; ce qui aura donné lieu à la diſtenſion graduée du péritoine & à la formation ſucceſſive d'une poche? L'inteſtin, introduit dans cette poche depuis long-temps, n'a produit aucun accident tant qu'il n'a pas été étranglé; mais l'inflammation ayant été déterminée par une cauſe quelconque, l'étranglement eſt ſurvenu, l'inteſtin a contracté des adhérences, les accidens ſe ſont développés, & la maladie, non ſuſceptible de ſecours à raiſon de ſa ſituation intérieure & inconnue, ne pouvant ſe terminer par les ſeules forces de la Nature, eſt devenue néceſſairement mortelle.

L'eſpèce d'étranglement produit par l'épiploon, devenu adhérent au-deſſus d'une poche ainſi formée intérieurement, préſente un cas très-rare, peut-être unique, & dont nous n'avons pas d'exemples dans les Auteurs. On a déjà vu pluſieurs fois des malades éprouver des étranglemens d'inteſtin par invagination; d'autres fois, par une bride formée intérieurement *(a)*; d'autres fois, on a obſervé des rétréciſſemens ſpontanés, qui ont cauſé la mort *(b)*. Tous ces cas funeſtes ont mérité l'attention des Obſervateurs, & quoiqu'ils ne paroiſſent abſolument ſuſceptibles d'aucun ſecours, cependant, on a propoſé en quelques circonſtances des tentatives qui méritent attention, & qui prouvent juſqu'où pourroit s'étendre quelquefois la bienfaiſance de l'Art *(c)*.

Si l'obſervation que je viens de rapporter préſente un de ces cas où les ſecours deviennent impuiſſans, elle ne mérite pas moins d'être recueillie pour étendre nos connoiſſances ſur les maladies trop nombreuſes, quelquefois inconnues & en même temps incurables, dont l'humanité peut être affligée.

(a) Obſervation de M. Moſcati; *Mémoires de l'Académie Royale de Chirurgie, tome III.*

(b) Obſervation de M. Ritſch, & la Note à la fin; *Mémoires de l'Académie Royale de Chirurgie, tome IV.*

(c) Voyez les Réflexions de M. Ritſch.

MÉMOIRE
CONTENANT
LES OBSERVATIONS
DE LA XVII.e COMÈTE

Observée à Paris, de l'Observatoire de la Marine, depuis le 18 Janvier jusqu'au 17 Mai 1779. (a)

Par M. MESSIER.

Lû à la rentrée du 14 Avril 1779. Relû le 31 Mai 1780.

LE Ciel étoit parfaitement beau la nuit du 18 au 19 Janvier 1779. On avoit annoncé dans le livre de la Connoissance des Temps, pour le 19 au matin, une immersion du premier satellite de Jupiter: avant de faire l'observation de ce Satellite, je parcourus le ciel avec une lunette ordinaire de 2 pieds de foyer, très-claire & armée de larges oculaires, qui faisoient découvrir un espace dans le ciel de 5 à 6 degrés, & je découvris au Levant une nébulosité qui avoit quelques minutes d'étendue, & qu'on ne pouvoit pas apercevoir à la simple vue; je jugeai que cette nébulosité ne pouvoit être qu'une Comète qui paroissoit près de la tête du Cygne, & auprès d'une Étoile de la cinquième grandeur, la seconde de la constellation du Cygne, suivant l'ordre que les Étoiles tiennent dans le Catalogue de Flamstéed, seconde édition. Après avoir observé l'immersion du premier satellite de Jupiter, avec une lunette achromatique de 3 pieds $\frac{1}{2}$ de foyer à triple objectif, faite à Londres par Dollond, & qui fut faite à $5^h\,52'\,49''$ de temps vrai, j'ôtai l'oculaire qui avoit servi à cette observation, pour substituer à la place un micromètre filaire que je réglai sur le parallèle des Étoiles fixes en

Découverte le 19 Janvier, vers les 5 heures du matin.

(a) C'est la LXIV.e Comète dont l'orbite ait été calculée, en suivant la Table qui est dans l'Astronomie de M. de la Lande, *tome III, page 366.*

ascension droite; ensuite je comparai la Comète à l'Étoile ci-dessus, la seconde du Cygne; son ascension droite réduite au temps de cette observation étoit de $288^d\ 51'\ 31''$, & sa déclinaison de $29^d\ 12'\ 5''$ boréale. A $6^h\ 8'\ 2''$ de temps vrai, la Comète suivoit l'Étoile au fil horaire de $16'\ 7''$ de degré, la Comète étant supérieure à l'Étoile de $20'\ 4''$. De ces différences & de la position de l'Étoile, il en est résulté l'ascension droite de la Comète de $289^d\ 5'\ 20''$, & sa déclinaison boréale de $29^d\ 40'\ 52''$: la Cométe fut encore comparée la même nuit deux fois à la même Étoile.

Première observation de la Comète.

Le noyau de la Comète paroissoit assez brillant, son diamètre égaloit une fois & demi l'épaisseur d'un des fils du micromètre, estimé de 20 secondes de degré; le noyau étoit environné de nébulosité qui s'étendoit à 4 minutes; la queue paroissoit longue de 33 minutes, dirigée vers le nord-est.

Je ne rapporte ces détails que pour cette première observation; on trouvera dans deux Tables qui sont placées à la suite de ce Mémoire, les déterminations de la Comète pour chaque jour qu'elle aura été observée, & dans une seconde Table les positions des Étoiles, celles qui étoient connues, ainsi que celles que j'ai déterminées par de nouvelles observations, & dont la plupart ont été employées à la détermination des lieux du noyau de la Comète, à chaque jour d'observations.

Dans mes observations, j'ai employé la même lunette achromatique de 3 pieds $\frac{1}{2}$, garnie d'un micromètre filaire, de laquelle j'ai déjà parlé: la pendule qui a servi à marquer les temps des observations, étoit du célèbre Julien le Roi; elle étoit réglée sur le mouvement des fixes, & sa marche connue par les passages du Soleil au Méridien, observés à un télescope Newtonien de 3 pieds 2 pouces de foyer, placé solidement dans le plan du Méridien, & sa position vérifiée par un grand nombre de hauteurs correspondantes du Soleil, prises fréquemment dans tous les temps de l'année.

Les 20, 21 & 22 Janvier, le ciel fut couvert.

Le 23 au matin, le ciel fut beau, mais il y eut un peu de brouillard; je vis la Comète qui s'étoit approchée depuis le 19 de l'étoile γ de la Lyre; il ne fut pas possible à cause du brouillard de juger de ses apparences; je comparai le noyau à plusieurs Étoiles, & je vérifiai la seconde étoile du Cygne à l'étoile β de la troisième grandeur, de la même constellation: cette étoile β est double, celle qui a le moins de lumière, je l'ai estimée de la sixième grandeur. La petite Étoile suivoit β au fil horaire de 2 secondes $\frac{1}{2}$ de temps, & elle étoit supérieure à β de 22 secondes de degré. Le 19, en observant la Comète, je vis à peu de distance d'elle, & sur son parallèle, une nébuleuse très-foible, qu'on ne pouvoit apercevoir qu'avec la lunette, le crépuscule alors m'empêcha de déterminer son lieu: ce matin 23, je l'ai comparai directement à la seconde étoile du Cygne de la cinquième grandeur; je l'ai rapportée sur la Carte, & voici sa position.

du Cygne double.

NÉBULEUSE PRÈS DE LA TÊTE DU CYGNE.	ASCENSION droite.	DÉCLINAIS. boréale.
Le 23 Janvier matin 1779.......	287d 0' 1"	29d 48' 14"

Le 24 au matin, le ciel fut parfaitement beau; vers les 5 heures, la Comète paroissoit plus apparente que la veille, le noyau très-brillant, environné de nébulosité avec une queue de plusieurs minutes d'étendue. Je comparai directement le noyau de la Comète aux étoiles γ & λ de la Lyre.

Le 25 Janvier au matin, la Comète paroissoit avec la même lumière que le jour précédent; on la voyoit à la vue simple, mais bien foiblement; je comparai le noyau aux mêmes étoiles γ & λ de la Lyre & à d'autres Étoiles: les positions sont rapportées dans la première Table.

Les 26, 27, 28, 29 & 30 au matin, le ciel fut couvert.

Le

Le 31 Janvier au matin, le ciel parfaitement beau, la Comète paroissoit comme les jours précédens; on ne pouvoit pas cependant l'apercevoir à la simple vuë, à cause de la grande lumière de la Lune; je comparai la Comète à β de la Lyre & à plusieurs autres Étoiles: les positions de la Comète & celle des Étoiles sont rapportées dans les Tables qui suivent. β de la Lyre est double, & j'ai estimé que β n'étoit que de la quatrième grandeur, au lieu de la seconde à la troisième, qu'on lui donne dans le livre de la Connoissance des Temps: elle m'a paru avoir moins de lumière que γ de cette constellation. En comparant ce matin la Comète à β de la Lyre, j'ai aperçu à la lunette un petit amas de lumière, qui m'a semblé n'être composé que de très-petites Étoiles, qu'on ne pouvoit pas distinguer avec l'instrument: cet amas de lumière arrondi étoit placé entre γ & β de la Lyre. Le 3 de Septembre, j'ai encore examiné cette lumière avec la lunette achromatique, que j'avois fait grossir cent vingt fois environ; je n'ai pu reconnoître, comme la première fois, si elle étoit composée de petites Étoiles: voici sa position; je l'ai rapportée aussi sur la Carte de la route apparente de la Comète.

β de la Lyre double, estimée de la 4.e grandeur.

NÉBULEUSE ENTRE γ ET β DE LA LYRE.	ASCENSION droite.	DÉCLINAIS. boréale.
Le 31 Janvier matin 1779	281d 20′ 8″	32d 46′ 3″

Le 1.er Février au matin, beau temps; les apparences de la Comète étoient les mêmes que les jours précédens, & la grande lumière de la Lune empêcha de la voir à la vue simple: je comparai le noyau de la Comète à plusieurs Étoiles dont les lieux n'avoient pas encore été déterminés; pour connoître leurs positions, je les comparai à β de la Lyre: on les trouvera dans la seconde Table.

Les 2, 3, 4, 5, 6, 7 & 8 Février, le ciel fut couvert d'un brouillard si épais le jour & la nuit, que le Soleil, la Lune & les Étoiles ne purent paroître; ce brouillard constant ne se dissipa que la nuit du 8 au 9.

Le 9, à cinq heures du matin, le ciel devint parfaitement beau: la Comète avoit passé de la Lyre dans la constellation d'Hercule; ses apparences étoient à peu de chose près les mêmes qu'à la précédente observation, le noyau & la queue toujours d'une lumière sensible vue à la lunette: la Comète à 5 heures du matin, étoit parvenue à une très-grande hauteur au-dessus de l'horizon, de manière que la position de ma lunette ne pouvoit plus me servir; je fus obligé de la déplacer pour l'approcher d'une des croisées de mon Observatoire, celle du Levant; déplacée, il fallut la remettre dans le plan du Méridien, ce qui demanda du temps & empêcha de faire plusieurs comparaisons de la Comète avec les Étoiles voisines: je ne pus la comparer qu'une seule fois, & sa position est rapportée dans la première Table.

Le 10 Février au matin, le ciel fut entièrement couvert.

Le 11 à 4 heures $\frac{1}{2}$ du matin, le ciel étoit parfaitement beau; la Comète paroissoit près de l'étoile *u* de la cinquième grandeur d'Hercule, à laquelle elle fut comparée: les observations sont rapportées, tant celle de la Comète que celle de l'Étoile, dans les deux Tables qui suivent.

Le 12, vers les 5 heures du matin, il y avoit quelques nuages; la Comète paroissoit avec la même lumière que les jours précédens; il n'étoit pas possible cependant de l'apercevoir à la vue simple: je comparai le noyau à la même Étoile de la veille, *u* d'Hercule, & pour vérifier la position de cette Étoile, je l'observai avec l'étoile *ε* de la troisième grandeur de cette constellation, en employant plusieurs Étoiles intermédiaires.

Le ciel fut entièrement couvert la nuit du 12 au 13.

Le 14 au matin, le ciel en grande partie couvert; entre les nuages rares je vis la Comète, & je comparai le noyau aux deux Étoiles *u* & *d* d'Hercule: les observations un peu douteuses.

Les 15, 16 & 17, brouillard épais les matins, qui ne laissoit apercevoir aucune Étoile.

Le 18 au matin, le ciel parfaitement beau & pur; la Comète paroissoit très-bien à la lunette, le noyau d'une lumière brillante & blanchâtre; son diamètre égaloit l'épaisseur d'un des fils du micromètre, qui fut estimé de 15 secondes; le diamètre de la chevelure avoit 4' 26"; la queue avoit peu d'étendue, 30 minutes environ: quoique le ciel fût parfaitement beau, la Comète n'étoit pas visible à la vue simple; dans la lunette, elle paroissoit près de l'étoile ζ d'Hercule: je comparai directement la Cométe à cette Étoile, & dans l'intervalle de mes observations, la Comète fut en opposition avec l'Étoile en ascension droite.

Diamètre du noyau, 15 secondes; de la chevelure, 4' 26"; longueur de la queue, 30 minutes.

Le 19 au matin, il y avoit beaucoup de brouillard; les Étoiles paroissoient nébuleuses; la Comète étoit difficile à apercevoir, & la moindre lumière employée pour éclairer les fils du micromètre, la faisoit disparoître, & ce ne fut pas sans peine que je pus en déterminer le lieu, en la comparant directement aux étoiles de la constellation d'Hercule ζ, vingt-troisième & vingt-sixième du Catalogue de Flamstéed: pour vérifier les positions de ces deux dernières Étoiles, elles furent comparées à ζ.

Les 22, 23 & 24 Février, le ciel fut couvert de brouillards épais.

La nuit du 25 au 26, je comparai la Comète à l'étoile ξ de la couronne, & à une Étoile dont le lieu n'avoit pas encore été déterminé.

La nuit du 26 au 27, le ciel assez beau; il y avoit cependant du brouillard; la Comète paroissoit comme la nuit précédente: je comparai le noyau à plusieurs étoiles ι de la couronne, & à deux Étoiles nouvelles dont les lieux n'étoient pas encore connus.

La nuit du 27 au 28, il y avoit du brouillard que la Lune avoit beaucoup de peine à vaincre, ainsi que les deux nuits précédentes; ce ne fut pas sans peine que je pus voir la Comète; sa lumière étoit extrêmement affoiblie par le

brouillard : je comparai le noyau à la même Étoile de la veille ι de la couronne & à deux Étoiles nouvelles.

La nuit du 28 Février au 1.er Mars, le ciel étoit beau; mais il y avoit un peu de brouillard, la Comète se voyoit difficilement : je déterminai son lieu en la comparant aux deux étoiles β & ι de la couronne.

La nuit du 1.er au 2 Mars, le ciel fut parfaitement beau; la Comète paroissoit entre les deux étoiles β & ι de la couronne, avec lesquelles le noyau fut comparé.

La nuit du 2 au 3 fut en partie couverte de brouillard: vers les 4 heures du matin, le brouillard s'étoit dissipé & le ciel étoit devenu parfaitement beau; la Comète paroissoit près de l'étoile β de la couronne, à laquelle je la comparai plusieurs fois; la Comète étoit foible en lumière à cause de la Lune qui étoit sur l'horizon.

La nuit du 3 au 4, un peu de brouillard vers les 11 heures du soir, la Comète étoit très-difficile à apercevoir à la lunette; mais vers les 4 heures du matin, le brouillard étant dissipé, la Comète paroissoit, mais sa lumière étoit encore un peu affoiblie par celle de la Lune qui étoit sur l'horizon; la lunette placée dans le plan du Méridien à quelques secondes près, j'y observai la Comète avec les étoiles β & ο de la *couronne*: les observations sont rapportées dans la première Table.

La nuit du 4 au 5, le ciel fut parfaitement beau toute la nuit, & pur comme il est rare de le voir à Paris; depuis 9 heures jusqu'à minuit, j'observai plusieurs Étoiles dont les lieux n'avoient pas encore été connus, & qui devoient servir les jours suivans à la détermination de la Comète : ces Étoiles sont rapportées dans la seconde Table qui est à la suite du Mémoire. La Comète fut comparée à β de la couronne; à la lunette, la Comète paroissoit distinctement, malgré la grande lumière de la Lune sur l'horizon; le noyau étoit brillant, blanchâtre; son diamètre, comparé à l'épaisseur d'un des fils du micromètre, fut estimé de 5 secondes; la chevelure avoit peu d'étendue, diminuée par la lumière de la Lune.

Diamètre du noyau, 5 secondes.

La nuit du 5 au 6 de Mars, le ciel fut parfaitement beau

toute la nuit; la Comète avoit les mêmes apparences que la nuit précédente; je comparai le noyau à la même étoile β de la couronne des jours précédens, & plusieurs Étoiles nouvelles furent comparées à ε du Bouvier, de la troisième grandeur.

La nuit du 6 au 7, il y avoit du brouillard, & la Comète paroissoit foiblement; le noyau fut comparé à ε du Bouvier & à deux nouvelles Étoiles déterminées.

La nuit du 7 au 8, le ciel fut parfaitement beau & pur; la Comète paroissoit très-distinctement à la lunette, ayant presqu'autant de lumière que les premiers jours d'observations; cependant on ne pouvoit pas l'apercevoir à la simple vue; avec la lunette de nuit, on la voyoit encore très-bien; le noyau étoit brillant : je comparai son diamètre à l'épaisseur d'un des fils du micromètre, & fut estimé de 5 secondes; il étoit environné de nébulosité dont l'étendue avoit 6′ 42″; on ne voyoit aucune apparence de queue : je comparai directement le noyau de la Comète aux deux étoiles ε & ψ du Bouvier. La même nuit, je comparai ε du Bouvier à β de la couronne, cette dernière n'étant rapportée que dans le Catalogue de Flamstéed : j'avois déjà fait la même comparaison la nuit du 4 au 5 de ce mois.

Diamètre du noyau, 5 secondes.
Diamètre de la nébulosité, 6′ 42″.

La nuit du 8 au 9, le ciel fut beau; mais il ne fut pas aussi pur que la nuit précédente : je comparai la Comète aux mêmes étoiles de la veille ε & ψ du Bouvier; j'observai aussi la position de plusieurs Étoiles qui n'avoit pas encore été déterminée.

La nuit du 9 au 10, le ciel fut très-beau; la Comète paroissoit très-bien à la lunette ; le noyau brillant & blanchâtre, environné d'une légère nébulosité : je comparai plusieurs fois la Comète à ε du Bouvier, & je déterminai la position de plusieurs Étoiles qui n'avoient pas encore été connues.

La nuit du 10 au 11 Mars, le ciel fut parfaitement beau & sans nuages; la Comète se faisoit voir distinctement à la lunette achromatique; on la voyoit aussi avec la lunette de nuit : je comparai le noyau à la trente-quatrième étoile du Bouvier, de la sixième grandeur, suivant le Catalogue

de Flamſtéed, & cette Étoile fut comparée à ε de la même conſtellation; j'obſervai auſſi la poſition d'une nouvelle Étoile qui devoit être employée les jours ſuivans à la détermination des lieux de la Comète.

La nuit du 11 au 12, beau temps toute la nuit; la Comète paroiſſoit comme la nuit précédente, avec la même lumière: le noyau fut comparé à la même Étoile de la veille, la trente-quatrième du Bouvier, & à deux Étoiles nouvelles que j'obſervai en les comparant à d'autres Étoiles connues; j'obſervai auſſi pluſieurs Étoiles dont les lieux n'avoient pas encore été déterminés en les comparant à *Arcturus:* ces nouvelles Étoiles devoient ſervir les jours ſuivans à la détermination des lieux de la Comète.

La nuit du 12 au 13, il y eut un peu de brouillard: je déterminai la poſition de la Comète en la comparant à une Étoile de la nuit précédente, que j'avois déterminée; je déterminai auſſi pluſieurs Étoiles: on trouvera leurs déterminations dans la ſeconde Table.

La nuit du 13 au 14, le ciel fut parfaitement beau; la Comète étoit très-apparente à la lunette, le noyau d'une lumière blanchâtre environné de nébuloſités, avec une queue de quelques minutes d'étendue; la Comète ſe voyoit encore bien à la lunette de nuit: le noyau fut comparé pluſieurs fois à de nouvelles Étoiles dont les lieux avoient été déterminés.

Les nuits du 13 au 14, du 14 au 15, du 15 au 16, & du 16 au 17, le ciel fut couvert.

La nuit du 17 au 18, le ciel s'éclaircit vers les 10 heures du ſoir; la Comète ſe voyoit encore bien à la lunette achromatique & avec celle de nuit : je comparai le noyau à de nouvelles Étoiles, dont les poſitions avoient été déterminées. Les déterminations de la Comète obtenues entre $11^h\ 5'$ juſqu'à $11^h\ 26'$, furent un peu douteuſes pour les déclinaiſons ſeulement; les deux autres déterminations faites entre 2 & 3 heures furent meilleures: elles furent faites aux environs du Méridien.

Les 18, 19 & 20 Mars au ſoir, le ciel fut couvert.

Le 21 au soir, beau temps; la Comète paroissoit, le noyau brillant; on pouvoit encore la voir avec la lunette de nuit; sa grandeur & ses apparences étoient à peu-près les mêmes que la nébuleuse que j'avois découverte le 3 de Mai 1764, entre la queue & les pattes d'un des Lévriers le plus méridional *(b)*: cette comparaison fut aisée à faire, la Comète & la nébuleuse étoient à peu de distance l'une de l'autre. La Comète fut comparée à la sixième étoile du Bouvier, suivant l'ordre du Catalogue de Flamstéed, & cette Étoile avoit été comparée les jours précédens à ε de la même constellation; la position de la Comète fut encore observée avec une Étoile nouvelle déterminée.

La Comète comparée à la nébuleuse des Lévriers.

Le 22 au soir, le ciel fut un peu nébuleux: la Comète fut comparée à la première & à la sixième étoile du Bouvier, suivant l'ordre que tiennent ces Étoiles dans le grand Catalogue de Flamstéed.

Le 23, le ciel fut parfaitement beau le soir; la Comète se voyoit encore fort bien à la lunette achromatique, on la voyoit aussi avec celle de nuit: je comparai les apparences de la Comète à la même nébuleuse des Lévriers; la Comète paroissoit un peu plus foible qu'elle. Je comparai le noyau de la Comète, qui étoit encore brillant & d'une lumière blanchâtre, à la première étoile du Bouvier, suivant Flamstéed, & directement à *Arcturus:* les observations sont bonnes.

La Comète comparée à la même nébuleuse.

Le 24, beau temps le soir; je comparai encore les apparences de la Comète à la même nébuleuse des Lévriers; la Comète paroissoit avoir un peu moins de lumière: je déterminai la position de la Comète en la comparant directement, comme le jour précédent, aux étoiles *numéro 1* du Bouvier & à *Arcturus.*

La Comète comparée à la même nébuleuse.

Le 25, beau temps, il y avoit cependant des vapeurs qui s'élevoient au-dessus de l'horizon, & ces vapeurs annonçoient qu'il y auroit une Aurore boréale; effectivement, vers les 9 heures du soir, l'Aurore boréale commença à paroître,

Aurore boréale.

(b) Voyez les Mémoires de l'Académie, *année 1771, page 454.*

devint rougeâtre, & à 10 heures elle disparut; il faisoit alors un grand clair de Lune: je comparai directement la Comète à *Arcturus* & à une Étoile nouvelle que j'avois déterminée.

Le 26 Mars, beau temps; la Comète paroissoit avec la même lumière que le jour précédent; je la comparai aux étoiles η & *Arcturus* du Bouvier, & η à *Arcturus* pour bien connoître sa position: je déterminai le même soir la position de plusieurs Étoiles dont les lieux n'étoient pas encore connus.

Le 27, beau temps comme la veille; la Lune étoit sur l'horizon, & la Comète paroissoit le soir sur le parallèle de la nébuleuse de la chevelure de Bérénice, que j'avois découverte le 27 Février 1777: voici ce que j'ai rapporté de cette nébuleuse dans le journal de mes observations. « Une nébuleuse dans la chevelure de Bérénice, qui est assez sensible à la lunette; elle est assez ronde, & je n'ai pas reconnu qu'elle soit composée d'Étoiles; c'est une lumière foible: cette nébuleuse n'étoit pas bien élevée au-dessus de l'horizon lorsque je l'ai découverte, & que j'en ai déterminé le lieu en la comparant à l'étoile quarante-deuxième de la chevelure de Bérénice, de la quatrième à la cinquième grandeur, suivant le Catalogue de Flamstéed; voici sa position déterminée pour le 27 Février 1777: son ascension droite étoit de 195^d 30′ 26″, & sa déclinaison de 19^d 22′ 44″ boréale. » La Comète & cette nébuleuse paroissoient avoir à la lunette même lumière l'une & l'autre, même étendue & même difficulté à les voir à l'instrument; & cette nébuleuse existante servira dans la suite de terme de comparaison pour la grandeur de la Comète le 27 Mars 1779. Le même soir, je comparai la Comète directement à cette nébuleuse, la position en est rapportée dans la première Table; je la comparai aussi aux étoiles η du Bouvier, à la quarante-deuxième de la chevelure de Bérénice, & à une Étoile nouvelle déterminée.

Nébuleuse dans la chevelure de Bérénice, comparée à la Comète, & de même grandeur que la Comète.

Le 28, beau temps le soir; la grande lumière de la Lune diminuoit sensiblement les apparences de la Comète; je comparai encore sa lumière à la nébuleuse de la chevelure de

de Bérénice, que je trouvai de même grandeur & ayant même lumière: la Comète fut comparée directement à cette nébuleuse & à la quarante-deuxième Étoile de la chevelure de Bérénice.

La Comète comparée à la nébuleuse de Bérénice.

Le 29, la grande lumière de la Lune affoiblissoit considérablement celle de la Comète; j'avois de la peine à la voir avec la lunette achromatique, quoique j'aie attendu qu'elle soit parvenue à une grande hauteur au-dessus de l'horizon; le ciel étoit cependant parfaitement beau: je comparai la Comète à la même Étoile des jours précédens, la quarante-deuxième de la chevelure de Bérénice, & à une Étoile nouvelle déterminée.

Le 30 Mars, le ciel fut parfaitement beau & pur; mais la Lune qui approchoit de son plein, répandoit une lumière considérable, & la Comète étoit très-difficile à apercevoir à la lunette achromatique; de temps à autre, elle disparoissoit: je réussis cependant à la comparer deux fois à une Étoile nouvelle, dont le lieu fut déterminé en la comparant à des Étoiles connues.

La nuit du 31 Mars au 1.er Avril, le ciel fut parfaitement beau; mais cette nuit arrivoit la pleine Lune, & sa grande lumière avoit effacé celle de la Comète avant son passage au Méridien; je ne pus l'apercevoir que lorsqu'elle y fut parvenue; elle échappoit encore à l'œil, quoiqu'elle fût dans la lunette achromatique: je la comparai à deux Étoiles nouvelles dont les lieux furent déterminés.

La nuit du 1.er au 2 Avril, le ciel parfaitement beau, toujours beaucoup de difficulté pour apercevoir la Comète, à cause de la grande lumière de la Lune: je déterminai son lieu en la comparant à deux nouvelles Étoiles que j'avois déterminées; j'observai aussi le passage de la Comète au Méridien, à la lunette qui y étoit placée à quelques secondes près. Je vérifiai le même soir la position de plusieurs Étoiles observées les jours précédens, en les comparant à *Arcturus*.

La nuit du 2 au 3, le ciel fut parfaitement beau; avant le lever de la Lune, je recherchai la Comète, que je trouvai

ſans peine; elle paroiſſoit encore ſenſiblement à la lunette achromatique, le noyau d'une lumière ſenſible & blanchâtre, mais devenu comme un point brillant environné d'une foible nébuloſité; à la lunette de nuit, on ne faiſoit plus que la ſoupçonner, & encore pour la trouver, il falloit que la lunette fût dirigée dans l'endroit du ciel où elle paroiſſoit: la lunette achromatique montée ſur la machine parallactique, donnoit cette direction. La Comète fut comparée à une Étoile nouvelle de la huitième grandeur dont le lieu avoit été déterminé: je déterminai auſſi le lieu de la Comète par ſon paſſage au Méridien.

La nuit du 3 au 4, beau temps; il y avoit cependant un peu de brouillard, & la Comète paroiſſoit à peu de choſe près avec les mêmes apparences que la nuit précédente: je comparai le noyau à l'Étoile de la veille & à une Étoile nouvelle que j'avois déterminée; j'obſervai auſſi la Comète au Méridien avec les mêmes Étoiles.

Le 4 au ſoir, beau temps; entre 8 & 9 heures, je comparai la Comète à l'Étoile vingt-neuvième, de la ſixième grandeur de la chevelure de Bérénice & à une Étoile nouvelle déterminée; vers les 10 heures, le ciel commença à ſe couvrir; à minuit je ne pus voir la Comète à ſon paſſage au Méridien, mon deſſein étoit de l'y obſerver avec β du Lion, la Comète étant ſur le parallèle de cette Étoile.

Le 5, beau temps; je comparai directement la Comète à l'étoile β du Lion, de la ſeconde grandeur, enſuite à une Étoile déterminée, & ſon paſſage au Méridien avec l'Étoile ci-deſſus rapportée, la vingt-neuvième de la chevelure de Bérénice; pour bien connoître la poſition de cette dernière Étoile, je la comparai à β du Lion: j'avois toujours beaucoup de peine à apercevoir la Comète avec la lunette de nuit.

Le 6, le ciel fut parfaitement beau, & je reconnus que la Comète perdoit de ſa lumière, quoiqu'on la vît encore aſſez bien à la lunette achromatique; on ne faiſoit plus que la ſoupçonner à celle de nuit: la Comète fut comparée aux

Étoiles vingt-huit & vingt-neuvième de la chevelure de Bérénice, suivant l'ordre qu'ont les Étoiles dans le grand Catalogue de Flamstéed; elle fut observée aussi à la lunette achromatique placée dans le plan du Méridien avec les deux Étoiles vingt-huit & vingt-neuvième.

Le 7, beau temps le soir jusque vers les 10 heures que le ciel commença à se couvrir; avant 10 heures je déterminai la position de la Comète en la comparant à l'Étoile de la veille, la vingt-huitième de la chevelure de Bérénice: je déterminai le même soir la position de trois nouvelles Étoiles qui pouvoient servir les jours suivans à la détermination des lieux de la Comète.

Le 8, le ciel fut couvert.

Le 9 beau temps; la Comète étoit encore apparente à la lunette achromatique; je la comparai à deux Étoiles nouvelles, déterminées le 7, & j'en déterminai trois autres le même soir: à 10 heures $\frac{1}{2}$, le vent étoit devenu sensible, & ensuite grande pluie.

Les 10, 11 & 12, le ciel fut couvert.

Le 13, beau temps le soir; je reconnus que la Comète avoit perdu de sa lumière depuis le 9; je la comparai à deux Étoiles déterminées, & ensuite j'observai son passage à la lunette achromatique placée dans le plan du Méridien avec ε de la Vierge, de la troisième grandeur.

Le 14 Avril au soir, le ciel fut parfaitement beau; comme la Comète devoit être ce soir près de l'étoile ρ de la Vierge, de la cinquième grandeur, je la cherchai avec la lunette de nuit, & je la vis encore, mais extrêmement affoiblie, & il falloit savoir qu'elle existoit près de cette Étoile, pour pouvoir dire que c'étoit la Comète: je comparai le noyau à cette étoile ρ & à l'étoile ε de la même constellation; j'observai aussi son passage au Méridien, à la lunette achromatique, avec les mêmes Étoiles.

Le 15 beau temps; je comparai la Comète à l'étoile ρ de la Vierge, ensuite je l'observai au Méridien avec la même Étoile: le ciel étoit moins beau que la veille; la Comète se

perdoit de vue de temps à autre, quoique dans le champ de la lunette achromatique : la dernière observation fut un peu douteuse. Le même soir en cherchant la Comète, j'aperçus une Étoile nébuleuse extrêmement foible, & deux autres nébuleuses encore plus foibles en lumière, toutes trois placées près du lieu de la Comète, & presque sur le parallèle de l'étoile ε de la Vierge, de la troisième grandeur; la première de ces trois nébuleuses devoit être si près de la Comète, le 13 Avril, ainsi que le 14, que, quoique j'aie observé la Comète, ces deux jours, cette nébuleuse ne fut point aperçue, & ce ne fut que le 15 que je pus la voir, ainsi que les deux autres; je les comparai toutes trois l'une à l'autre, & ensuite l'une des trois à l'étoile ε de la Vierge : voici leurs positions déterminées.

TROIS NÉBULEUSES déterminées dans la VIERGE.	ASCENSION droite.	DÉCLINAIS. boréale.
La première, d'une lumière très-foible.	$186^d\ 37'\ 23''$	$13^d\ 2'\ 42''$
La seconde, de la même lumière . . .	187. 41. 38	12. 52. 36
La troisième, un peu plus apparente....	188. 6. 53	12. 46. 2

Ces trois nébuleuses qui ne contiennent aucune Étoile, étoient toutes trois d'une lumière si foible, que la moindre lumière employée pour éclairer les fils du micromètre, les faisoit disparoître : j'ai rapporté ces trois nébuleuses sur la Carte de la route de la Comète.

Le 16, ciel couvert le soir.

Le 17 Avril, le ciel fut parfaitement beau & pur; la Comète étoit encore visible à la lunette achromatique, mais sa lumière étoit sensiblement diminuée : je comparai la Comète à la même Étoile des jours précédens, ρ de la Vierge; je l'observai aussi à son passage au Méridien : les observations sont rapportées dans la première Table.

Le 18, beau temps; la Comète fut comparée à une Étoile

nouvelle, de la huitième grandeur, que je déterminai en la comparant à l'étoile ρ de la Vierge: la Comète fut aussi observée au Méridien, à la lunette achromatique, avec la même Étoile.

Le 19, le ciel parfaitement beau le soir jusque vers les 10 heures $\frac{1}{4}$ qu'il se couvrit presque entièrement; je comparai la Comète à la même Étoile du jour précédent, de la huitième grandeur.

Le 20, beau temps dans le temps des observations; la Lune étoit sur l'horizon, mais nouvelle & éloignée du lieu où se trouvoit la Comète; elle n'empêcha pas de la voir à la lunette, & de la comparer à la même Étoile nouvelle des jours précédens; j'observai aussi son passage au Méridien à la lunette achromatique: le même soir, je déterminai la position de plusieurs Étoiles dont les lieux n'avoient pas encore été connus.

Le 21, je comparai encore la Comète à la même Étoile, de la huitième grandeur des jours précédens: je ne pus voir la Comète à son passage au Méridien, le ciel alors étoit couvert de nuages rares.

Le 22 au soir, beau temps, mais la Lune étoit sur l'horizon qui répandoit une grande lumière; ce ne fut pas sans peine que je pus revoir la Comète, quoique dans le champ de la lunette, je la perdois de temps à autre; il me réussit cependant de la voir assez pour pouvoir la comparer plusieurs fois à une Étoile nouvelle, de la septième grandeur, dont je déterminai le lieu: en observant la Comète, j'aperçus à peu de distance d'elle une Étoile nébuleuse, qui paroissoit en même temps que la Comète dans le même champ de la lunette; la Comète & la nébuleuse avoient même apparence & même lumière, l'une & l'autre sur le même parallèle: je fus dans l'incertitude de savoir laquelle des deux étoit la Comète; je fus obligé d'observer l'une & l'autre, & ce n'a été qu'en réduisant les observations que j'en avois faites, que j'ai reconnu la Comète d'avec la nébuleuse. Avant la réduction des observations & même après, je soupçonnai que cette nébuleuse qui ressembloit

Nébuleuse découverte le 19 Février 1771, comparée à la Comète, & de même grandeur qu'elle.

à la Comète, en étoit une nouvelle qui commençoit à paroître, & j'en étois d'autant plus persuadé que les jours d'avant je ne l'avois pas aperçue, & je ne fus assuré que le lendemain 23 que c'étoit une nébuleuse, en ce qu'elle n'avoit pas changé de position. J'ai trouvé ensuite dans le Journal de mes observations, que j'avois déjà vu cette nébuleuse le 19 Février 1771: voici ce que j'en avois écrit. « En parcourant le ciel du côté » du sud-est avec ma lunette achromatique, j'ai découvert dans » la Vierge une petite nébuleuse qui est ronde, le centre un » peu plus brillant que les bords (ce pourroit bien être une » Comète, il faudra l'examiner de nouveau); cette nébuleuse » se voyoit avec peine avec une lunette ordinaire de 3 pieds $\frac{1}{2}$, » & on ne pouvoit pas l'apercevoir avec la lunette de nuit: voici sa position. »

NÉBULEUSE DANS LA VIERGE.	ASCENSION droite.	DÉCLINAIS. boréale.
Le 19 Février 1771	184^d 26' 58"	9^d 16' 9"
Le 22 Avril 1779	184. 58. 30	9. 14. 34

Le 23 Avril au soir, le ciel fut parfaitement beau aux environs du lieu de la Comète, & ce ne fut pas sans peine que je pus la voir à cause de la foiblesse de sa lumière, & à cause de la Lune qui étoit sur l'horizon; je la comparai à la même Étoile de la veille & à la même nébuleuse rapportée ci-dessus: je reconnus le soir 24, que la nébuleuse n'avoit pas changé de position depuis la veille.

Comète comparée à la nébuleuse de la Vierge.

Le 24 au soir, je cherchai la Comète dans l'endroit du ciel où elle devoit être, & j'étois sûr de la voir dans le champ de la lunette achromatique; mais la grande lumière de la Lune l'avoit fait entièrement disparoître, & il ne fut pas possible de la voir malgré les soins que je pris pour l'apercevoir, même vers son passage au Méridien: la nébuleuse avoit

également disparu. D'après ces recherches, je présumai qu'il ne seroit plus possible de la voir pendant tout le temps que la Lune resteroit sur l'horizon en même temps que la Comète, & que le 23 seroit peut-être le terme de mes observations.

Le 5 Mai au soir, par un beau temps & sans Lune, je recherchai encore la Comète avec la lunette achromatique, n'ayant pu la revoir depuis le 24 d'Avril, à cause de la grande lumière de la Lune & du mauvais temps; c'étoit presque sans espérance de la revoir: cependant, après beaucoup de peines & de recherches, je découvris une lumière extrêmement foible & presque éteinte; cette lumière n'étoit qu'une nuance blanchâtre qui échappoit à l'œil, quoique vue dans la lunette achromatique; cette lumière paroissoit entre les Étoiles, savoir, la dix-septième, de la sixième grandeur, & l'étoile *c*, de la quatrième, toutes deux de la constellation de la Vierge, suivant le Catalogue de Flamstéed: j'en déterminai la position, ainsi que le 6 & le 11, dans la persuasion que c'étoit la Comète elle-même que j'observois; pendant ces trois jours d'observations, je ne lui avois trouvé aucun mouvement apparent, & je présumai que la Comète étoit alors stationnaire: à la dernière observation, j'eus quelque doute si c'étoit la Comète ou une nouvelle nébuleuse; je cherchai aux environs de cette nébulosité pour voir si je ne découvrirois pas quelqu'autre lumière aussi foible: enfin, après bien des recherches & beaucoup d'attentions, je découvris auprès de l'étoile *c* de la Vierge, une lumière semblable à celle que je venois d'observer, & c'étoit la Comète ellemême que je comparai à l'étoile *c* de la Vierge; sa position en est rapportée dans la première Table. Voici celle de la nébuleuse que j'avois prise pour la Comète, les 5, 6 & 11 de ce mois.

Nébuleuse découverte dans la Vierge, prise pour la Comète pendant trois jours.

NÉBULEUSE DANS LA VIERGE.	ASCENSION droite.	DÉCLINAIS. boréale.
Le 11 Mai 1779	182d 41′ 5″	5d 42′ 5″

Les 12, 13 & 14 Mai, le ciel ne fut pas assez beau pour pouvoir rechercher la Comète & la voir.

Le 15 au soir, beau temps; je recherchai la Comète que je trouvai un peu au-dessous de l'endroit où je l'avois vue le 11, mais sa lumière étoit si rare & si foible, vue à la lunette achromatique, que la moindre lumière que j'étois obligé d'employer pour éclairer les fils du micromètre, la faisoit disparoître, & sans lumière même elle échappoit à l'œil, quoique dans l'instrument; ce ne fut pas sans peine que je pus la comparer à une Étoile de la sixième grandeur, dont le lieu n'avoit pas encore été déterminé: pour déterminer la position de cette Étoile, je la comparai à l'étoile *c* de la Vierge, par le moyen d'une Étoile intermédiaire, de la huitième grandeur; la lumière de la Comète étoit beaucoup plus foible que celle de la nébuleuse observée le 11.

La Comète plus foible que la nébuleuse.

Le 16 Mai, le ciel fut couvert.

Dernière Observation.

Le 17, le ciel fut parfaitement beau le soir, je vis encore la Comète, & ce fut pour la dernière fois; je la comparai à la même Étoile du 15, de la sixième grandeur, & ce ne fut pas sans peine, ne pouvant plus éclairer les fils du micromètre sans faire disparoître la Comète, & l'observation en est par conséquent un peu douteuse: ainsi, c'est au 17 de Mai qu'est ma dernière observation.

La Comète a été observée quatre mois, pendant lesquels il y a eu soixante-trois jours d'observations, & deux cents vingt-trois déterminations du lieu du noyau de la Comète.

On ne doit pas, je crois, espérer qu'on puisse jamais découvrir une Comète aussi petite & aussi foible dans le commencement de son apparition, que celle-ci l'a été à sa fin. Des dix-sept Comètes que j'ai observées, celle-ci est la seule que j'aie pu suivre ayant aussi peu de lumière: aussi les dernières observations peuvent être regardées comme un peu douteuses, ne pouvant, à cause de la foiblesse de sa lumière, éclairer les fils du micromètre; je ne pouvois souvent que les soupçonner.

Pour avoir un terme de comparaison de la foiblesse de la lumière

lumière de cette Comète, à la fin de sa disparition, le 17 Mai, on pourra voir dans le ciel la nébuleuse de la Vierge, dont j'ai rapporté la position au 11 Mai; la Comète avoit moins de lumière encore que cette nébuleuse.

Des deux Tables que je joins à ce Mémoire, la première contiendra tous les lieux de la Comète observés en ascension droite & en déclinaison, avec les différences de passages de la Comète & des Étoiles au fil horaire du micromètre; il en sera de même dans la colonne qui suit pour les différences en déclinaison, entre la Comète & les Étoiles; le signe + signifie qu'il faudroit ajouter ces différences observées aux positions des Étoiles, avec laquelle la Comète a été comparée pour avoir celle de la Comète; & il en est de même du signe — pour ôter: ces deux colonnes, qui sont la base de toutes mes observations, deviennent susceptibles d'être vérifiées en tout temps & perfectionnées, si dans la suite on détermine avec plus de précision les positions des Étoiles qui ont été employées à la détermination des lieux de la Comète; la septième colonne détermine la grandeur des Étoiles; la suivante contient les lettres de Bayer & les numéros qui distinguent tant les Étoiles qui n'avoient pas encore été déterminées, que celles prises des Catalogues: la dernière colonne fait connoître les Étoiles des constellations qui ont servi à la détermination des lieux de la Comète.

La seconde Table contiendra les ascensions droites & les déclinaisons des Étoiles, tant celles qui ont été employées à la détermination du lieu de la Comète, prises des Catalogues, que des Étoiles nouvelles, réduites au temps des observations: je n'y ai fait d'autres réductions aux Étoiles connues, que celle qu'on trouve dans les Catalogues, sous le titre de *variation annuelle*.

Par cette seconde Table, on verra que le cours de la Comète, pendant quatre mois d'observations, m'a donné occasion de déterminer, par de nouvelles observations, les lieux de cent trente-huit Étoiles, dont les positions n'avoient

Cent trente-huit Étoiles déterminées.

pas encore été déterminées, & que la plus grande partie de ces Étoiles ont été employées à la détermination du lieu de la Comète.

Je joins aussi à ce Mémoire une Carte céleste que j'ai dessinée, & construite exactement sur mes observations; cette Carte est divisée en degrés d'ascension droite, & en degrés de déclinaison: j'y ai rapporté les positions de la route apparente que la Comète a tenue parmi les Étoiles fixes avec la trace de la queue & sa direction, de manière qu'il sera aisé de juger à l'inspection de cette Carte, de la position de la Comète observée, & de celle des Étoiles près desquelles elle a passé; j'y ai rapporté aussi la position de la Comète vue à Berlin, par M. Bode, le 6 Janvier, avec la ligne en points de sa route apparente, jusqu'au 18 du même mois que je la découvris à Paris. J'ai encore rapporté sur cette Carte, quatorze nébuleuses, dont les positions sont rapportées à la suite des Tables. J'ai encore rapporté depuis, sur cette Carte, onze nébuleuses observées en 1781, dans l'aile boréale de la Vierge; elles y sont désignées sous des numéros, & on en trouvera les détails & les positions dans la Connoissance des Temps, de 1784, *page 227*.

J'ai rapporté également sur la Carte un modèle d'*Étoiles*, au moyen duquel on pourra reconnoître leurs grandeurs.

De tous les modèles d'Étoiles qui ont été gravés jusqu'à présent sur les Globes & sur les Cartes célestes, aucun de ces modèles ne m'avoient satisfait pour pouvoir reconnoître leurs grandeurs; ce fut en 1759, pour les Cartes que je composai du retour de la célèbre Comète de 1682, que je cherchai un modèle d'Étoiles plus décisif & plus reconnoissable dans leurs grandeurs que ce qui avoit été gravé jusqu'alors: le modèle que je donnai dans ces Cartes aux Étoiles me parut être le plus avantageux; l'Étoile se trouve désignée pour chaque grandeur, par des rayons pleins, & par d'autres plus alongés & plus fins: de manière qu'en donnant à une Étoile de la première grandeur, huit rayons;

pour la ſeconde, ſept; ainſi de ſuite, j'ai reconnu que dans toutes les Cartes que j'ai données des Comètes, que ces Étoiles étoient très-reconnoiſſables, & pluſieurs perſonnes en ont déjà adopté la forme ſur des Cartes, Atlas & Globes céleſtes. Voyez mes premières Cartes dans le volume de l'Académie, *année 1760, page 465:* j'ai donné auſſi aux figures des conſtellations le plus de légèreté poſſible pour qu'on puiſſe apercevoir toutes les Étoiles.

La Comète a paſſé, comme on le verra ſur la Carte, par les conſtellations de la Lyre, d'Hercule, la Couronne, le Bouvier, au-deſſous de la chevelure de Bérénice, a traverſé la Vierge, & a ceſſé de paroître dans l'aile auſtrale de cette conſtellation, au-deſſous de l'étoile *c*, ayant parcouru pendant les quatre mois d'obſervations, $107^d\ 26'\ 3''$ d'aſcenſion droite, & $30^d\ 37'\ 29''$ de déclinaiſon boréale.

A la rentrée publique de l'Académie, le 14 Avril 1779, je rendis compte d'une partie de mes obſervations, dans un Mémoire fort abrégé, que j'ai refondu dans celui-ci.

TABLE I. *Des Lieux apparens de la Comète de 1779, découverte le 19 Janvier au matin, comparée aux Étoiles fixes.*

1779.	TEMPS vrai.	ASCENSION droite observée.	DÉCLINAISON Boréale observée.	DIFFÉRENCE en ascens. dr. entre la Comète & les Étoiles.	DIFFÉRENCE en déclinaif. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettr. de Bayer & N.° des Étoiles.	ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Janv. 18	18. 8. 2	289. 7. 38	29. 32. 9	0. 16. 7 +	20. 4 −	5	a	
	18. 26. 54	289. 6. 46	29. 32. 41	0. 15. 15 +	20. 36 +	5	a	
	18. 46. 8	289. 5. 31	29. 33. 1	0. 14. 0 +	20. 56 +	5	a	du Cygne.
22	17. 13. 57	283. 48. 16	31. 14. 16	0. 52. 52 +	36. 48 −	6	λ	
	17. 22. 50	283. 47. 54	31. 15. 10	0. 52. 30 +	35. 54 −	6	λ	
	17. 22. 50	283. 47. 55	31. 15. 10	0. 20. 45 −	10. 28 −	6	134	déterminées.
	18. 25. 48	283. 44. 40	31. 16. 8	0. 24. 0 −	9. 30 −	6	134	
	18. 38. 2	283. 43. 39	31. 16. 24	0. 48. 15 +	34. 40 −	6	a	du Cygne.
	18. 38. 2	283. 43. 40	31. 16. 23	0. 25. 0 −	9. 15 −	6	134	déterminée.
23	17. 32. 47	282. 25. 12	31. 36. 13	0. 15. 0 −	47. 45 −	3	γ	
	17. 32. 47	282. 25. 17	31. 36. 4	0. 30. 7 −	15. 0 −	6	λ	
	17. 38. 28	282. 25. 5	31. 36. 15	0. 15. 7 −	47. 43 −	3	γ	
	17. 38. 28	282. 25. 9	31. 36. 11	0. 30. 15 −	14. 53 −	6	λ	
	18. 23. 33	282. 22. 42	31. 36. 50	0. 17. 30 −	47. 8 −	3	γ	de la Lyre.
	18. 23. 33	282. 22. 39	31. 36. 40	0. 32. 45 −	14. 24 −	6	λ	
	18. 37. 21	282. 21. 35	31. 37. 6	0. 18. 37 −	46. 52 −	3	γ	
	18. 37. 21	282. 21. 39	31. 37. 7	0. 33. 45 −	13. 57 −	6	λ	
24	17. 31. 49	281. 3. 27	31. 55. 0	1. 36. 45 −	18. 58 −	3	γ	
	17. 31. 49	281. 3. 27	31. 55. 0	1. 7. 45 −	42. 53 −	6	133	déterminée.
	17. 48. 24	281. 2. 24	31. 55. 34	1. 53. 0 −	4. 30 +	6	λ	
	18. 3. 11	281. 1. 27	31. 55. 39	1. 38. 45 −	28. 19 −	3	γ	
	18. 3. 11	281. 1. 27	31. 55. 41	0. 37. 0 +	22. 58 −	6	ν²	
	18. 3. 11	281. 1. 27	31. 55. 40	0. 38. 15 +	38. 43 −	6	ν¹	de la Lyre.
	18. 24. 23	281. 0. 27	31. 55. 50	1. 39. 45 −	28. 8 −	3	γ	
	18. 46. 39	280. 59. 27	31. 56. 14	0. 35. 0 +	22. 25 −	6	ν²	
30	17. 0. 12	272. 52. 8	33. 12. 48	7. 36. 45 −	5. 34 +	4	β	
	17. 0. 12	272. 51. 53	33. 12. 48	1. 56. 30 +	21. 45 −	7	125	déterminée.
	17. 44. 57	272. 49. 23	33. 13. 10	7. 39. 30 −	5. 56 +	4	β	de la Lyre.
	17. 44. 57	272. 49. 38	33. 13. 10	1. 54. 15 +	21. 23 −	7	125	
	18. 29. 49	272. 47. 23	33. 13. 21	0. 31. 15 +	14. 34 −	7	127	
31	17. 44. 52	271. 27. 53	33. 21. 33	4. 7. 30 +	5. 18 −	7	122	déterminées.
	17. 58. 35	271. 27. 8	33. 21. 2	0. 31. 45 +	3. 31 −	7	125	
	18. 23. 42	271. 25. 23	33. 21. 27	4. 5. 0 +	5. 22 −	7	122	
	18. 28. 56	271. 25. 23	33. 21. 5	0. 30. 0 +	3. 28 −	7	125	
Févr. 8	17. 44. 27	260. 32. 27	33. 41. 29	3. 15. 30 +	20. 39 +	5	κ	d'Hercule.
	17. 44. 27	260. 32. 27	33. 41. 29	0. 17. 45 +	14. 42 −	7	117	déterminée.

1779.	Temps vrai.	Ascension droite observée.	Déclinaison Boréale. observée.	Différence en ascens. dr. entre la Comète & les Étoiles.	Différence en déclinais. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	Étoiles avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Févr. 10	17. 4. 31	257. 50. 12	33. 37. 26	0. 33. 15 +	16. 36 +	5	u	d'Hercule.
	17. 23. 48	257. 48. 2	33. 37. 25	0. 31. 45 +	16. 35 +	5	u	
	17. 56. 55	257. 46. 49	33. 37. 51	0. 29. 52 +	17. 1 +	5	u	
11	14. 51. 13	256. 35. 20	33. 34. 43	0. 41. 37 —	13. 53 +	5	u	
	15. 40. 14	256. 32. 12	33. 34. 36	0. 44. 45 —	13. 46 +	5	u	
	17. 19. 58	256. 26. 42	33. 34. 23	0. 50. 15 —	13. 33 +	5	u	
13	16. 34. 38	253. 46. 12	33. 25. 47	3. 30. 45 —	4. 57 +	5	u	
	16. 34. 38	253. 46. 54	33. 25. 36	0. 25. 15 +	27. 52 —	6	d	
	17. 2. 8	253. 43. 54	33. 25. 29	0. 22. 15 +	27. 59 —	6	d	
17	14. 14. 42	248. 16. 47	32. 59. 10	0. 2. 0 +	58. 27 +	3	ζ	
	14. 16. 13	248. 16. 47	32. 59. 11	0. 2. 0 +	58. 28 +	3	ζ	
	15. 47. 57	248. 11. 32	32. 58. 24	0. 3. 15 —	57. 41 +	3	ζ	
	15. 49. 28	248. 11. 32	32. 58. 23	0. 3. 15 —	57. 40 +	3	ζ	
18	15. 47. 11	246. 46. 47	32. 49. 40	1. 28. 0 —	48. 57 +	3	ζ	
	15. 56. 12	246. 46. 32	32. 49. 40	1. 28. 15 —	48. 57 +	3	ζ	
	16. 25. 10	246. 45. 25	32. 49. 31	3. 8. 30 +	2. 7 —	5	23	
	16. 25. 10	246. 45. 47	32. 49. 47	1. 52. 45 +	22. 23 —	6	26	
20	12. 50. 0	244. 6. 55	32. 31. 2	4. 7. 52 —	30. 19 +	3	ζ	
	13. 14. 49	244. 5. 10	32. 31. 6	0. 28. 15 +	20. 32 —	5	23	
	13. 24. 13	244. 5. 2	32. 30. 55	4. 9. 45 —	30. 12 +	3	ζ	
	13. 47. 51	244. 2. 55	32. 31. 14	0. 26. 0 +	20. 24 —	5	23	
	13. 47. 51	244. 2. 55	32. 31. 14	0. 50. 7 —	40. 56 —	6	26	
25	11. 27. 37	237. 0. 2	31. 28. 40	0. 37. 0 —	27. 12 +	8	109	déterminée.
	11. 41. 8	237. 0. 7	31. 28. 17	6. 22. 15 —	3. 11 +	5	ξ	de la Couronne.
	12. 33. 12	236. 56. 32	31. 27. 52	6. 26. 0 —	2. 46 +	5	ξ	
	12. 33. 12	236. 56. 32	31. 27. 52	0. 40. 30 —	26. 24 +	8	109	déterminée.
26	13. 21. 37	235. 27. 44	31. 12. 25	2. 41. 22 —	43. 7 +	5	ι	de la Couronne.
	13. 21. 37	235. 27. 37	31. 12. 26	0. 19. 37 —	38. 42 +	8	105	déterminées.
	13. 21. 37	235. 27. 44	31. 12. 25	2. 1. 0 —	33. 14 +	8	107	
	14. 11. 52	235. 23. 59	31. 11. 55	2. 45. 7 —	42. 17 +	5	ι	de la Couronne.
	14. 11. 52	235. 24. 7	31. 11. 34	0. 23. 7 —	37. 50 +	8	105	déterminées.
	14. 44. 48	235. 21. 59	31. 11. 18	0. 25. 15 —	37. 34 +	8	105	
27	11. 24. 6	234. 7. 36	30. 57. 33	4. 1. 30 —	28. 15 +	5	ι	de la Couronne.
	11. 24. 6	234. 7. 44	30. 57. 33	1. 39. 30 —	23. 49 +	5	105	déterminées.
	11. 24. 6	234. 7. 36	30. 57. 33	0. 46. 0 —	22. 13 +	8	103	
28	11. 15. 15	232. 41. 36	30. 40. 40	0. 3. 0 +	45. 59 +	8	99	
	11. 15. 15	232. 41. 36	30. 40. 50	3. 0. 30 +	48. 52 +	4	β	de la Couronne.
	11. 53. 8	232. 39. 21	30. 40. 11	5. 29. 45 —	10. 53 +	5	ι	
	11. 53. 8	232. 39. 29	30. 40. 10	4. 49. 15 —	0. 59 +	8	107	déterminée.
ars. 1	13. 43. 44	231. 6. 43	30. 19. 29	1. 25. 37 +	27. 31 +	4	β	de la Couronne.
	13. 43. 44	231. 6. 44	30. 20. 58	7. 4. 22 —	8. 20 —	5	ι	

1779.	TEMPS vrai.	ASCENSION droite observée.	DÉCLINAISON Boréale observée.	DIFFÉRENCE en ascens. dr. entre la Comète & les Étoiles.	DIFFÉRENCE en déclinais. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Mars. 2	16. 8. 37	229. 31. 21	29. 58. 55	0. 9. 45 —	6. 57 +	4	β	
	16. 22. 10	229. 30. 36	29. 58. 48	0. 10. 30 —	6. 50 +	4	β	
	16. 35. 45	229. 29. 51	29. 58. 35	0. 11. 15 —	6. 37 +	4	β	de la Couronne.
	17. 2. 8	229. 28. 6	29. 57. 59	0. 13. 0 —	6. 1 +	4	β	
	17. 2. 8	229. 28. 16	29. 57. 58	4. 48. 15 —	36. 1 +	8	97	déterminée.
3	10. 53. 42	228. 24. 21	29. 43. 31	1. 16. 45 —	8. 27 —	4	β	
	15. 53. 6	228. 6. 36	29. 39. 34	1. 34. 30 —	12. 24 —	4	β	
au Mér.	16. 12. 36	228. 5. 21	29. 39. 13	1. 35. 45 —	12. 45 —	4	β	
	16. 12. 36	228. 5. 21	29. 39. 14	0. 20. 22 +	45. 41 —	5	ε	
	16. 40. 35	228. 3. 51	29. 38. 53	1. 37. 15 —	13. 5 —	4	β	
4	10. 12. 38	227. 1. 36	29. 24. 9	2. 39. 30 —	27. 49 —	4	β	de la Couronne.
	10. 26. 23	227. 0. 36	29. 23. 49	2. 40. 30 —	28. 9 —	4	β	
	11. 3. 0	226. 58. 44	29. 23. 24	2. 42. 22 —	28. 34 —	4	β	
	12. 4. 48	226. 55. 6	29. 22. 25	2. 46. 0 —	29. 33 —	4	β	
5	9. 52. 13	225. 37. 36	29. 2. 40	4. 3. 30 —	49. 18 —	4	β	
	10. 10. 30	225. 36. 21	29. 2. 26	4. 4. 45 —	49. 32 —	4	β	
6	10. 36. 46	224. 11. 6	28. 40. 41	5. 20. 52 +	39. 45 +	3	ε	du Bouvier.
	10. 48. 41	224. 9. 59	28. 40. 40	1. 34. 45 +	37. 59 +	8	93	déterminée.
	11. 11. 25	224. 8. 59	28. 40. 15	5. 18. 45 +	39. 19 +	3	ε	du Bouvier.
	11. 40. 19	224. 6. 2	28. 40. 5	0. 31. 15 +	42. 49 +	8	95	déterminée.
7	9. 48. 14	222. 50. 14	28. 19. 3	4. 0. 0 +	18. 7 +	3	ε	
	10. 47. 41	222. 46. 29	28. 18. 11	3. 56. 15 +	17. 15 +	3	ε	
	10. 50. 47	222. 46. 15	28. 18. 5	0. 58. 45 —	28. 58 +	5	ψ	
	11. 32. 43	222. 43. 45	28. 17. 40	1. 11. 15 —	28. 33 +	5	ψ	
8	9. 15. 8	221. 28. 44	27. 56. 37	2. 38. 30 +	4. 19 —	3	ε	
	9. 15. 8	221. 28. 8	27. 56. 30	2. 16. 52 —	7. 23 +	5	ψ	
	9. 39. 27	221. 27. 31	27. 56. 12	2. 37. 7 +	4. 44 —	3	ε	
	9. 39. 27	221. 27. 30	27. 56. 14	2. 17. 30 —	7. 7 +	5	ψ	
	10. 58. 11	221. 23. 6	27. 54. 44	2. 32. 52 +	6. 12 —	3	ε	du Bouvier.
9	8. 54. 14	220. 8. 29	27. 33. 2	1. 18. 15 +	27. 54 —	3	ε	
	10. 2. 1	220. 4. 29	27. 30. 38	1. 14. 15 +	29. 18 —	3	ε	
	11. 21. 43	219. 59. 59	27. 29. 29	1. 9. 45 +	30. 27 —	3	ε	
10	9. 25. 43	218. 45. 30	27. 7. 47	0. 19. 45 +	21. 3 —	6	34	
	10. 11. 47	218. 43. 15	27. 7. 3	0. 17. 30 +	21. 47 —	6	34	
	10. 53. 15	218. 40. 45	27. 6. 17	0. 15. 0 +	22. 33 —	6	34	
11	9. 2. 44	217. 26. 30	26. 43. 8	0. 59. 15 —	45. 42 —	6	34	
	9. 24. 56	217. 25. 37	26. 42. 56	2. 48. 7 +	8. 39 —	7	85	déterminées.
	9. 24. 56	217. 25. 25	26. 42. 56	0. 35. 30 —	13. 32 —	8	88	
	10. 36. 46	217. 21. 15	26. 41. 9	1. 4. 30 —	47. 41 —	6	34	du Bouvier.
	10. 55. 54	217. 20. 35	26. 41. 7	2. 37. 15 +	10. 28 —	7	85	déterminées.
12	9. 13. 22	216. 7. 20	26. 16. 56	1. 24. 0 +	34. 39 —	7	85	

1779.	Temps vrai.	Ascension droite observée.	Déclinaison Boréale observée.	Différence en ascens. dr. entre la Comète & les Étoiles.	Différence en déclinais. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	Étoiles avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Mars 12	10. 38. 7	216. 2. 50	26. 15. 30	1. 19. 30 +	36. 5 —	7	85	
	11. 8. 14	216. 1. 35	26. 15. 19	1. 18. 15 +	36. 16 —	7	85	
13	9. 41. 9	214. 48. 20	25. 50. 49	1. 30. 15 +	30. 45 —	7	82	
	10. 28. 48	214. 45. 57	25. 49. 54	1. 27. 52 +	31. 40 —	7	82	
	10. 35. 17	214. 45. 28	25. 49. 47	0. 9. 45 +	18. 38 +	8	84	
	10. 46. 58	214. 44. 50	25. 49. 39	1. 26. 45 +	31. 55 —	7	82	déterminées.
17	11. 5. 47	209. 47. 43	23. 58. 18	1. 31. 45 +	25. 3 +	7	66	
	11. 10. 14	209. 46. 36	23. 58. 45	0. 16. 15 +	22. 1 +	8	70	
	11. 19. 47	209. 46. 44	23. 57. 52	0. 4. 52 —	13. 51 —	8	73	
	11. 26. 40	209. 46. 13	23. 58. 6	1. 30. 15 +	24. 51 +	7	66	
	14. 15. 48	209. 38. 13	23. 54. 34	1. 22. 15 +	21. 19 +	7	66	
	14. 41. 48	209. 37. 13	23. 54. 22	1. 21. 15 +	21. 7 +	7	66	
21	9. 36. 18	205. 21. 57	22. 7. 51	0. 33. 15 +	13. 55 —	6	6	
	9. 44. 48	205. 21. 27	22. 7. 43	0. 32. 45 +	14. 3 —	6	6	
	10. 5. 21	205. 20. 12	22. 7. 14	4. 19. 30 +	20. 15 +	8	53	
22	10. 22. 2	204. 16. 12	21. 38. 25	0. 32. 30 —	43. 21 —	6	6	
	10. 40. 53	204. 15. 57	21. 38. 17	0. 32. 45 —	43. 29 —	6	6	
	10. 49. 39	204. 15. 27	21. 38. 11	0. 33. 15 —	43. 35 —	6	6	du Bouvier.
	11. 6. 23	204. 15. 24	21. 37. 16	1. 43. 0 +	32. 40 +	6	1	
	11. 13. 34	204. 14. 12	21. 37. 40	0. 34. 30 —	44. 6 —	6	6	
23	9. 6. 32	203. 18. 39	21. 11. 16	0. 46. 15 +	6. 40 +	6	1	
	9. 17. 1	203. 17. 54	21. 11. 13	0. 45. 30 +	6. 37 +	6	1	
	9. 59. 50	203. 16. 9	21. 10. 24	0. 43. 45 +	5. 48 +	6	1	
24	8. 44. 11	202. 19. 35	20. 43. 37	9. 5. 0 —	23. 28 +	1	α	*Arcturus.*
	9. 23. 31	202. 18. 24	20. 42. 55	0. 14. 0 —	21. 41 —	6	1	du Bouvier
	9. 26. 34	202. 17. 50	20. 42. 54	9. 6. 45 —	22. 45 +	1	α	*Arcturus.*
	10. 6. 20	202. 16. 39	20. 42. 5	0. 15. 45 —	22. 31 —	6	1	du Bouvier.
25	8. 5. 57	201. 22. 50	20. 16. 19	10. 1. 45 —	3. 50 —	1	α	*Arcturus.*
	8. 5. 57	201. 22. 54	20. 16. 26	1. 9. 30 —	3. 13 —	7	56	déterminée.
	8. 51. 31	201. 21. 13	20. 15. 29	10. 3. 22 —	4. 40 —	1	α	*Arcturus.*
	8. 51. 31	201. 21. 9	20. 15. 34	1. 11. 15 —	4. 5 —	7	56	déterminées.
	10. 13. 32	201. 18. 24	20. 13. 53	1. 14. 0 —	5. 46 —	7	56	
26	8. 19. 17	200. 26. 40	19. 47. 39	5. 36. 40 —	16. 56 +	3	η	du Bouvier.
	8. 44. 58	200. 25. 35	19. 47. 28	10. 59. 0 —	32. 41 —	1	α	*Arcturus.*
	9. 33. 11	200. 23. 6	19. 46. 39	5. 40. 15 —	15. 51 +	3	η	du Bouvier.
27	7. 46. 21	199. 33. 28	19. 20. 53	2. 33. 30 —	2. 53 —	7	55	déterminée.
	7. 46. 21	199. 33. 36	19. 21. 7	6. 29. 45 —	9. 41 —	3	η	du Bouvier.
	8. 38. 10	199. 31. 21	19. 19. 50	4. 41. 45 +	37. 22 +	5	42	chevel. de Bérénice.
	8. 38. 10	199. 31. 29	19. 19. 51	3. 59. 15 +	0. 50 —	.....	.....	par la néb. de Bérén.
	9. 26. 13	199. 29. 44	19. 19. 0	6. 33. 37 —	11. 48 —	3	η	du Bouvier.
	9. 26. 13	199. 29. 43	19. 19. 9	2. 37. 15 —	4. 46 —	7	55	déterminée.

1779.	Temps vrai.	Ascension droite observée.	Déclinaison Boréale observée.	Différence en ascens. dr. entre la Comète & les Étoiles.	Différence en déclinais. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettre de Bayer, & N.° des Étoiles.	Étoiles avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Mars 28	8. 49. 24	198. 38. 6	18. 52. 26	3. 48. 30 +	9. 58 +	5	42	de Bérénice.
	10. 4. 20	198. 35. 43	18. 50. 41	3. 46. 7 +	8. 13 +	5	42	
	10. 4. 20	198. 35. 36	18. 50. 34	3. 5. 22 +	30. 7 —	...	...	nébul. de Bérénice.
	10. 29. 59	198. 34. 46	18. 49. 54	3. 45. 10 +	7. 26 +	5	42	de Bérénice.
29	10. 28. 21	197. 43. 59	18. 22. 47	2. 18. 30 +	19. 22 —	8	40	déterminée.
	10. 44. 47	197. 43. 36	18. 22. 30	2. 54. 0 +	19. 58 —	5	42	de Bérénice.
30	9. 21. 11	196. 57. 10	17. 57. 27	2. 12. 0 +	4. 57 —	7	37	
	10. 3. 22	196. 55. 40	17. 56. 32	2. 10. 30 +	5. 52 —	7	37	
31	12. 23. 27	196. 3. 45	17. 27. 22	0. 4. 30 —	4. 33 +	8	42	
	12. 34. 14	196. 3. 55	17. 26. 58	1. 18. 45 +	35. 26 —	7	37	
	12. 44. 34	196. 3. 15	17. 26. 59	0. 5. 0 —	4. 10 +	8	42	
Avril 1	7. 18. 51	195. 27. 40	17. 6. 30	0. 6. 0 +	12. 44 —	8	39	
	7. 51. 43	195. 27. 33	17. 6. 3	0. 39. 30 +	14. 34 —	8	38	
	9. 17. 55	195. 24. 10	17. 4. 14	0. 2. 30 +	15. 0 —	8	39	
au Mér.	12. 16. 5	195. 18. 25	17. 1. 19	0. 3. 15 —	17. 55 —	8	39	déterminées.
2	7. 55. 35	194. 42. 26	16. 39. 30	0. 18. 35 +	1. 55 —	8	36	
	8. 3. 38	194. 42. 21	16. 39. 15	0. 18. 30 +	2. 10 —	8	36	
	12. 1. 4	194. 34. 38	16. 34. 54	0. 10. 47 +	6. 31 —	8	36	
au Mér	12. 9. 38	194. 34. 36	16. 34. 44	0. 10. 45 +	6. 41 —	8	36	
3	8. 20. 33	193. 58. 59	16. 13. 0	0. 24. 52 —	28. 25 —	8	36	
	8. 54. 40	193. 57. 59	16. 12. 8	0. 25. 52 —	29. 17 —	8	36	
	11. 46. 48	193. 53. 21	16. 9. 21	0. 30. 30 —	32. 4 —	8	36	
au Mér.	12. 3. 17	193. 52. 36	16. 9. 11	0. 31. 15 —	32. 14 —	8	36	
au Mér.	12. 3. 17	193. 52. 28	16. 8. 49	0. 5. 45 +	5. 56 +	9	34	
4	8. 50. 47	193. 16. 54	15. 46. 48	3. 48. 52 +	26. 32 +	6	29	de Bérénice.
	8. 50. 47	193. 16. 55	15. 46. 48	0. 32. 52 —	8. 34 —	8	35	déterminée.
5	8. 53. 8	192. 37. 32	15. 21. 39	18. 10. 30 +	26. 48 —	2	β	du Lion.
	9. 21. 16	192. 37. 9	15. 20. 56	1. 32. 15 +	11. 54 —	7	30	déterminées.
au Mér.	11. 50. 42	192. 32. 2	15. 18. 55	3. 4. 0 +	1. 21 —	6	29	
6	8. 18. 6	192. 0. 2	14. 57. 44	2. 32. 0 +	22. 32 —	6	29	
	8. 18. 6	192. 0. 2	14. 57. 49	2. 41. 45 +	11. 32 +	7	28	
au Mér.	11. 44. 38	191. 56. 2	14. 54. 26	2. 28. 0 +	25. 56 —	6	29	de Bérénice.
au Mér.	11. 44. 38	191. 56. 2	14. 54. 21	2. 37. 45 +	8. 4 +	7	28	
7	8. 30. 28	191. 24. 17	14. 33. 20	2. 6. 0 +	12. 57 —	7	28	
9	8. 6. 59	190. 16. 40	13. 45. 59	0. 25. 37 —	8. 13 +	6	29	
	8. 44. 11	190. 15. 47	13. 45. 49	0. 26. 30 —	8. 3 +	6	29	déterminées.
13	8. 38. 11	188. 15. 23	12. 15. 50	2. 15. 30 +	30. 26 —	8	16	
	10. 36. 42	188. 13. 8	12. 14. 21	2. 13. 15 +	31. 55 —	8	16	
au Mér.	11. 4. 16	188. 12. 38	12. 13. 16	4. 35. 15 —	4. 13 +	3	ε	
14	8. 28. 20	187. 49. 8	11. 54. 10	4. 58. 45 —	14. 53 —	3	ε	de la Vierge.
	8. 28. 20	187. 49. 2	11. 54. 10	0. 8. 30 +	26. 35 +	5	ρ	

1779.	Temps vrai.	Ascension droite observée.	Déclin. Boréale observée.	Différence en ascens. dr. entre la Comète & les Étoiles.	Différence en déclinais. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	Étoiles avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Avril 14	10. 2. 28	187. 47. 38	11. 53. 13	5. 0. 15 —	15. 50 —	3	ε	
	10. 2. 28	187. 47. 32	11. 53. 19	0. 7. 9 +	25. 44 +	5	ρ	
au Mér.	10. 58. 50	187. 46. 38	11. 52. 17	5. 1. 15 —	16. 46 —	3	ε	
	10. 58. 50	187. 46. 32	11. 52. 13	0. 6. 0 +	24. 38 +	5	ρ	
15	9. 48. 22	187. 22. 17	11. 32. 22	0. 18. 15 —	4. 47 +	5	ρ	de la Vierge.
au Mér.	10. 54. 19	187. 20. 32	11. 31. 37	0. 20. 0 —	4. 2 +	5	ρ	
17	8. 18. 52	186. 36. 17	10. 52. 29	1. 4. 15 —	35. 6 —	5	ρ	
	8. 30. 6	186. 36. 2	10. 52. 10	1. 4. 30 —	35. 25 —	5	ρ	
au Mér.	10. 42. 57	186. 35. 2	10. 50. 51	1. 5. 30 —	36. 44 —	5	ρ	
18	9. 55. 26	186. 14. 17	10. 31. 55	1. 25. 45 —	34. 20 —	8	10	
	10. 10. 10	186. 14. 17	10. 31. 54	1. 23. 22 +	25. 6 —	8	10	
au Mér.	10. 37. 33	186. 13. 40	10. 31. 47	1. 22. 45 +	25. 13 —	8	10	
19	9. 50. 57	185. 52. 25	10. 12. 48	0. 36. 52 —	11. 11 +	8	17	déterminées.
20	9. 49. 41	185. 33. 10	9. 53. 37	0. 56. 7 —	8. 0 —	8	17	
au Mér.	10. 27. 47	185. 32. 25	9. 52. 58	0. 56. 52 —	8. 39 —	8	17	
21	10. 1. 8	185. 13. 47	9. 34. 55	1. 15. 30 —	26. 42 —	8	17	
22	10. 23. 46	184. 55. 32	9. 16. 32	0. 6. 45 —	25. 49 +	7	11	
	10. 23. 46	184. 56. 15	9. 16. 3	0. 17. 45 +	1. 39 +	...	...	par la néb. de la ♍
23	9. 35. 23	184. 40. 17	8. 59. 16	0. 22. 0 —	8. 33 +	7	11	déterminée.
	9. 35. 23	184. 40. 15	8. 59. 37	0. 1. 45 +	14. 57 —	...	...	par la néb. de la ♍.
Mai 11	10. 15. 3	181. 51. 8	4. 20. 6	0. 26. 15 —	12. 42 —	4	c	de la Vierge.
15	9. 56. 7	181. 44. 8	3. 28. 29	1. 4. 15 +	1. 15 —	6	2	déterminée.
17	9. 55. 58	181. 41. 35	3. 4. 0	1. 1. 42 +	25. 44 —	6	2	

TABLE II. *Des Ascensions droites & des Déclinaisons des Étoiles avec lesquelles la Comète a été comparée. Leurs positions sont réduites au temps des Observations.*

ASCENSION droite des Étoiles.	DÉCLINAISON Boréale des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
174. 27. 2	15. 48. 27	2	β	du Lion, *Connoissance des Temps*, qui a servi à la détermination de plusieurs Étoiles.
181. 12. 2	16. 7. 50	5	6	de la chevelure de Bérénice, comparée à β du Lion.
182. 17. 23	4. 32. 48	4	ε	de la Vierge, Éphémérides de la Caille, Comète comparée le 11 Mai.
182. 29. 48	6. 32. 16	6	17	de la Vierge, Flamstéed.
185. 27. 55	11. 31. 14	7	20	de la Vierge, Flamstéed, comparée à ρ de la Vierge.
187. 36. 48	11. 38. 44	7	27	de la Vierge, comparée à la 15.e déterminée.
187. 40. 32	11. 27. 35	5	ρ	de la Vierge, comparée plusieurs fois à ε, Comète comparée les 14, 15 & 17 Avril.
188. 47. 32	10. 46. 59	7	33	de la Vierge, comparée à la 20.e déterminée.
189. 18. 17	10. 46. 17	7	28	de Bérénice, comparée à la 29.e déterminée, Com. comparée les 6 & 7 Avril.
189. 28. 2	15. 20. 16	6	29	de Bérénice, comparée à β du Lion, Com. comp. les 4, 5 & 6 Avril.
192. 47. 53	12. 9. 3	3	ε	de la Vierge, *Connoissance des Temps.*
194. 49. 36	18. 42. 28	5	42	de Bérénice, comparée à la 55.e déterminée, Comète comparée les 27, 28 & 29 Mars.
202. 32. 24	21. 4. 36	6	1	1.re du Bouvier, comparée à la 53.e & à *Arcturus*, Comète comparée les 22, 23 & 24 Mars.
204. 12. 14	18. 34. 7	4	τ	du Bouvier, comparée à celle n.° 7 du Bouvier, Flamstéed.
204. 48. 42	22. 21. 46	6	6	du Bouvier, comparée à ε, Comète comparée les 21 & 22 Mars.
205. 40. 54	19. 1. 52	7	7	du Bouvier, comparée à η du Bouvier.
206. 3. 21	19. 30. 48	3	η	du Bouvier, comparée à la 79.e déterminée Com. comparée les 26 & 27 Mars.
207. 4. 12	22. 46. 24	6	e	du Bouvier, comparée à la 64.e déterminée.
210. 4. 39	26. 9. 30	5	d	du Bouvier, comparée à la 76.e déterminée.
211. 24. 35	20. 20. 9	1	α	*Arcturus*, *Astronomie-nautique*, Comète comparée les 24, 25 & 26 Mars.
218. 25. 45	27. 28. 50	6	34	du Bouvier, comp. à ε, Com. comp. les 10 & 11 Mars.
218. 50. 14	28. 0. 56	3	ε	du Bouvier, *Connoissance des Temps*, Comète comparée les 6, 7, 8 & 9 Mars.

ASCENSION droite.	DÉCLINAISON des ÉTOILES.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
223. 45. 0	27. 49. 7	5	ψ	du Bouvier, comparée à ε, Comète comparée les 7 & 8 Mars.
226. 18. 59	29. 58. 36	5	χ	du Bouvier, comparée à la 97.e déterminée.
227. 44. 59	30. 24. 55	5	o	de la Couronne, comparée à β, Comète comparée le 3 Mars.
229. 41. 6	29. 51. 58	4	β	de la Couronne, comparée à ι, Comète comparée les 28 Février, 1, 2, 3, 4 & 5 Mars.
238. 9. 6	30. 29. 18	5	ι	de la Couronne, comparée à ξ, Comète comparée les 26, 27, 28 Février & 1.er Mars.
243. 22. 32	31. 25. 6	5	ξ	Couronne, comparée à ζ d'Hercule, Comète comp. le 25 Février.
243. 36. 55	32. 51. 38	5	23	d'Hercule, comparée à ζ; Comète comparée les 19 & 21 Février matin.
244. 53. 2	33. 12. 10	6	26	d'Hercule, comparée à ζ, Comète comparée les 19 & 21 Février matin.
248. 14. 47	32. 0. 43	3	ζ	d'Hercule, Comète comparée les 18, 19 & 21 Février matin.
253. 21. 39	33. 53. 28	6	d	d'Hercule, Comète comparée le 14 Février matin.
257. 16. 57	33. 20. 50	5	u	d'Hercule, comparée à ε, Comète comparée le 9 Février matin.
258. 5. 18	32. 45. 45	6	72	d'Hercule, comparée à ε d'Hercule.
280. 23. 12	32. 34. 23	6	ν^1	de la Lyre, comparée à ν^2, Comète comparée le 25 Janvier matin.
280. 24. 27	32. 18. 39	6	ν^2	de la Lyre, comparée à γ, Comète comparée le 25 Janvier matin.
280. 28. 53	33. 7. 14	4	β	de la Lyre, *Connoissance des Temps*, Com. comparée le 31 Janvier matin.
282. 40. 12	32. 23. 58	3	γ	de la Lyre, *Connoissance des Temps*, Comète comparée les 24 & 25 Janvier matin.
282. 55. 24	31. 51. 4	6	λ	de la Lyre, comparée à γ, Comète comparée les 23, 24 & 25 Janvier matin.
288. 51. 31	29. 12. 5	5	2	du Cygne, Flamſtéed, Comète comparée le 19 Janvier matin.
179. 29. 47	16. 3. 53	1	7	déterminée par β du Lion.
180. 39. 53	3. 29. 44	2	6	déterminée par le *n.° 7*, Comète comparée les 15 & 17 Mai.
181. 37. 47	16. 22. 33	3	6	déterminée par β du Lion.
181. 40. 8	2. 48. 26	4	6	déterminée par le *n.° 2*.
181. 45. 53	4. 20. 6	5	7	déterminée par l'étoile *c* de la Vierge.
182. 25. 43	5. 46. 9	6	9	déterminée par le *n.° 8*.

ASCENSION droite.	DÉCLINAISON des ÉTOILES.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.os des Étoiles.	NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	*D. M. S.*			
182. 32. 53	3. 57. 42	7	8	déterminée par *c* de la Vierge.
182. 44. 43	6. 5. 1	8	8	déterminée par la 17.e de la Vierge.
184. 6. 47	9. 50. 51	9	7	déterminée par le n.° *17.*
184. 50. 55	10. 57. 0	10	8	déterminée par ρ de la Vierge, Comète comparée le 18 Avril.
185. 2. 17	8. 50. 43	11	7	déterminée par le n.° *12*, Comète comparée les 22 & 23 Avril.
185. 33. 17	9. 11. 17	12	8	déterminée par le n.° *17.*
185. 35. 32	8. 54. 56	13	7	déterminée par le n.° *12.*
185. 49. 32	8. 58. 32	14	7	déterminée par le n.° *12.*
185. 55. 23	12. 3. 43	15	8	déterminée par le n.° *16.*
185. 59. 53	12. 46. 16	16	8	déterminée par le n.° *21*, Com. comp. le 13 Avril.
186. 29. 17	10. 1. 37	17	8	déterminée par la 33.e de la Vierge, Com. comp. les 19, 20 & 21 Avril.
187. 26. 2	10. 3. 23	18	8	déterminée par le n.° *17.*
187. 30. 17	16. 36. 49	19	8	déterminée par la 6.e de Bérénice, suiv.t Flamstéed.
187. 40. 2	11. 6. 15	20	8	déterminée par ρ de la ♍, Com. comp. le 18 Avril.
188. 13. 23	12. 8. 17	21	8	déterminée par ε de la Vierge, Comète comparée les 13 & 14 Avril avec ε.
188. 49. 40	10. 30. 15	22	8	déterminée par le n.° *20.*
188. 58. 32	10. 16. 54	23	8	déterminée par le n.° *17.*
189. 2. 3	13. 10. 23	24	7	déterminée par le n.° *29.*
189. 2. 17	16. 47. 56	25	6	déterminée par la 6.e de Bérénice, suivant Flamstéed.
189. 26. 8	13. 19. 8	26	8	déterminée par le n.° *24.*
190. 29. 47	16. 14. 2	27	8	déterminée par la 6.e de Bérénice.
190. 32. 32	13. 40. 29	28	8	déterminée par le n.° *24.*
190. 42. 17	13. 37. 46	29	6	déterminée par le n.° *33*, Com. comp. le 9 Avril.
191. 4. 54	15. 32. 50	30	7	déterminée par β du Lion, Com. comp. le 5 Avril.
191. 7. 32	13. 54. 32	31	8	déterminée par le n.° *33.*
192. 21. 7	15. 2. 58	32	8	déterminée par la 29.e de Bérénice, suiv. Flamstéed.
192. 36. 47	14. 22. 19	33	8	déterminée par la 28.e de Bérénice.
193. 46. 43	16. 2. 53	34	9	déterminée par le n.° *35.*
193. 49. 47	15. 55. 22	35	8	déterminée par la 29.e de Bérénice, & β du Lion, Comète comparée le 4 Avril.
194. 23. 51	16. 41. 25	36	8	déterminée par le n.° *38*, par *Arcturus* & β du Lion, Comète comparée les 2 & 3 Avril.
194. 45. 10	18. 2. 24	37	7	déterminée par la 42.e de Bérénice, Comète comp. les 30 & 31 Mars.

ASCENSION droite.	DÉCLINAISON des ÉTOILES.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
194. 48. 3	17. 20. 37	38	8	déterminée par le *n.° 37*, Com. comp. le 1.er Avril.
195. 21. 40	17. 19. 14	39	8	déterminée par le *n.° 37*, Com. comp. le 1.er Avril.
195. 25. 29	18. 42. 9	40	8	déterminée par la 42.e de Bérénice, Com. comp. le 29 Mars.
195. 34. 43	16. 30. 17	41	8	déterminée par le *n.° 36*.
196. 8. 15	17. 22. 49	42	8	déterminée par le *n.° 37*. Com. comp. le 31 Mars.
196. 26. 6	18. 28. 44	43	8	déterminée par la 42.e de Bérénice, suiv. Flamstéed.
196. 29. 6	18. 12. 48	44	8	déterminée par le *n.° 37*.
196. 42. 6	18. 28. 6	45	8	déterminée par la 42.e de Bérénice.
197. 23. 6	18. 56. 27	46	8	déterminée par la 42.e de Bérénice.
197. 25. 51	18. 44. 43	47	8	déterminée par la 42.e de Bérénice.
197. 44. 14	17. 15. 41	48	8	déterminée par la 42.e de Bérénice.
197. 46. 36	18. 55. 49	49	8	déterminée par la 42.e de Bérénice.
198. 11. 2	18. 27. 42	50	8	déterminée par la 42.e de Bérénice.
198. 14. 2	18. 29. 7	51	8	déterminée par la 42.e de Bérénice.
200. 54. 5	19. 40. 10	52	8	déterminée par η du Bouvier.
201. 0. 42	21. 46. 59	53	8	déterminée par la 6.e du Bouvier, Comète comp. le 21 Mars.
201. 8. 12	21. 55. 15	54	8	déterminée par le *n.° 53*.
202. 6. 58	19. 23. 46	55	7	déterminée par η du Bouvier, Comète comparée le 27 Mars.
202. 32. 24	20. 19. 39	56	7	déterminée par la 1.re du Bouvier, & *Arcturus*, Comète comparée le 25 Mars.
202. 32. 27	21. 8. 27	57	8	déterminée par le *n.° 53*.
203. 38. 12	21. 35. 18	58	8	déterminée par la 1.re du Bouvier, suiv. Flamstéed.
203. 38. 42	19. 31. 40	59	8	déterminée par η du Bouvier.
204. 54. 17	19. 46. 44	60	7	déterminée par la même η.
204. 58. 27	22. 22. 25	61	9	déterminée par la 6.e du Bouvier.
204. 59. 12	22. 22. 28	62	9	déterminée par la même 6.e
207. 40. 36	23. 2. 42	63	7	déterminée par l'étoile ε du Bouvier.
207. 54. 25	22. 37. 16	64	8	déterminée par le *n.° 65*.
207. 59. 44	21. 57. 20	65	8	déterminée par le *n.° 69*.
208. 15. 58	23. 23. 15	66	7	déterminée par le *n.° 63*, Com. comp. le 17 Mars.
208. 32. 36	20. 14. 52	67	8	déterminée par η du Bouvier.
208. 51. 14	23. 47. 12	68	8	déterminée par le *n.° 66*.
209. 29. 20	22. 14. 37	69	8	déterminée par le *n.° 75*.
209. 30. 21	23. 36. 44	70	8	déterminée par le *n.° 66*, Com. comp. le 17 Mars.

Ascension droite.	Déclinaison des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	Noms des Étoiles qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
209. 31. 56	25. 23. 17	71	7	déterminée par le n.° *76*.
209. 48. 58	21. 31. 16	72	8	déterminée par le n.° *75*.
209. 51. 36	24. 11. 43	73	8	déterminée par le n.° *66*, Com. comp. le 17 Mars.
210. 14. 58	23. 43. 49	74	7	déterminée par le n.° *70*.
210. 28. 35	21. 40. 57	75	7	déterminée par le n.° *80*.
210. 54. 10	25. 49. 51	76	8	déterminée par le n.° *82*.
211. 11. 39	20. 56. 1	77	8	déterminée par *Arcturus*.
211. 14. 3	24. 44. 24	78	7	déterminée par le n.° *71*.
211. 26. 7	19. 56. 44	79	7	déterminée par *Arcturus*.
211. 34. 50	21. 9. 12	80	7	déterminée par le n.° *77*.
211. 45. 58	25. 23. 0	81	7	déterminée par le n.° *71*, la déclinaison estimée.
213. 18. 5	26. 21. 34	82	7	déterminée par le n.° *85*, Com. comp. le 13 Mars.
213. 27. 50	24. 44. 12	83	7	déterminée par le n.° *71*.
214. 35. 43	25. 31. 9	84	8	déterminée par le n.° *86*, Com. comp. le 13 Mars.
214. 43. 20	26. 51. 35	85	7	déterminée par ε du Bouvier, Comète comparée les 11 & 12 Mars.
215. 8. 35	26. 5. 30	86	8	déterminée par le n.° *82*.
215. 38. 30	27. 40. 38	87	7	déterminée par le n.° *85*, déclinaison estimée.
218. 0. 55	26. 56. 28	88	8	déterminée par la 34.e du Bouvier, Comète comp. le 11 Mars.
219. 6. 44	28. 28. 12	89	8	déterminée par ε du Bouvier.
220. 48. 14	28. 24. 37	90	8	déterminée par le n.° *89*.
220. 49. 6	27. 22. 55	91	7	déterminée par ε du Bouvier.
222. 9. 40	27. 42. 53	92	8	déterminée par la même ε.
222. 35. 14	28. 2. 41	93	8	déterminée par la même ε.
223. 25. 14	29. 8. 4	94	6	déterminée par le n.° *89*.
223. 34. 47	27. 57. 16	95	8	déterminée par ε du Bouvier, Comète comparée le 6 Mars.
223. 43. 44	29. 56. 6	96	7	déterminée par la 94.e
224. 40. 1	29. 21. 57	97	8	déterminée par β de la Couronne, Comète comp. le 2 Mars.
225. 24. 14	30. 3. 38	98	6	déterminée par la 97.e
232. 38. 36	29. 54. 41	99	8	déterminée par β de la Couronne, Comète comp. le 28 Février.
233. 10. 37	30. 44. 32	100	7	déterminée par le n.° *101*.
233. 26. 29	30. 50. 44	101	8	déterminée par le n.° *105*.
234. 9. 21	30. 42. 3	102	8	déterminée par le n.° *101*.

ASCENSION droite.	DÉCLINAISON des ÉTOILES.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.° des Étoiles.	NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
234. 53. 36	30. 35. 20	103	8	déterminée par ι de la Couronne, Comète comp. le 27 Février.
235. 47. 6	31. 16. 39	104	7	déterminée par le n.° *101*.
235. 47. 14	30. 33. 44	105	8	déterminée par ι de la Couronne, Comète comp. les 26 & 27 Février.
236. 37. 51	30. 10. 48	106	7	déterminée par β de la Couronne.
237. 28. 44	30. 39. 11	107	8	déterminée par ι de la Couronne, Comète comp. les 26 & 28 Février.
237. 32. 51	30. 3. 47	108	7	déterminée par β de la Couronne.
237. 37. 2	31. 1. 28	109	8	déterminée par ξ de la Couronne, ξ & ζ d'Hercule, Comète comparée le 25 Février.
239. 24. 36	30. 30. 59	110	8	déterminée par ι de la Couronne.
242. 56. 47	31. 2. 57	111	8	déterminée par ξ de la Couronne.
244. 26. 40	32. 35. 20	112	8	déterminée par la 23.e d'Hercule, suiv.t Flamstéed.
254. 54. 49	31. 30. 20	113	7	déterminée par ε d'Hercule.
257. 16. 34	31. 47. 40	114	7	déterminée par la même ε.
258. 12. 52	31. 29. 7	115	7	déterminée par la même ε.
258. 26. 37	32. 12. 32	116	8	déterminée par la même ε.
260. 14. 42	33. 56. 11	117	7	déterminée par la même ε, Comète comparée le 9 Février matin.
262. 39. 42	32. 52. 24	118	7	déterminée par la 72.e d'Hercule.
263. 46. 57	33. 5. 23	119	8	déterminée par la même.
264. 2. 42	33. 19. 32	120	7	déterminée par la même.
266. 55. 27	32. 42. 19	121	7	déterminée par la même.
267. 20. 23	33. 26. 49	122	7	déterminée par le n.° *125*, Comète comparée le 1.er Février matin.
268. 8. 8	33. 14. 44	123	6	déterminée par le n.° *122*.
268. 22. 53	33. 20. 3	124	6	déterminée par la même *122*.
270. 55. 23	33. 24. 33	125	7	déterminée par β de la Lyre, Comète comparée les 31 Mars & 1.er Février matin.
271. 1. 28	33. 14. 56	126	8	déterminée par le n.° *125*.
272. 16. 8	33. 27. 55	127	7	déterminée par la même *125*, Comète comparée le 31 Janvier matin.
275. 47. 45	33. 29. 15	128	7	déterminée par la même *125*.
277. 7. 53	33. 17. 50	129	5	déterminée par la même *125*.
278. 3. 53	33. 29. 41	130	7	déterminée par la même *125*.
280. 6. 0	33. 32. 3	131	7	déterminée par la même *125*.
280. 19. 23	33. 27. 27	132	7	déterminée par β de la Lyre.

ASCENSION droite.	DÉCLINAISON des ÉTOILES.	Grandeur des Étoiles.	Lettres de Bayer, & N.os des Étoiles.	NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
282. 11. 12	32. 37. 53	133	6	déterminée par γ de la Lyre, Comète comparée le 25 Janvier matin.
284. 8. 40	31. 25. 38	134	6	déterminée par λ de la Lyre, Comète comparée le 23 Janvier matin.
288. 52. 39	27. 40. 8	135	7	déterminée par β du Cygne.
289. 15. 2	28. 20. 1	136	8	déterminée par le *n.° 135.*
289. 52. 32	29. 0. 52	137	7	déterminée par le *n.° 136.*
290. 27. 46	27. 30. 48	138	6	Étoile double de β du Cygne, déterminée par β.

POSITIONS de quatorze Nébuleuses rapportées sur la Carte de la route apparente de la Comète de 1779.

ASCENSION droite.	DÉCLINAISON des NÉBULEUSES.	Numéros.	NOMS DES CONSTELLATIONS où se trouvent les Nébuleuses.
D. M. S.	D. M. S.		
182. 41. 5	5. 42. 5	1	nébuleuse dans la Vierge, découverte le 11 Mai 1779.
184. 26. 58	9. 16. 9	2	dans la Vierge, découverte le 19 Février 1771, Comète comparée les 22 & 23 Avril.
186. 37. 23	13. 2. 42	3	dans la Vierge, découverte le 15 Avril 1779.
187. 41. 38	12. 52. 36	4	dans la Vierge, découverte le 15 Avril 1779.
188. 6. 53	12. 46. 2	5	dans la Vierge, découverte le 15 Avril 1779.
191. 27. 38	22. 52. 31	6	dans la chevelure de Bérénice, découverte le 1.er Mars 1780.
195. 30. 26	19. 22. 44	7	au-dessous de la chevelure de Bérénice, découverte le 27 Février 1777, Comète comparée les 27 & 28 Mars.
196. 5. 30	43. 12. 37	8	entre les Chiens de chasse, décou. par M. Méchain en 1779.
202. 51. 19	29. 32. 57	9	dans les Chiens de chasse, découverte le 3 Mai 1764.
248. 18. 48	36. 54. 44	10	à la cuisse droite d'Hercule, découverte le 1.er Juin 1764.
281. 20. 8	32. 46. 3	11	dans la Lyre, découverte le 31 Janvier 1779.
287. 0. 1	29. 48. 14	12	entre la Lyre & la tête du Cygne, découverte le 19, déterminée le 23 Janvier 1779.
295. 59. 9	18. 13. 0	13	Près de la Flèche, découv. par M. Méchain, le 28 Juin 1780.
297. 21. 41	22. 4. 0	14	dans le Renard, découverte le 12 Juillet 1764.

J'ai

J'ai déjà publié un grand Mémoire sur les Nébuleuses & les amas d'Étoiles que l'on observe sur l'horizon de Paris. Voyez *Mém. de l'Acad. ann. 1771, p. 435;* la *Connoiss. des Temps pour 1783, page 225;* & celle de *1784, p. 227.*

Je rapporterai en finissant ce Mémoire, différens élémens de cette Comète : les premiers ont été trouvés par M. le Président Bochard de Saron, Honoraire de cette Académie, d'après trois de mes observations, celles des 18 Janvier, 11 Février & 6 Mars; les deuxièmes, par M. le Chevalier d'Angos, d'après la première de mes observations de chaque jour; les troisièmes, par M. Méchain, d'après ses observations; & les quatrièmes, par M. Reggio, d'après les observations faites à Milan.

ÉLÉMENS.	M. DE SARON.	M. D'ANGOS.	M. MÉCHAIN.	M. REGGIO.
	S. D. M. S.	S. D. M. S.	S. D. M. S.	S. D. M. S.
Lieu du nœud ascendant......	0. 25. 3. 1	0. 25. 3. 57	0. 25. 5. 51	0. 25. 4. 19
Inclinaison de l'orbite.........	32. 26. 14	32. 25. 30	32. 24. 0	32. 24. 44
Lieu du périhélie dans l'orbite..	2. 27. 14. 0	2. 27. 13. 40	2. 27. 13. 11	2. 27. 12. 55
Logarithme de la dist. périhélie.	0,713218	0,713187	0,713127	0,712946
Passage au périhélie. Janv. 1779.	4j 2h 30′ 0″	4j 2h 24′ 30″	4j 2h 12′ 0″	4j 2h 54′ 20″
Sens du mouvement direct.				

TABLE des Observations qui ont été employées à la recherche des Élémens, par M. le Président de Saron.

1779.	TEMPS moyen.	ASCENSION droite observée.	DÉCLIN. Boréale observée.	LONGITUDE observée.	LONGITUDE calculée.	DIFFÉR. avec la Théorie.	LATITUDE Boréale observée.	LATITUDE Boréale calculée.	DIFFÉR. avec la Théorie
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.
anv. 18	18. 38. 0	289. 6. 46	29. 32. 41	297. 3. 35	297. 3. 35	—0. 0	51. 13. 56	51. 13. 56	—0. 0
évr. 11	17. 34. 36	256. 26. 42	33. 34. 23	249. 30. 54	249. 30. 52	—0. 2	56. 4. 55	56. 4. 59	+0. 4
lars. 6	11. 23. 0	224. 8. 59	28. 40. 15	210. 24. 35	210. 24. 35	—0. 0	43. 6. 58	43. 6. 58	—0. 0
26	8. 50. 40	200. 25. 35	19. 47. 28	190. 41. 4	190. 40. 14	—0. 50	26. 11. 25	26. 9. 10	—2. 15
vril 19	9. 49. 54	185. 52. 25	10. 12. 48	181. 16. 25	181. 17. 57	+1. 32	11. 41. 51	11. 39. 53	—1. 58
ai. 11	10. 11. 6	181. 51. 8	4. 20. 6	180. 1. 52	180. 0. 17	—1. 35	4. 42. 50	4. 41. 55	—0. 55
17	9. 52. 0	181. 41. 35	3. 4. 0	180. 19. 58	180. 20. 0	+0. 2	3. 29. 14	3. 26. 49	—2. 25

D'après mes trois premières obſervations des 18, 22 & 23 Janvier, M. l'abbé Boſcovich, Correſpondant de l'Académie, avoit recherché les élémens de cette Comète, par ſa méthode graphique d'approximation, qui eſt très-abrégée, & qu'il a publiée dans le *VI.e Tome des Mémoires des Savans Étrangers.* M. le Préſident de Saron avoit également employé la même méthode graphique, avant de faire le calcul par la méthode ordinaire; les élémens qui en ſont réſultés diffèrent peu des autres : les voici.

ÉLÉMENS.	M. DE SARON.	M. BOSCOVICH.
	S. D. M. S.	*S. D. M.*
Lieu du nœud aſcendant......	0. 26. 31. 31	0. 26. 10
Inclinaiſon de l'orbite........	32. 18. 0	32. 32
Lieu du périélie dans l'orbite...	2. 27. 33. 42	2. 25. 41
Diſtance périhélie..........	0,7139	0,715
Paſſage au périhélie, Janvier...	$4^j\ 3^h\ 30'$	$3^j\ 20^h$

Ces élémens, que l'on trouve promptement par trois premières obſervations d'une Comète, ſervent & abrègent de beaucoup le travail & les premiers tâtonnemens que l'on eſt toujours obligé de faire par les calculs de la méthode ordinaire.

M. le Chevalier d'Angos, Officier au régiment de Navarre, déjà connu avantageuſement de l'Académie, m'ayant demandé les obſervations que j'avois faites de la Comète, pour calculer les élémens de ſon orbite ; je lui envoyai ſoixante-trois obſervations, qui étoient la première obſervation faite chaque jour, priſes de la Table qui précède.

Voici l'extrait de la Lettre que M. le Chevalier d'Angos m'a fait l'honneur de m'écrire.

« J'ai l'honneur de vous adreſſer, Monſieur, les élémens » que j'ai déduits des ſoixante-trois obſervations que vous avez » eu la bonté de me communiquer. J'y joins une Table qui

renferme le temps moyen des obſervations, les longitudes & «
les latitudes de la Comète, déduites des aſcenſions droites «
& déclinaiſons que vous avez déterminées; les longitudes & «
les latitudes qui réſultent de la théorie; enfin, la comparaiſon «
des unes & des autres. «

J'ai d'abord employé, pour avoir une orbite parabolique «
approchée, une méthode analytique aſſez ſemblable à celle «
que l'on trouve dans l'immortel Ouvrage de Newton; je ſuis «
revenu enſuite aux méthodes de fauſſes poſitions : j'ai fait «
différentes combinaiſons pour reſſerrer les limites des erreurs, «
& vous verrez par la Table que j'y ai aſſez bien réuſſi. «

Nota. Dans la Table ſuivante, la différence des longitudes pour «
le 13 Février, va à 2′ 1″, & elle eſt dans un ſens contraire à celles «
qui précèdent & qui ſuivent; mais auſſi m'avez-vous mandé que «
cette obſervation eſt marquée *douteuſe* dans votre Journal, à cauſe «
des nuages. »

TABLE des positions de la Comète, déduites des Observations, & comparées aux positions calculées d'après les Élémens, par M. le Chevalier d'Angos.

1779.	TEMPS moyen.	LONGITUD. observées.	LONGITUD. calculées.	DIFFÉR. des Longitud.	LATITUD. observées.	LATITUD. calculées.	DIFFÉR. des Latitudes.
	H. M. S.	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*
Janv. 18	18. 19. 14	297. 4. 30	297. 5. 11	+ 0. 41	51. 13. 7	51. 13. 23	+ 0. 16
22	17. 26. 16	290. 10. 32	290. 11. 38	+ 1. 6	53. 44. 32	53. 45. 20	+ 0. 48
23	17. 45. 17	288. 17. 18	288. 18. 17	+ 0. 59	54. 17. 5	54. 17. 0	— 0. 5
24	17. 44. 36	286. 23. 10	286. 23. 31	+ 0. 21	54. 45. 13	54. 45. 21	+ 0. 8
30	17. 14. 6	274. 22. 2	274. 21. 30	— 0. 32	56. 38. 15	56. 38. 40	+ 0. 25
31	17. 58. 54	272. 14. 8	272. 15. 1	+ 0. 53	56. 48. 53	56. 48. 15	— 0. 38
Févr. 8	17. 59. 6	255. 35. 1	255. 36. 51	+ 1. 50	56. 41. 10	56. 42. 0	+ 0. 50
10	17. 19. 11	251. 33. 32	251. 34. 33	+ 1. 1	56. 18. 52	56. 19. 44	+ 0. 52
11	15. 5. 53	249. 43. 35	249. 45. 22	+ 1. 47	56. 6. 18	56. 7. 0	+ 0. 42
13	16. 49. 14	245. 39. 28	245. 37. 27	— 2. 1	55. 32. 6	55. 31. 55	— 0. 11
17	14. 29. 3	238. 3. 45	238. 4. 28	+ 0. 43	54. 4. 8	54. 4. 35	+ 0. 27
18	16. 1. 26	236. 3. 55	236. 4. 38	+ 0. 43	53. 35. 25	53. 36. 6	+ 0. 41
20	13. 4. 4	232. 37. 8	232. 37. 26	+ 0. 18	52. 40. 26	52. 41. 7	+ 0. 41
25	11. 40. 56	223. 58. 29	224. 0. 9	+ 1. 40	49. 48. 6	49. 48. 1	— 0. 5
26	13. 34. 46	222. 13. 1	222. 13. 24	+ 0. 23	49. 5. 57	49. 5. 41	— 0. 16
27	11. 37. 4	220. 43. 13	220. 44. 18	+ 1. 5	48. 28. 8	48. 28. 6	— 0. 2
28	11. 28. 1	219. 8. 55	219. 9. 57	+ 1. 2	47. 46. 1	47. 45. 34	— 0. 27
Mars 1	13. 56. 18	217. 27. 42	217. 27. 34	— 0. 8	46. 56. 43	46. 57. 33	+ 0. 50
2	16. 20. 56	215. 47. 20	215. 47. 38	+ 0. 18	46. 7. 6	46. 8. 14	+ 1. 8
3	11. 3. 50	214. 38. 20	214. 38. 26	+ 0. 6	45. 31. 2	45. 32. 11	+ 1. 9
4	10. 24. 34	213. 14. 24	213. 14. 14	— 0. 10	44. 45. 43	44. 46. 28	+ 0. 45
5	10. 3. 55	211. 51. 8	211. 50. 56	— 0. 12	43. 57. 51	43. 59. 11	+ 1. 20
6	10. 48. 13	210. 26. 48	210. 26. 13	— 0. 35	43. 8. 1	43. 8. 39	+ 0. 38
7	9. 59. 27	209. 9. 25	209. 8. 56	— 0. 29	42. 20. 11	42. 20. 38	+ 0. 27
8	9. 26. 6	207. 52. 42	207. 52. 55	+ 0. 13	41. 31. 4	41. 31. 18	+ 0. 14
9	9. 4. 56	206. 38. 50	206. 38. 24	— 0. 26	40. 41. 4	40. 41. 0	— 0. 4
10	9. 36. 11	205. 23. 40	205. 23. 27	— 0. 13	39. 48. 20	39. 48. 12	— 0. 8
11	9. 12. 54	204. 13. 22	204. 13. 32	+ 0. 10	38. 57. 10	38. 57. 0	— 0. 10
12	9. 23. 19	203. 4. 22	203. 4. 10	— 0. 12	38. 4. 21	38. 4. 20	— 0. 1
13	9. 50. 45	201. 56. 8	201. 56. 14	+ 0. 6	37. 11. 28	37. 10. 44	— 0. 44
17	11. 14. 13	197. 48. 18	197. 48. 13	— 0. 5	33. 36. 28	33. 37. 20	+ 0. 52
21	9. 43. 32	194. 20. 24	194. 20. 13	— 0. 11	30. 14. 24	30. 14. 5	— 0. 19

1779.	TEMPS moyen.	LONGITUD. observées.	LONGITUD. calculées.	DIFFÉR. des Longitud.	LATITUD. observées.	LATITUD. calculées.	DIFFÉR. des Latitudes.
	H. M. S.	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*
Mars. 22	10. 28. 57	193. 30. 34	193. 30. 49	+ 0. 15	29. 22. 9	29. 22. 14	+ 0. 5
23	9. 12. 59	192. 47. 49	192. 45. 53	— 1. 56	28. 35. 9	28. 35. 16	+ 0. 7
24	8. 50. 30	192. 4. 0	192. 3. 36	— 0. 24	27. 47. 2	27. 46. 58	— 0. 4
25	8. 11. 58	191. 22. 22	191. 22. 11	— 0. 11	27. 0. 4	26. 59. 47	— 0. 17
26	8. 24. 59	190. 42. 2	190. 41. 1	— 1. 1	26. 12. 4	26. 11. 46	— 0. 18
27	7. 51. 45	190. 3. 45	190. 2. 59	— 0. 46	25. 26. 53	25. 27. 10	+ 0. 17
28	8. 54. 28	189. 24. 16	189. 23. 48	— 0. 28	24. 39. 16	24. 38. 13	— 1. 3
29	0. 33. 7	188. 46. 35	188. 45. 41	— 0. 54	23. 51. 0	23. 49. 10	— 1. 50
30	9. 15. 38	188. 13. 54	188. 13. 4	— 0. 50	23. 9. 31	23. 8. 2	— 1. 29
31	12. 27. 33	187. 37. 11	187. 36. 32	— 0. 39	22. 21. 3	22. 19. 26	— 1. 37
Avril. 1	7. 22. 42	187. 12. 38	187. 11. 57	— 0. 41	21. 47. 49	21. 46. 15	— 1. 34
2	7. 59. 8	186. 42. 35	186. 41. 23	— 1. 12	21. 5. 27	21. 3. 52	— 1. 35
3	8. 23. 47	186. 13. 23	186. 12. 32	— 0. 51	20. 24. 2	20. 22. 46	— 1. 16
4	8. 53. 42	185. 45. 41	185. 45. 23	— 0. 18	19. 43. 27	19. 42. 33	— 0. 54
5	8. 55. 45	185. 20. 1	185. 19. 14	— 0. 47	19. 4. 55	19. 4. 7	— 0. 48
6	8. 20. 27	184. 55. 33	184. 55. 26	— 0. 7	18. 28. 15	18. 27. 32	— 0. 43
7	8. 32. 30	184. 32. 55	184. 31. 56	— 0. 59	17. 51. 48	17. 50. 46	— 1. 2
9	8. 8. 28	183. 50. 35	183. 49. 34	— 1. 1	16. 41. 45	16. 41. 0	— 0. 45
13	8. 38. 35	182. 37. 1	182. 36. 45	— 0. 16	14. 31. 11	14. 30. 46	— 0. 25
14	8. 28. 29	182. 21. 40	182. 21. 21	— 0. 19	14. 1. 1	14. 0. 46	— 0. 15
15	9. 48. 15	182. 6. 4	182. 5. 23	— 0. 41	13. 30. 28	13. 30. 7	— 0. 21
17	8. 18. 18	181. 40. 20	181. 40. 21	+ 0. 1	12. 35. 38	12. 35. 25	— 0. 13
18	9. 54. 36	181. 28. 38	181. 27. 38	— 1. 0	12. 8. 4	12. 6. 43	— 1. 21
19	9. 49. 53	181. 16. 26	181. 16. 41	+ 0. 15	11. 41. 52	11. 40. 41	— 1. 11
20	9. 48. 24	181. 6. 40	181. 6. 29	— 0. 11	11. 16. 40	11. 15. 22	— 1. 18
21	9. 59. 38	180. 56. 33	180. 56. 58	+ 0. 25	10. 51. 49	10. 50. 33	— 1. 16
22	10. 22. 4	180. 47. 20	180. 48. 9	+ 0. 49	10. 27. 46	10. 26. 16	— 1. 30
23	9. 33. 29	180. 40. 23	180. 40. 29	+ 0. 6	10. 5. 54	10. 3. 50	— 2. 4
Mai. 11	10. 11. 5	180. 1. 51	180. 0. 1	— 1. 50	4. 42. 48	4. 42. 41	— 0. 7
15	9. 52. 6	180. 12. 23	180. 11. 42	— 0. 41	3. 52. 41	3. 51. 19	— 1. 22
17	9. 50. 58	180. 19. 50	180. 19. 44	— 0. 6	3. 29. 13	3. 27. 36	— 1. 37

Cette Comète eſt nouvelle, c'eſt-à-dire qu'elle ne reſſemble à aucune de celles dont les élémens ont été donnés juſqu'à préſent : celle-ci fait la ſoixante-quatrième de calculée, de

manière à pouvoir la reconnoître dans le temps qu'elle reparoîtra.

RECUEIL des Obſervations de la Comète de 1779.

À PARIS.

La Comète a été obſervée à l'Obſervatoire royal.

Obſervée auſſi par M. Méchain, qui a donné le Mémoire de ſes obſervations à l'Académie, le 12 Mai 1779, avec les élémens de la Comète, qu'il en a déduits d'après ſes propres obſervations.

À BERLIN.

La Comète fut découverte à Berlin le 6 Janvier, par M. Bode, Aſtronome, de l'Académie royale des Sciences de cette ville; je n'eus connoiſſance de cette découverte que le 27 Janvier par M. Baër, Correſpondant de notre Académie, qui me dit: *je viens de lire dans une Gazette allemande, la découverte de votre Comète à Berlin.* Je le priai de me faire paſſer cette Gazette avec la traduction de l'article qui la concernoit: la voici.

Extrait de la Gazette de Hambourg, n.° 7, *du 12 Janvier.*

Le 6 de ce mois, à 7 heures $\frac{3}{4}$ du ſoir, M. Bode, Aſtronome, découvrit ici, à l'Oueſt-nord-oueſt, près de l'horizon, une Comète qu'on ne pouvoit que difficilement diſtinguer à l'œil; mais avec un téleſcope de 7 pieds, on la voyoit avec un noyau brillant, aſſez vif, avec une queue d'environ 25 minutes; elle étoit ſituée dans la voie lactée, entre le Dauphin & le Renard: en meſurant ſa diſtance de l'étoile α du Dauphin & de l'étoile vingt-neuvième dans le Renard, ſelon Flamſtéed, M. Bode détermina la longitude de la Comète de $12^d\ 28'$, & ſa déclinaiſon ſeptentrionale de $39^d\ 6'$.

A 9 heures, la Comète ſe coucha, & elle devoit ſe lever

à 5 heures du matin, mais un ciel entièrement couvert empêcha de l'obſerver.

Le 7 au ſoir, le ciel s'éclaircit un peu vers les 7 heures $\frac{1}{2}$, & l'on pouvoit obſerver la Comète pendant quelques minutes; elle étoit éloignée d'environ un degré de l'endroit du ciel où elle s'étoit trouvée la veille, de manière que ſa marche étoit dans une direction oppoſée à celle des ſignes, avec une augmentation de latitude boréale, s'étant approchée de l'étoile dix-huitième de la Flèche. Les vapeurs empêchèrent de faire des obſervations ultérieures, & depuis ce temps le ciel a toujours été couvert.

Dans la Gazette, *n.° 16*, on trouve la ſuite de ces obſervations.

Le temps couvert que nous avons eu ici, depuis près de ſeize jours, a interrompu les obſervations de la Comète.

Le 20 Janvier, M. Bode l'obſerva entre les étoiles ſeize, dix-ſept, vingt-deux & vingt-quatrième du Renard, ſelon Flamſtéed, ſous une longitude de $10^s 9^d$, & une latitude boréale de 43 degrés $\frac{1}{2}$: ce ne fut que le 21 au ſoir que le ciel s'éclaircit un peu, & à 6 heures on obſerva la Comète au téleſcope de 7 pieds; elle paroiſſoit à l'Oueſt-nord-oueſt, très-bas & dans une lumière foible où il y avoit des vapeurs.

Sa grandeur apparente ne paroiſſoit pas avoir augmentée depuis le 10; elle avoit pris ſon chemin par le cou du Cygne, en s'avançant vers la Lyre, par un mouvement rétrograde & une latitude boréale qui alloit en augmentant: elle ſe trouvoit à peu-près ſur la ligne qui va de β du bec du Cygne à l'étoile γ de la Lyre, mais plus près de la dernière.

Après 6 heures, le ciel ſe couvrit entièrement.

Si le temps peut s'éclaircir, on la verra au premier jour ſous la grande étoile de la Lyre: depuis le 6, ſon mouvement progreſſif a fait un chemin de 20 degrés dans un arc des plus grands du ciel; ſa courſe apparente a beaucoup de reſſemblance à celle de la Comète de 1707, mais non pas ſa courſe véritable.

À WHITE-KINGHTS, quinze lieues Nord-ouest de Londres.

M. le chevalier Englefield, de la Société royale de Londres, m'a mandé dans sa Lettre du 3 Mars 1779, « Notre ami de » Magellan m'a communiqué votre Notice sur la découverte » que vous venez de faire d'une nouvelle Comète; je l'ai cher- » chée, mais le temps toujours couvert m'a empêché de la voir: » ce n'a été que le 14 Février que j'ai commencé à l'apercevoir, » & depuis ce jour j'ai fait les observations suivantes.

1779.	TEMPS vrai.	ASCENSION droite.	DÉCLINAIS. Boréale.
	H.	D. M.	D. M.
Février. 14	13	252. 32	33. 31
16	13	249. 32 ½	33. 14¾
17	12	248. 21 ¼	32. 56¾
18	13	246. 59 ¼	32. 37¼
19	12	245. 31 ¼	32. 45¼
24	14	238. 10	31. 39
27	11	234. 3	31. 2

La Comète fut comparée le 14 à l'étoile *d* d'Hercule, les 16, 17, 18 & 19 avec ζ d'Hercule, les 24 & 27 à *ι* de la Couronne.

À MILAN.

La Comète y fut observée par M.[rs] Cesaris & Reggio; leurs observations sont rapportées dans les Éphémérides de Milan pour 1781, *page 247.* Elles sont aussi rapportées dans celles de 1782, avec quelques changemens occasionnés par le mouvement d'*Arcturus*, qu'on n'avoit pas employés. Voici la Table des positions de la Comète, prises des Éphémérides de 1782.

1779.

1779.	TEMPS moyen.	ASCENSION droite de la Comète observée.	DÉCLIN. Boréale de la Comète observée.	DIFFÉRENCE en ascension droite entre la Comète & les Étoiles.	DIFFÉRENCE en déclinaison entre la Comète & les Étoiles.	POSITIONS DES ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.
Mars 8	13. 18. 33	221. 18. 26	27. 53. 8	2. 28. 12 +	0. 23. 36 —	ε Bouvier.... A. D. 218. 50. 14
10	12. 6. 22	218. 38. 55	27. 4. 4	12. 41. 10 —	0. 23. 10 —	D. B. 28. 0. 44
11	11. 12. 4	217. 20. 55	26. 40. 11	13. 59. 10 —	0. 47. 3 —	
12	10. 40. 0	216. 4. 26	26. 15. 50	15. 15. 39 —	1. 11. 24 —	α Couronne.. A. D. 231. 20. 5
13	10. 44. 41	214. 47. 34	25. 48. 52	16. 32. 31 —	1. 38. 22 —	D. B. 27. 27. 14
14	9. 48. 51	213. 33. 50	25. 22. 58	17. 46. 15 —	2. 4. 16 —	
15	11. 5. 15	212. 15. 4	24. 54. 56	6. 35. 10 —	3. 5. 58 —	ε du Bouvier
18	10. 54. 24	208. 40. 47	23. 21. 44	2. 43. 12 —	3. 11. 37 +	
19	9. 25. 37	207. 36. 46	23. 5. 4	3. 47. 13 —	2. 44. 54 +	
20	9. 43. 0	206. 30. 25	22. 36. 32	4. 53. 34 —	2. 16. 25 +	*Arcturus*..... A. D. 211. 23. 59
22	9. 41. 34	204. 18. 56	21. 39. 51	7. 5. 3 —	1. 19. 44 +	D. B. 20. 20. 7
23	9. 15. 48	203. 18. 55	21. 11. 49	8. 5. 4 —	0. 51. 42 +	
24	8. 48. 26	202. 20. 40	20. 44. 34	9. 3. 19 —	0. 24. 27 +	
26	10. 12. 46	200. 22. 47	19. 47. 25	5. 39. 50 —	0. 16. 33 +	
27	11. 8. 56	199. 25. 17	19. 17. 42	6. 37. 20 —	0. 13. 10 —	
Avril 2	8. 12. 21	194. 42. 17	16. 39. 27	11. 20. 20 —	2. 51. 25 —	
3	8. 6. 15	194. 0. 29	16. 13. 37	12. 2. 8 —	3. 17. 15 —	η du Bouvier. A. D. 206. 2. 37
4	8. 0. 58	193. 19. 39	15. 48. 15	12. 42. 58 —	3. 42. 37 —	D. B. 19. 30. 52
5	8. 16. 39	192. 38. 55	15. 23. 5	13. 23. 42 —	4. 7. 47 —	
6	8. 57. 14	192. 2. 36	14. 58. 15	14. 0. 1 —	4. 32. 37 —	
7	8. 38. 46	191. 24. 31	14. 33. 21	1. 23. 31 —	2. 24. 18 +	
8	8. 50. 24	190. 49. 32	14. 9. 15	1. 58. 30 —	2. 0. 12 +	
10	8. 47. 35	189. 44. 19	13. 23. 1	3. 3. 43 —	1. 13. 58 +	
11	9. 9. 18	189. 13. 0	13. 0. 19	3. 35. 2 —	0. 51. 16 +	
12	9. 24. 23	188. 43. 25	12. 38. 10	4. 4. 37 —	0. 29. 7 +	ε de la Vierge. A. D. 192. 48. 2
13	9. 24. 31	188. 15. 27	12. 16. 12	4. 32. 35 —	0. 7. 9 +	D. B. 12. 9. 3
14	8. 29. 47	187. 49. 21	11. 55. 4	4. 58. 41 —	0. 13. 59 —	
15	8. 31. 55	187. 24. 13	11. 33. 40	5. 23. 49 —	0. 35. 23 —	
16	8. 37. 50	186. 59. 55	11. 13. 21	5. 48. 7 —	0. 55. 42 —	
19	10. 41. 23	185. 52. 4	10. 12. 17	36. 43. 5 +	2. 50. 16 —	*Regulus*..... A. D. 149. 8. 59 D. B. 12. 2. 23
21	9. 24. 34	185. 14. 51	10. 34. 13	7. 33. 11 —	2. 34. 50 —	ε, ♍.

À TOULOUSE.

La Comète y fut observée par M.[rs] Garipuy & Darquier; les observations de M. Garipuy ont été envoyées à M. le Monnier, qui les a communiquées à l'Académie: voici celles de M. Darquier, qu'il m'a envoyées en Septembre 1779; il a desiré que je les rapporte à la suite de mon Mémoire, avec un Catalogue d'Étoiles qu'il a déterminées.

TABLE des Positions de la Comète & des Étoiles qui ont été employées à sa détermination.

1779.	TEMPS vrai.	ASCENSION droite de la Comète.	DÉCLINAISON Boréale de la Comète	ASCENSION droite des Étoiles.	DÉCLINAIS. Boréale des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettr. de Bayer & N.° des Étoiles.	ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.			
Févr.. 11	13. 12. 14	256. 40. 57	33. 34. 26	257. 17. 33	33. 20. 38	5	υ	d'Hercule.
15	13. 59. 9	250. 11. 49	33. 14. 41	250. 41. 6	33. 31. 32	5	200	déter. par β, Lyre.
16	12. 4. 30	249. 48. 48	33. 6. 58	248. 49. 38	33. 6. 49	5	193	déter. par α Couron.
17	11. 56. 38	248. 26. 42	32. 57. 55	....	....	.....	.....	je crois la même.
18	12. 37. 3	246. 57. 58	32. 51. 29	243. 37. 8	32. 51. 6	5	23	d'Hercule.
19	12. 52. 1	245. 30. 56	32. 42. 45	243. 37. 8	32. 51. 6	5	23	
20	12. 18. 49	244. 8. 37	32. 31. 32	231. 0. 28	37. 7. 29	4	θ	
21	12. 33. 41	242. 41. 52	32. 19. 45	231. 0. 28	37. 7. 29	4	θ	
22	11. 42. 20	241. 18. 46	32. 7. 39	231. 0. 28	37. 7. 29	4	θ	
23	11. 31. 47	239. 52. 28	31. 56. 14	231. 0. 28	37. 7. 29	4	θ	de la Couronne.
24	11. 12. 10	238. 27. 31	31. 43. 43	231. 0. 28	37. 7. 29	4	θ	
25	11. 3. 47	237. 1. 28	31. 31. 2	231. 0. 28	37. 7. 29	4	θ	
26	11. 15. 49	235. 33. 17	31. 17. 38	243. 21. 58	31. 26. 39	5	ξ	
27	10. 30. 53	234. 10. 11	31. 1. 1	215. 34. 45	31. 20. 55	4	ρ	du Bouvier.
28	10. 47. 1	232. 44. 4	30. 46. 50	231. 57. 41	30. 46. 35	6	122	déter. par γ Bouvier.
Mars.. 7	9. 46. 35	222. 51. 54	28. 22. 53	194. 9. 20	28. 48. 10	.....	41	de Bérénice.
8	9. 42. 43	221. 27. 17	27. 58. 17	218. 50. 13	28. 0. 47	3	ε	du Bouvier.
9	10. 21. 59	220. 3. 18	27. 32. 30	218. 50. 13	28. 0. 47	3	ε	
10	9. 27. 47	218. 45. 16	27. 9. 39	231. 20. 22	27. 28. 7	2	α	
11	9. 15. 51	217. 26. 47	26. 42. 50	233. 23. 17	27. 0. 6	4	γ	de la Couronne.
	10. 31. 59	217. 22. 16	26. 42. 45	233. 23. 17	27. 0. 6	4	γ	
13	11. 30. 38	214. 40. 32	25. 50. 33	229. 30. 30	25. 52. 35	6	111	déter. par α Bouvier.
14	8. 42. 41	213. 35. 24	25. 21. 37	256. 29. 47	25. 6. 48	5	δ	d'Hercule.
17	8. 34. 9	209. 55. 47	23. 57. 38	202. 38. 35	23. 37. 5	6	a	du Bouvier.
21	9. 21. 17	205. 23. 18	22. 8. 13	245. 11. 17	21. 58. 53	3	β	d'Hercule.
	9. 21. 17	205. 22. 23	22. 8. 4	204. 48. 40	22. 19. 24	5	6	du Bouvier.
22	8. 30. 50	204. 21. 59	21. 38. 23	202. 32. 3	21. 4. 43	6	1	
	9. 9. 51	204. 19. 44	21. 37. 42	206. 0. 16	21. 42. 30	6	19	
23	7. 59. 18	203. 21. 11	21. 12. 49	206. 0. 16	21. 42. 30	6	19	du Catalogue.
24	8. 1. 5	202. 21. 20	20. 42. 56	206. 0. 16	21. 42. 30	6	19	
	9. 6. 8	202. 18. 55	20. 41. 52	211. 24. 51	20. 20. 36	1	α	Arcturus.
25	9. 31. 3	201. 19. 39	20. 14. 41	211. 24. 51	20. 20. 36	1	α	

Je ne fus instruit de l'apparition de la Comète de 1779, que par la Gazette de France, qui arriva ici le 9 Février, dans laquelle M. Messier annonçoit la découverte qu'il venoit d'en faire.

Le temps avoit été couvert depuis le 26 Janvier jusqu'au 10 de Février, excepté le 6, & dans la nuit du 9 au 10, jour auquel je la cherchai vers minuit; je la trouvai au pli de la cuisse gauche d'Hercule, & suivant l'étoile *u* de cette constellation, elle en étoit à 2 minutes environ de temps, & un peu plus boréale.

C'est avec ma lunette achromatique de 42 pouces de foyer, que je la trouvai; comme il n'y avoit point de réticule, je n'obtins cette première détermination, que par la sortie de l'Étoile & de la Comète du champ de la lunette, vers les 3 heures $\frac{1}{4}$ après minuit; quoiqu'elle ne puisse pas s'éloigner beaucoup de la vérité, je ne la place pas cependant au rang de mes observations.

Le noyau étoit peu brillant; on pouvoit lui soupçonner une queue courte & assez diffuse: la Comète devint de plus en plus apparente jusqu'aux 20 & 21 Février, où je la voyois très-bien à la vue simple; les jours suivans, la clarté de la Lune, qui fut en opposition le 23, la rendit fort difficile à voir.

Le 18 Février, son noyau parut beaucoup plus brillant que la veille; en la considérant pendant quelque temps, je vis une petite Étoile qu'elle avoit occultée, & qui continua de s'éloigner occidentalement.

Ayant déterminé, comme je l'ai rapporté, la position de la Comète, le 10 Février vers minuit, par la sortie de la Comète & de celle de l'étoile *u* d'Hercule du champ de la lunette, je disposai l'instrument dans la journée du 11, parallactiquement sur une méridienne tracée à la porte orientale de mon Observatoire; j'adaptai à la lunette un réticule rhomboïde, fait par Lenel, sous mes yeux: sa largeur fut déterminée par un grand nombre d'observations, de 25′ 15″ de grand cercle, & sa hauteur totale de 50′ 30″.

C'eſt avec cette lunette ainſi montée, que j'ai obſervé la Comète, depuis le 11 Février à $1^h\,12'\,14''$ après minuit, juſqu'au 25 de Mars à $9^h\,31'$: pendant cet intervalle de temps, la Comète a parcouru $55^d\,21'\,28''$ en aſcenſion droite, contre l'ordre des ſignes, & $13^d\,18'\,2''$ de déclinaiſon, en s'éloignant du pôle, & pendant cet intervalle de temps, j'ai obtenu trente-deux obſervations.

Ce qu'il y a de ſingulier, c'eſt que cette Comète, qui s'eſt d'abord approchée du pôle, s'en eſt éloignée enſuite dans ſes limites de déclinaiſons, & pour ainſi dire ſtationnaire, quand j'ai pu l'obſerver ici; car du 10 au 11 Février, elle ne parcouroit que 2 minutes en rétrogradant.

Je joins à chaque obſervation l'aſcenſion droite & la déclinaiſon de l'Étoile à laquelle la Comète a été comparée, avec le temps vrai, l'aſcenſion droite, conclue par la différence des paſſages, en tenant compte du mouvement de la pendule & de la déclinaiſon, par la même différence aux côtés obliques du réticule, réduit en degrés par les méthodes connues de l'uſage du rhomboïde. La poſition ſtable & invariable de la lunette, de la direction du fil horizontal, ſuivant le parallèle, permettoit de donner une grande préciſion aux obſervations; j'ai été cependant obligé de les abandonner au 25 *Mars*, à cauſe de la poſition de ma lunette, vis-à-vis de la porte orientale de mon Obſervatoire, devenant trop incommode par ſa grande élévation, ne pouvant plus l'apercevoir.

Il a paru peu de Comètes qu'on ait pu obſerver auſſi bien, auſſi commodément & auſſi long-temps que celle-ci; elle a eu même l'avantage qu'on a pu l'obſerver long-temps, & preſque toujours au Méridien, & tous les Aſtronomes ſavent que les obſervations faites à ce point, ſont préférables à celles faites dans d'autres, hors du Méridien.

En commençant les obſervations de la Comète, je m'aperçus qu'elle ſe trouvoit ſouvent ſur le parallèle de pluſieurs Étoiles, dont la poſition n'étoit pas compriſe dans le grand Catalogue Britannique, & que pluſieurs des Étoiles de Flamſtéed avoient beſoin d'être rectifiées, comme la vingt-troiſième d'Hercule,

qui est moins avancée dans Flamstéed, qu'elle ne devroit l'être d'environ 2′ 5″; la distance au pôle de δ de la Couronne trop foible de 5 minutes : ce sont des remarques pareilles qui m'ont engagé à observer un grand nombres d'Étoiles.

Profitant de la position de ma lunette achromatique, que j'avois placée parallactiquement pour observer la Comète, qui étoit garnie d'un réticule rhomboïde, dont j'avois déterminé les dimensions, comme je l'ai déjà rapporté, j'observai depuis le 10 Février jusqu'à la fin d'Avril, au fil horaire & aux côtés obliques du rhomboïde, les Étoiles qui passoient dans le même champ de la lunette que la Comète.

Comme le mouvement de la Comète en déclinaison étoit assez lent, j'avois la facilité de pouvoir observer deux jours de suite les mêmes Étoiles, & en faisant passer le troisième jour boréalement dans la lunette celles qui y avoient d'abord passé australement, je les déterminai l'une par l'autre.

Les plus boréales le furent par δ d'Hercule & β de la Lyre, depuis le 33.e degré 57 minutes de déclinaison boréale, & par les autres Étoiles connues qui se sont trouvées sur la route, jusqu'au 20.e degré, ce qui forme une zone d'environ 14 degrés de largeur, & qui commence à 181 degrés d'ascension droite, & s'étend jusqu'au 283.^e

J'ai refait les mêmes observations à l'occident, dans le mois de Juillet, ainsi toutes les Étoiles ont été observées deux fois, la plupart l'ont été trois.

C'est le résultat de ce travail qui formera le Catalogue que je rapporte, il sera composé de dix colonnes.

La première, contiendra les numéros des Étoiles, depuis 1 jusqu'à 271.

La deuxième, la grandeur des Étoiles.

La troisième, les ascensions droites.

La quatrième, leurs déclinaisons.

Les cinquième & sixième, la variation annuelle en ascension droite & en déclinaison, calculée directement.

Les septième & huitième, la différence de leurs positions avec celles du Catalogue britannique, les signes + ou —

les affectent selon que mes déterminations sont plus fortes ou plus foibles que celles de Flamstéed : en rapportant ces différences, je n'ai pas prétendu donner la préférence à mes déterminations sur celles de l'Auteur célèbre de ce Catalogue; mais si quelqu'Astronome dans la suite reprend ce travail, on sera plus à portée de démêler les mouvemens particuliers des Étoiles, si elles en ont.

La neuvième, les Étoiles qui appartiennent au Catalogue Britannique, désignée par les lettres grecques & par les numéros.

La dixième, les constellations auxquelles appartiennent les Étoiles.

Les observations ne donnant que les ascensions droites & les déclinaisons apparentes, je les ai réduites aux vraies & à l'époque du 1.er Janvier 1780, en les dépouillant de l'effet de l'aberration & de la nutation que j'ai calculées directement par les Tables, pour la très-majeure partie; les autres ont été calculées par celles qui sont rapportées dans la Connoissance des Temps de 1781.

Les Astronomes qui ont observé la Comète, trouveront dans ce Catalogue des Étoiles auxquelles ils l'auront comparée, sans avoir connu leur position.

Dans mon travail, j'ai rencontré quelques nébuleuses, dont la plupart sont inconnues; mais celle à laquelle je me suis arrêté, est une nébuleuse située entre les deux belles étoiles β & γ de la Lyre; elle est fort terne, mais parfaitement terminée; elle est grosse comme Jupiter, & ressemble à une Planète qui s'éteindroit: on trouvera sa position déterminée dans mon Catalogue.

Si l'on considère que cette nébuleuse, qui est placée entre deux belles Étoiles, qui sont très-près l'une de l'autre, pouvant passer en même temps dans le même champ de la lunette, & vers lesquelles les Astronomes ont dû souvent tourner leurs instrumens, il y a lieu de s'étonner qu'on n'en ait pas parlé; il faut convenir aussi qu'il faut une lunette assez forte pour l'apercevoir: seroit-ce une nouvelle production de la Nature? ou auroit-elle la même date que les Étoiles qui l'environnent?

CATALOGUE des Étoiles déterminées par M. DARQUIER, pour le 1.er Janvier 1780.

Numéros des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Ascension droite.	Déclinais. Boréale.	Variation annuelle. En Ascens. droite.	Variation annuelle. En Déclinaison.	Différence avec Flamstéed. En Ascens. droite.	Différence avec Flamstéed. En Déclinaison.	Lettres de Bayer & Numéros.	Noms des Constellations
		D. M. S.	D. M. S.	S. Dix.	S. Dix.	M. S.	M. S.		
1	6	181. 47. 23	28. 32. 33	45. 2	20. 0				
2	6	182. 24. 58	28. 18. 8	45. 7	20. 0	....	....	....	Étoile double.
3	5	183. 51. 49	28. 29. 23	45. 5	20. 0	+ 1. 4	+ 0. 8	b	} de Bérénice.
4	6	183. 59. 54	28. 2. 47	45. 4	20. 0	+ 0. 18	+ 0. 3	α	
5	7	185. 9. 27	28. 16. 26	45. 2	20. 0				
6	6	187. 31. 39	28. 20. 13	44. 8	19. 9				
7	7	188. 33. 55	28. 36. 5	44. 6	19. 8				
8	7	189. 19. 38	27. 57. 46	44. 5	19. 8				
9	5	189. 37. 55	28. 40. 32	44. 3	20. 0				
10	5	190. 15. 16	28. 13. 32	44. 2	19. 7	+ 1. 18	— 1. 10	31	de Bérénice.
11	7	201. 11. 48	23. 36. 34	43. 0	18. 0				
12	7	201. 53. 55	23. 38. 31	42. 9	18. 6				
13	6	202. 32. 21	20. 23. 28	43. 3	18. 5				
14	6	202. 32. 31	21. 4. 30	43. 2	18. 5	— 0. 27	— 0. 15	1	} du Bouvier.
15	6	202. 39. 3	23. 37. 11	42. 8	18. 5	— 1. 24	+ 0. 16	2	
16	7	203. 31. 2	28. 41. 9	41. 8	18. 4				
17	5	204. 49. 8	22. 19. 12	42. 7	18. 2	— 0. 25	— 2. 30	6	du Bouvier.
18	7	204. 50. 40	20. 30. 3	43. 0	18. 2				
19	5	206. 0. 44	21. 42. 18	42. 7	18. 0				
20	7	206. 22. 57	23. 44. 54	42. 3	17. 9				
21	6	206. 38. 19	28. 34. 24	41. 3	17. 9	+ 0. 22	— 0. 16	9	} du Bouvier.
22	6	207. 48. 27	28. 26. 42	41. 1	17. 7	+ 0. 18	+ 0. 2	11	
23	7	208. 2. 41	20. 16. 9	42. 7	17. 7				
24	6	208. 16. 43	23. 33. 22	42. 0	17. 7				
25	7	208. 22. 50	28. 33. 53	41. 7	17. 6				
26	6	208. 32. 8	20. 18. 56	42. 7	17. 6				
27	7	209. 21. 48	22. 15. 0	42. 2	17. 5				
28	6	209. 49. 29	21. 28. 41	42. 3	17. 4				
29	7	209. 51. 44	20. 49. 37	42. 4	17. 4				
30	8	209. 52. 40	20. 46. 11	42. 4	17. 4				
31	7	210. 29. 12	21. 38. 55	42. 1	17. 3				
32	6	211. 11. 30	20. 56. 9	42. 2	17. 2				
33	6	211. 24. 43	28. 46. 35	40. 5	17. 1				
34	1	211. 25. 18	20. 20. 27	42. 3	17. 1	— 0. 39	— 2. 54	α	Arcturus.
35	6	211. 29. 14	22. 16. 26	41. 5	17. 1				
36	5	211. 35. 2	21. 9. 25	43. 2	17. 1				
37	6.	211. 42. 57	20. 15. 46	42. 3	17. 0				
38	6	213. 19. 40	26. 22. 57	40. 7	16. 8				
39	6	213. 34. 19	28. 25. 0	40. 1	16. 8				
40	6	213. 49. 46	21. 35. 26	41. 8	16. 7				
41	5	214. 4. 6	20. 12. 52	42. 4	16. 6	— 0. 0	+ 0. 6	f	du Bouvier.
42	6	214. 13. 20	28. 38. 16	40. 0	16. 8				
43	6	214. 44. 55	26. 50. 39	40. 1	16. 5				
44	4	215. 35. 23	31. 20. 52	38. 8	16. 5	+ 0. 41	+ 0. 17	ρ	du Bouvier.
45	6	215. 58. 21	31. 59. 50	38. 8	16. 2				
46	5	216. 16. 21	30. 43. 24	39. 0	16. 3	+ 0. 21	+ 0. 31	σ	du Bouvier.

Numéros des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Ascension droite.	Déclinais. Boréale.	Variation annuelle. En Ascens. droite.	Variation annuelle. En Décli-naison	Différence avec Flamstéed. En Ascens. droite.	Différence avec Flamstéed. En Décli-naison.	Lettres de Bayer. & Numéros.	NOM[S] des CONSTELLA[TIONS]
		D. M. S.	D. M. S.	S. Déc.	S. Déc.	M. S.	M. S.		
47	5	216. 32. 58	23. 44. 39	40. 9	16. 1				
48	6	216. 35. 54	24. 56. 53	40. 6	16. 1				
49	7	216. 41. 24	28. 26. 23	39. 7	16. 1				
50	6	217. 42. 52	31. 26. 1	38. 6	15. 9				
51	7	217. 45. 22	31. 28. 33	38. 6	15. 9				
52	6	217. 50. 21	32. 14. 19	38. 2	15. 8				
53	6	217. 59. 59	25. 27. 2	40. 3	15. 8				
54	6	218. 25. 40	27. 28. 40	39. 7	15. 7	— 0. 38	+ 0. 33	34	du Bouvier.
55	3	218. 50. 47	28. 0. 42	39. 6	15. 6	+ 0. 23	+ 0. 11	ε	
56	7	219. 7. 39	28. 27. 38	39. 2	15. 6				
57	6	219. 28. 10	25. 1. 1	40. 2	15. 8				
58	5	219. 39. 41	25. 14. 40	40. 7	15. 4				
59	5	219. 39. 34	25. 17. 37	40. 1	15. 4				
60	7	219. 57. 30	23. 42. 18	40. 5	15. 4				
61	6	220. 32. 5	21. 11. 59	41. 1	15. 2				
62	7	226. 48. 55	30. 9. 20	38. 6	15. 2				
63	6	220. 49. 43	28. 28. 37	39. 1	15. 2				
64	6	220. 52. 52	32. 48. 9	37. 7	15. 2				
65	7	220. 54. 55	33. 35. 26	37. 5	15. 2				
66	6	221. 16. 26	32. 54. 50	37. 6	15. 1				
67	7	221. 24. 36	32. 19. 28	37. 8	15. 0				
68	7	221. 32. 9	33. 43. 9	37. 7	15. 0				
69	6	221. 34. 23	25. 14. 27	39. 9	15. 0				
70	6	221. 34. 8	25. 17. 39	39. 9	15. 0				
71	5	221. 58. 15	25. 31. 58	39. 8	15. 0				
72	6	222. 9. 59	27. 42. 40	39. 4	14. 9				
73	6	222. 16. 23	25. 3. 7	39. 9	14. 8				
74	6	222. 49. 58	32. 33. 55	37. 5	14. 7				
75	7	222. 56. 51	32. 15. 22	37. 5	14. 7				
76	5	223. 5. 13	25. 53. 0	37. 5	14. 6	— 1. 30	— 0. 1	ω	du Bouvier.
77	6	223. 20. 54	32. 32. 39	37. 4	14. 6				
78	6	223. 21. 48	34. 6. 18	36. 9	14. 6				
79	6	223. 35. 26	25. 57. 33	38. 8	14. 5				
80	6	223. 43. 46	29. 56. 20	38. 2	14. 5				
81	4	223. 45. 13	27. 48. 53	38. 9	14. 5	— 0. 30	+ 0. 18	ψ	du Bouvier
82	6	224. 9. 41	31. 58. 0	37. 4	14. 4				
83	4	224. 22. 38	25. 43. 50	39. 1	14. 6	— 0. 1	+ 0. 9	c	du Bouvier
84	7	224. 23. 52	30. 43. 32	37. 8	14. 3				
85	6	224. 39. 40	29. 21. 23	38. 3	14. 3				
86	6	224. 43. 27	27. 12. 14	38. 9	14. 2	+ 0. 6	+ 3. 7	b	du Bouvier
87	6	224. 58. 25	25. 30. 19	39. 4	14. 2				
88	7	225. 0. 4	34. 4. 6	36. 6	14. 2				
89	7	225. 25. 9	33. 54. 57	36. 6	14. 1				
90	6	225. 26. 56	31. 28. 50	37. 4	14. 1				
91	7	225. 30. 14	25. 4. 42	39. 5	14. 0				
92	6	225. 49. 41	32. 18. 1	37. 1	14. 0				
93	6	226. 17. 36	32. 36. 44	36. 9	13. 9				
94	6	226. 18. 33	29. 58. 55	37. 8	13. 8	— 0. 39	— 0. 13	χ	du Bouvier
95	3	226. 38. 53	34. 6. 22	36. 3	13. 8	— 2. 4	— 2. 26	[illegible]	

Numéros des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Ascension droite.	Déclinais. Boréale.	Variation annuelle. En Ascens. droite.	Variation annuelle. En Déclinaison	Différence avec Flamstéed. En Ascens. droite.	Différence avec Flamstéed. En Déclinaison.	Lettres de Bayer. & Numéros.	Noms des Constellations.
		D. M. S.	D. M. S.	S. Déc.	S. Déc.	M. S.	M. S.		
96	7	226. 48. 6	31. 43. 1	37. 2	13. 7				
97	6	227. 14. 4	27. 39. 4	38. 5	13. 6				
98	5	227. 14. 37	31. 7. 22	37. 3	13. 6				
99	5	227. 18. 5	32. 25. 27	36. 8	13. 6				
100	5	227. 39. 2	33. 19. 6	36. 4	13. 5				
101	6	227. 45. 43	30. 24. 44	37. 5	13. 5				
102	5	227. 52. 1	25. 45. 6	39. 0	13. 5				
103	5	227. 58. 33	32. 15. 59	38. 8	13. 4				
104	6	228. 0. 16	25. 4. 44	39. 2	13. 4				
105	6	228. 0. 31	25. 9. 1	39. 8	13. 4				
106	5	228. 14. 3	33. 43. 26	36. 2	13. 3	— 2. 45	— 0. 37	50	du Bouvier.
107	7	228. 29. 6	32. 21. 4	36. 7	13. 3				
108	5	228. 31. 32	31. 5. 29	36. 9	13. 3	+ 0. 41	— 0. 4	η	de la Couronne.
109	6	228. 53. 56	25. 36. 9	38. 9	13. 2				
110	6	229. 0. 2	20. 19. 51	40. 6	13. 2				
111	7	229. 17. 19	33. 14. 49	36. 2	13. 1				
112	6	229. 30. 50	25. 52. 35	38. 8	13. 0				
113	3	229. 40. 19	29. 51. 42	38. 0	13. 0	— 1. 41	— 0. 43	β	de la Couronne.
114	7	229. 44. 14	20. 31. 27	40. 5	13. 0				
115	6	229. 51. 54	27. 53. 56	38. 1	12. 9				
116	5	230. 21. 53	32. 2. 35	36. 5	12. 8				
117	6	230. 29. 58	21. 8. 19	40. 2	12. 8				
118	7	230. 57. 26	31. 4. 57	36. 8	12. 6				
119	7	230. 59. 8	31. 5. 50	36. 8	12. 6				
120	4	231. 0. 41	32. 6. 38	36. 8	12. 6	— 1. 1	— 0. 8	θ	} de la Couronne.
121	1	231. 20. 44	27. 28. 3	38. 0	12. 6	— 0. 16	+ 0. 17	α	} de la Couronne.
122	5	231. 28. 9	32. 12. 9	36. 3	12. 5				
123	6	231. 58. 17	30. 46. 35	36. 8	12. 4				
124	5	232. 12. 36	25. 13. 4	38. 7	12. 3				
125	5	232. 12. 49	25. 16. 37	38. 7	12. 3				
126	6	232. 13. 19	31. 1. 4	36. 7	12. 2				
127	6	232. 42. 50	25. 48. 53	38. 5	12. 2				
128	6	232. 56. 13	32. 11. 56	36. 7	12. 2				
129	5	233. 28. 30	32. 24. 54	36. 0	11. 9				
130	5	233. 26. 17	20. 27. 8	40. 0	11. 9				
131	4	233. 23. 49	27. 0. 17	38. 0	11. 9	— 0. 49	— 0. 7	γ	de la Couronne.
132	5	233. 36. 21	32. 5. 46	36. 2	11. 9				
133	5	233. 40. 35	25. 10. 10	38. 6	11. 9				
134	6	233. 40. 45	25. 4. 8	38. 6	11. 9				
135	5	233. 49. 14	22. 8. 32	39. 6	11. 8				
136	5	233. 49. 23	33. 13. 10	35. 6	11. 8	— 1. 1	— 0. 18	π	de la Couronne.
137	6	234. 34. 38	31. 15. 40	36. 3	11. 6				
138	7	234. 46. 13	33. 41. 39	35. 3	11. 6				
139	6	234. 49. 34	32. 25. 22	36. 0	11. 6				
140	4	235. 6. 0	26. 44. 22	35. 8	11. 5	+ 3. 18	— 5. 8	δ	de la Couronne.
141	7	235. 20. 55	25. 56. 52	35. 8	11. 5				
142	5	235. 25. 5	21. 36. 49	39. 6	11. 4	+ 0. 11	— 1. 40	ρ	du Serpent.
143	6	235. 52. 31	29. 34. 0	36. 7	11. 3				
144	7	236. 23. 53	32. 59. 32	35. 4	11. 1				

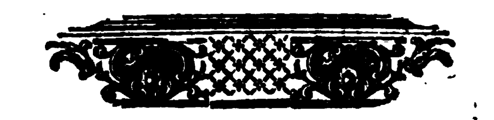
Numéros des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Ascension droite. D. M. S.	Déclinais. Boréale. D. M. S.	Variation annuelle. En Ascens. droite. S. Déc.	Variation annuelle. En Déclinaison. S. Déc.	Différence avec Flamstéed. En Ascens. droite. M. S.	Différence avec Flamstéed. En Déclinaison. M. S.	Lettres de Bayer, & Numéros.	Noms des Constellations.
47	5	216. 32. 58	23. 44. 39	40. 9	16. 1				
48	6	216. 35. 54	24. 56. 53	40. 6	16. 1				
49	7	216. 41. 24	28. 26. 23	39. 7	16. 1				
50	6	217. 42. 52	31. 26. 1	38. 6	15. 9				
51	7	217. 45. 22	31. 28. 33	38. 6	15. 9				
52	6	217. 50. 21	32. 14. 19	38. 2	15. 8				
53	6	217. 59. 59	25. 27. 2	40. 3	15. 8				
54	6	218. 25. 40	27. 28. 40	39. 7	15. 7	— 0. 38	+ 0. 33	34	du Bouvier.
55	3	218. 50. 47	28. 0. 42	39. 6	15. 6	+ 0. 23	+ 0. 11	ε	
56	7	219. 7. 39	28. 27. 38	39. 2	15. 6				
57	6	219. 28. 10	25. 1. 1	40. 2	15. 8				
58	5	219. 39. 41	25. 14. 40	40. 7	15. 4				
59	5	219. 39. 34	25. 17. 37	40. 1	15. 4				
60	7	219. 57. 30	23. 42. 18	40. 5	15. 4				
61	6	220. 32. 5	21. 11. 59	41. 1	15. 2				
62	7	226. 48. 55	30. 9. 20	38. 6	15. 2				
63	6	220. 49. 43	28. 28. 37	39. 1	15. 2				
64	6	220. 52. 52	32. 48. 9	37. 7	15. 2				
65	7	220. 54. 55	33. 35. 26	37. 5	15. 2				
66	6	221. 16. 26	32. 54. 50	37. 6	15. 1				
67	7	221. 24. 36	32. 19. 28	37. 8	15. 0				
68	7	221. 32. 9	33. 43. 9	37. 7	15. 0				
69	6	221. 34. 23	25. 14. 27	39. 9	15. 0				
70	6	221. 34. 8	25. 17. 39	39. 9	15. 0				
71	5	221. 58. 15	25. 31. 58	39. 8	15. 0				
72	6	222. 9. 59	27. 42. 40	39. 4	14. 9				
73	6	222. 16. 23	25. 3. 7	39. 9	14. 8				
74	6	222. 49. 58	32. 33. 55	37. 5	14. 7				
75	7	222. 56. 51	32. 15. 22	37. 5	14. 7				
76	5	223. 5. 13	25. 53. 0	37. 5	14. 6	— 1. 30	— 0. 1	ω	du Bouvier.
77	6	223. 20. 54	32. 32. 39	37. 4	14. 6				
78	6	223. 21. 48	34. 6. 18	36. 9	14. 6				
79	6	223. 35. 26	25. 57. 33	38. 8	14. 5				
80	6	223. 43. 46	29. 56. 20	38. 2	14. 5				
81	4	223. 45. 13	27. 48. 53	38. 9	14. 5	— 0. 30	+ 0. 18	ψ	du Bouvier.
82	6	224. 9. 41	31. 58. 0	37. 4	14. 4				
83	4	224. 22. 38	25. 43. 50	39. 1	14. 6	— 0. 1	+ 0. 9	c	du Bouvier.
84	7	224. 23. 52	30. 43. 32	37. 8	14. 3				
85	6	224. 39. 40	29. 21. 23	38. 3	14. 3				
86	6	224. 43. 27	27. 12. 14	38. 9	14. 2	+ 0. 6	+ 3. 7	b	du Bouvier.
87	6	224. 58. 25	25. 30. 19	39. 4	14. 2				
88	7	225. 0. 4	34. 4. 6	36. 6	14. 2				
89	7	225. 25. 9	33. 54. 57	36. 6	14. 1				
90	6	225. 26. 56	31. 28. 50	37. 4	14. 1				
91	7	225. 30. 14	25. 4. 42	39. 5	14. 0				
92	6	225. 49. 41	32. 18. 1	37. 1	14. 0				
93	6	226. 17. 36	32. 36. 44	36. 9	13. 9				
94	6	226. 18. 33	29. 58. 55	37. 8	13. 8	— 0. 39	— 0. 13	χ	du Bouvier.
95	3	226. 38. 53	34. 6. 22	36. 3	13. 8	— 2. 4	— 2. 26		

Numéros

Numéros des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Ascension droite.	Déclinais. Boréale.	Variation annuelle. En Ascens. droite.	Variation annuelle. En Décli-naison	Différence avec Flamstéed. En Ascens. droite.	Différence avec Flamstéed. En Décli-naison.	Lettres de Bayer. & Numéros.	Noms des Constellations.
		D. M. S.	D. M. S.	S. Déc.	S. Déc.	M. S.	M. S.		
96	7	226. 48. 6	31. 43. 1	37. 2	13. 7				
97	6	227. 14. 4	27. 39. 4	38. 5	13. 6				
98	5	227. 14. 37	31. 7. 22	37. 3	13. 6				
99	5	227. 18. 5	32. 25. 27	36. 8	13. 6				
100	5	227. 39. 2	33. 19. 6	36. 4	13. 5				
101	6	227. 45. 43	30. 24. 44	37. 5	13. 5				
102	5	227. 52. 1	25. 45. 6	39. 0	13. 5				
103	5	227. 58. 33	32. 15. 59	38. 8	13. 4				
104	6	228. 0. 16	25. 4. 44	39. 2	13. 4				
105	6	228. 0. 31	25. 9. 1	39. 8	13. 4				
106	5	228. 14. 3	33. 43. 26	36. 2	13. 3	— 2. 45	— 0. 37	50	du Bouvier.
107	7	228. 29. 6	32. 21. 4	36. 7	13. 3				
108	5	228. 31. 32	31. 5. 29	36. 9	13. 3	+ 0. 41	— 0. 4	η	de la Couronne.
109	6	228. 53. 56	25. 36. 9	38. 9	13. 2				
110	6	229. 0. 2	20. 19. 51	40. 6	13. 2				
111	7	229. 17. 19	33. 14. 49	36. 2	13. 1				
112	6	229. 30. 50	25. 52. 35	38. 8	13. 0				
113	3	229. 40. 19	29. 51. 42	38. 0	13. 0	— 1. 41	— 0. 43	β	de la Couronne.
114	7	229. 44. 14	20. 31. 27	40. 5	13. 0				
115	6	229. 51. 54	27. 53. 56	38. 1	12. 9				
116	5	230. 21. 53	32. 2. 35	36. 5	12. 8				
117	6	230. 29. 58	21. 8. 19	40. 2	12. 8				
118	7	230. 57. 26	31. 4. 57	36. 8	12. 6				
119	7	230. 59. 8	31. 5. 50	36. 8	12. 6				
120	4	231. 0. 41	32. 6. 38	36. 8	12. 6	— 1. 1	— 0. 8	θ	de la Couronne.
121	1	231. 20. 44	27. 28. 3	38. 0	12. 6	— 0. 16	+ 0. 17	α	
122	5	231. 28. 9	32. 12. 9	36. 3	12. 5				
123	6	231. 58. 17	30. 46. 35	36. 8	12. 4				
124	5	232. 12. 36	25. 13. 4	38. 7	12. 3				
125	5	232. 12. 49	25. 16. 37	38. 7	12. 3				
126	6	232. 13. 19	31. 1. 4	36. 7	12. 2				
127	6	232. 42. 50	25. 48. 53	38. 5	12. 2				
128	6	232. 56. 13	32. 11. 56	36. 7	12. 2				
129	5	233. 28. 30	32. 24. 54	36. 0	11. 9				
130	5	233. 26. 17	40. 27. 8	40. 0	11. 9				
131	4	233. 23. 49	27. 0. 17	38. 0	11. 9	— 0. 49	— 0. 7	γ	de la Couronne.
132	5	233. 36. 21	32. 5. 46	36. 2	11. 9				
133	5	233. 40. 35	25. 10. 10	38. 6	11. 9				
134	6	233. 40. 45	25. 4. 8	38. 6	11. 9				
135	5	233. 49. 14	22. 8. 32	39. 6	11. 8				
136	5	233. 49. 23	33. 13. 10	35. 6	11. 8	— 1. 1	— 0. 18	π	de la Couronne.
137	6	234. 34. 38	31. 15. 40	36. 3	11. 6				
138	7	234. 46. 13	33. 41. 39	35. 3	11. 6				
139	6	234. 49. 34	32. 25. 22	36. 0	11. 6				
140	4	235. 6. 0	26. 44. 22	35. 8	11. 5	+ 3. 18	— 5. 8	δ	de la Couronne.
141	7	235. 20. 55	25. 56. 52	35. 8	11. 5				
142	5	235. 25. 5	21. 36. 49	39. 6	11. 4	+ 0. 11	— 1. 40	ρ	du Serpent.
143	6	235. 52. 31	29. 34. 0	36. 7	11. 3				
144	7	236. 23. 53	32. 59. 32	35. 4	11. 1				

Numéros des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Ascension droite.	Déclinais. Boréale.	Variation annuelle. En Ascens. droite.	Variation annuelle. En Décli-naison	Différence avec Flamstéed. En Ascens. droite.	Différence avec Flamstéed. En Décli-naison.	Lettres de Bayer & Numéros.	Noms des Constellations.
		D. M. S.	D. M. S.	S. Déc.	S. Déc.	M. S.	M. S.		
243	7	264. 8. 12	31. 14. 23	34. 1	2. 0				
244	6	264. 24. 21	25. 50. 15	36. 5	2. 0				
245	7	265. 23. 8	31. 7. 13	34. 1	2. 0				
246	5	265. 26. 29	29. 23. 1	34. 9	2. 0				
247	6	266. 0. 39	32. 2. 34	33. 7	2. 0				
248	5	266. 35. 50	26. 5. 19	34. 9	1. 6				
249	7	266. 49. 7	32. 28. 35	33. 4	1. 1				
250	4	267. 17. 20	29. 16. 17	35. 0	0. 9	+ 0. 50	— 1. 12	ξ	d'Hercule.
251	7	267. 20. 26	33. 26. 38	33. 0	0. 9				
252	7	267. 24. 25	32. 15. 33	33. 0	0. 9				
253	6	267. 29. 30	32. 40. 44	33. 0	0. 9				
254	7	267. 32. 4	30. 45. 40	34. 3	0. 9				
255	7	268. 8. 20	33. 13. 58	33. 1	0. 7				
256	7	268. 22. 14	33. 19. 34	33. 1	0. 7				
257	6	269. 12. 7	33. 18. 21	33. 0	0. 3				
258	5	269. 24. 29	32. 12. 48	33. 6	0. 2				
259	5	269. 58. 23	30. 58. 51	34. 1	0. 1				
260	5	270. 54. 47	31. 22. 28	34. 0	0. 3	+ 2. 41	+ 0. 31	A	d'Hercule
261	6	272. 16. 10	33. 28. 13	32. 2	0. 8				
262	7	272. 41. 34	32. 58. 22	33. 3	0. 7				
263	5	277. 8. 15	33. 17. 42	33. 2	0. 3				
264	7	278. 4. 29	33. 30. 24	33. 2	2. 3				
265	7	279. 11. 39	32. 58. 33	33. 4	3. 0				
266	6	280. 24. 51	32. 15. 52	33. 3	3. 7				
267	1	280. 29. 24	33. 7. 14	33. 3	3. 7	— 1. 11	— 0. 29	β	de la Lyre.
268	.....	281. 20. 50	32. 45. 59	33. 5	3. 9	....	....	.....	nébuleuse.
269	6	282. 11. 39	32. 10. 51	33. 8	4. 3				
270	3	282. 40. 45	32. 24. 2	33. 8	4. 3	+ 0. 3	— 0. 15	γ	de la Lyre.
271	6	283. 18. 21	32. 4. 19	34. 0	4. 6				

Nota. La première des deux colonnes de la variation annuelle pour l'ascension droite, est additive +: la seconde, pour la déclinaison, est soustractive — depuis le *n.° 1* jusqu'au *n.° 260*, & depuis ce dernier jusqu'au *271.°* additive +.



235 230 225 175 170 165 160

...nsion

GR.de OURSE

Septentrionale

COURONNE

Chevelure de BERENICE

le LION

Déclinaison

Onze Neb. Observées en 1781.

3 Nebul. 1779

Nebul. 1779

Neb. 1779

Derniere Observat. le 17 mai 1779 Soir

le SERPE...

235 230 190

40 35 30 25 20 15 10 5 0

EQUATEUR.

... Janvier vers les cinq heures
...ous de l'Etoile c. 4e grand...
22. Août 1779.

MÉMOIRE SUR LE MOYEN DE DISSOUDRE LA PLATINE PAR L'ACIDE NITREUX.

Par M. TILLET.

PENDANT que plusieurs Chimistes distingués s'occupent de l'examen de la Platine, qu'ils la rendent très-ductile, & obtiennent des succès sur plusieurs points intéressans qui concernent ce métal singulier, j'ai cru devoir le considérer sous un point de vue relatif au commerce des matières d'Or & d'Argent, & examiner si un Essayeur, sans sortir des bornes ordinaires de ses opérations, sans employer d'autres agens que ceux dont il est dans l'usage de se servir, ne pourroit pas dépouiller l'or & l'argent de la platine, & n'auroit pas plus de précautions à prendre dans son travail, en supposant ce dernier métal allié aux deux autres, que si l'or & l'argent n'étoient mêlés qu'avec du cuivre. 23 Juin 1779.

En attendant que je puisse rendre compte à l'Académie des expériences que j'ai déjà faites à cet égard, & que je me propose de continuer, je vais avoir l'honneur de lui exposer quelques faits, dont d'habiles Chimistes tireront meilleur parti que moi, & déduiront des conséquences que je ne suis pas capable de saisir.

PREMIER FAIT.

La platine, soit brute & dans son état naturel, soit devenue ductile par les procédés que M. le comte de Sickingen a fait connoître, & par ceux que M. le comte de Milly doit publier, la platine dans ces deux états, est parfaitement dissoluble dans l'esprit de nitre pur, & dépouillé de tout acide marin : ce premier fait a lieu lorsqu'on mêle une certaine

quantité d'or pur, & une plus grande quantité d'argent fin avec la platine.

SECOND FAIT.

Si on ne mêle que de l'argent fin avec la platine, alors la dissolution est très-incomplète; la liqueur dissolvante se trouble, devient noire, & n'acquiert point de transparence, quel que long-temps qu'on la fasse bouillir sur le feu, même après le refroidissement, & quoiqu'on ait l'attention de la laisser assez long-temps dans le repos: le précipité noir qu'on trouve au fond du matras, la liqueur restant toujours trouble & ayant la couleur d'un brun-noirâtre, ce précipité, après avoir été lavé & recuit, est de véritable platine; il en a la couleur, &, selon les apparences, tous les caractères.

Il n'en est pas ainsi lorsqu'on mêle, par la voie de la fusion & d'une fusion parfaite, une certaine quantité d'or fin avec de la platine & de l'argent fin: la dissolution de la platine & de l'argent est complète; la liqueur devient transparente, même sur le feu, & l'or reste au fond du matras.

Si on précipite une partie de la dissolution d'un mélange d'or, d'argent & de platine par une petite quantité d'*esprit de sel*, on obtient un précipité d'un très-beau blanc, lequel séché, ne perd rien de sa blancheur *.

Si on précipite de nouveau, par l'huile de tartre par défaillance, la liqueur surnageante du premier précipité, on obtient un léger précipité en forme de *coagulum*, lequel séché, a la couleur d'un vert-pâle.

Si on précipite d'abord l'autre partie de la dissolution des trois métaux réunis par l'huile de tartre par défaillance, on a sur le champ un précipité abondant, sous la forme de flocons blancs, lesquels séchés, restent d'un blanc-sale, & qui approche même de la couleur grise.

* On verra dans le Mémoire, beaucoup plus étendu, qui suivra celui-ci, que ce premier précipité est de l'argent combiné avec l'acide marin & dépouillé de platine.

Mes premières expériences n'ayant roulé que ſur de petites quantités, il ne m'a guère été poſſible d'examiner ſéparément les précipités de la diſſolution dont je viens de parler; je me ſuis contenté d'abord, en les réuniſſant & les fondant enſemble avec un peu de borax, d'en obtenir un bouton d'argent que j'ai fait diſſoudre dans l'eſprit de nitre: mon but étoit, comme on le ſent bien, d'y reconnoître la préſence de la platine qui avoit été d'abord diſſoute avec l'argent dans la liqueur qui avoit fourni ces précipités; ce bouton d'argent ne contenant point d'or, m'a préſenté le même phénomène dont j'ai déjà parlé; l'eſprit de nitre dans lequel je l'ai mis en diſſolution, s'eſt un peu troublé, proportionnément à la petite quantité de platine que le bouton d'argent contenoit; il n'a point repris ſa tranſparence, & a laiſſé au fond du matras un petit dépôt noir, tel qu'il s'annonce quand on fait diſſoudre dans l'eſprit de nitre un mélange compoſé ſeulement d'argent & de platine. Il paroît donc prouvé que la platine, qui n'eſt que foiblement attaquée par l'eſprit de nitre lorſqu'on ne la mêle qu'avec de l'argent, eſt diſſoute auſſi complètement par cet acide que l'argent même, lorſque l'or fait partie du mélange, puiſqu'elle s'eſt annoncée dans la diſſolution du petit bouton d'argent dont je viens de parler, qui, lui-même, avoit ſubi avec elle la première diſſolution. Il paroît d'un autre côté, qu'il ſeroit difficile aujourd'hui de regarder l'or comme faiſant une partie eſſentielle & conſtitutive de la platine, puiſqu'on ne remarque aucune augmentation de poids ſur la matière d'or employée dans les expériences dont il s'agit: je ne dis pas cependant qu'on ne puiſſe extraire de la platine quelques particules d'or, comme elles ſe trouvent tous les jours dans d'autres matières que la platine, & où elles ne ſont conſidérées que comme étrangères à ces mêmes matières qui les renferment; mais tout ſemble annoncer, par les premières expériences que j'expoſe ici ſommairement, que l'or, loin de jouer un rôle eſſentiel dans la platine, n'en occaſionne la diſſolution complète, qu'autant qu'indiſſoluble lui-même par l'eſprit de nitre, il ſe joint à la platine pour

mieux l'abandonner enſuite à toute l'action de cet acide. Par une ſuite néceſſaire de cette obſervation, l'eau régale ſera ſeule le véritable diſſolvant de l'or; elle le ſera auſſi, à la vérité, de la platine pure; mais l'eſprit de nitre aura toute ſon action ſur celle-ci, par ſon mélange avec l'or & l'argent, tandis que l'or réſiſtera à ce même acide, & que les deux autres métaux qui étoient confondus avec lui, éprouveront une véritable diſſolution.

Je dois faire obſerver ici, d'après le premier travail ſur cet objet dont je ne me ſuis occupé encore que d'une manière générale, qu'il eſt difficile de ſéparer totalement la platine de l'or, par la voie d'un premier départ, & en conſervant à l'ordinaire l'or en cornet: la platine en effet recelée dans les interſtices de ce métal indiſſoluble par l'eſprit de nitre, y réſiſte dans quelques-unes de ſes parties, & ne cède enfin qu'après un ſecond, & quelquefois un troiſième départ; mais ſi on prend le parti d'employer pour un ſeul départ cinq fois autant d'argent qu'on a mis d'or & de platine pour l'expérience, alors on obtient l'or en chaux, & toute la platine ſe trouve ordinairement diſſoute avec l'argent. Ce dernier moyen exige de l'attention pour ne rien perdre de la quantité déterminée d'or qu'on a employée: *j'eſpère qu'il ſera* poſſible de conſerver l'or dans ſon état de pureté, & ſous la forme de cornet, en employant une quantité d'argent ſuffiſante pour qu'elle rende la platine acceſſible de toutes parts à l'eſprit de nitre, & en ménageant l'action de cet acide, de manière qu'il n'attaque d'abord que foiblement les deux métaux diſſolubles, & n'agiſſe enſuite avec toute ſa force, qu'autant que le cornet dépouillé en grande partie de la platine & de l'argent, ne donnera lieu qu'à une action modérée de l'acide nitreux. Je me réſerve volontiers le travail que pourra exiger l'expérience & le tâtonnement pour cet objet particulier, qui tient à l'opération des Eſſayeurs & à la ſureté du Commerce. Je ne doute point que quelques Chimiſtes plus éclairés que moi, ne s'occupent dans la ſuite du ſoin de conſidérer la platine ainſi diſſoute par l'acide nitreux, à la faveur de ſon

union

union avec l'or & l'argent : je profiterai avec plaisir de leurs lumières, & sans perdre de vue, moi-même, ce point curieux de recherche, je tournerai principalement mon application vers celui qui concerne la pratique, en cherchant à y mettre, s'il est possible, autant d'exactitude que de simplicité.

Je finis par observer que la platine résistant, comme l'or & l'argent, à l'action de la litharge dans la coupelle, on ne sauroit découvrir, par ce moyen, s'il entre de la platine dans l'argent auquel on fait subir cette opération : mais, d'après les expériences dont je viens de parler, on s'apercevra bientôt de la présence de la platine dans l'argent, si on fait dissoudre dans l'esprit de nitre une petite partie du mélange de ces deux métaux; la liqueur se troublera, restera opaque, & il se fera un précipité noir au fond du matras, qui, après un recuit, sera bientôt reconnu s'il est dû à la platine; au lieu que la liqueur seroit devenue claire & transparente après la dissolution, sans donner aucun précipité, si l'argent avoit été employé seul & dans son état de pureté.



RÉFLEXIONS
SUR LES
OBSERVATIONS DE LA DÉCLINAISON
ou Variation de l'Aimant dans l'Océan Atlantique,
FAITES À LA MER.

Par M. LE MONNIER.

Lû le 3 Mars 1779.

J'AI examiné avec soin les variations observées par Don Antonio d'Ulloa, dans sa traversée de Cadiz à la Vera-Cruz, & à son retour en l'année 1778; & aux remarques intéressantes qu'a faites ce Commandant de la flotte Espagnole, à bord du vaisseau de guerre l'*Espagne*, j'ai cru devoir ajouter les réflexions suivantes.

1.° La variation observée de $19^d\ 42'$ au mois de Mai, à Cadiz, étoit à peine, en 1776, de 1 degré moins grande vers l'ouest, qu'à Paris; au lieu qu'à Londres ç'a été tout le contraire.

2.° M. d'Ulloa étant par 18 degrés $\frac{1}{2}$ de latitude boréale, 36 à 39 degrés à l'ouest du pic de Ténériffe, la variation lui a paru nulle, après quoi elle a changé de dénomination ou du Nord à l'Est. On pourroit donc la placer sur la Carte de Halley, à 52 degrés $\frac{1}{5}$ à l'ouest du méridien de Londres; mais la Carte des variations du même Auteur, donne pour 1700 la variation nulle sous la longitude de 30 degrés $\frac{1}{2}$ à cette même latitude de 18 degrés $\frac{1}{2}$ boréale: ainsi la ligne sans déclinaison se seroit avancée vers l'Ouest à cette latitude de 21 degrés $\frac{2}{3}$ en soixante-seize ans, ce qui ne s'étant trouvé tout au plus que d'environ 19 degrés sous l'équateur magnétique, il nous faut encore examiner ces observations au retour, quoique par une latitude plus grande.

Le 24 Juillet, M. d'Ulloa attérant au port de la Vera-Cruz, a trouvé pareillement par les amplitudes ortives &

occafes, la variation 7 degrés $\frac{1}{2}$ au Nord-eft; ce qui diffère à peine de $\frac{1}{4}$ de degré en excès, de ce qui avoit été trouvé en 1768 par les Bouffoles qu'avoit pour lors feu l'abbé Chappe.

En 1778, M. d'Ulloa à fon retour, a compté fes longitudes du cap de Cannaveral, fitué à la côte de la Floride ainfi qu'à l'embouchure du canal de Bahama, & la variation lui a paru nulle par $28^d\ 57'$ de latitude, étant à l'Eft de près de 19 degrés à l'égard de ce cap.

Par ces obfervations poftérieures, la réduction devient bien moins fenfible pour la variation de la ligne fans déclinaifon, vers l'Oueft depuis 1700, laquelle n'auroit été que de 7 $\frac{1}{2}$ à 9^d feulement, à 29 degrés de latitude fur la Carte de Halley; c'eft-à-dire près de la moitié moins grande qu'elle n'a paru aux François & aux Anglois, fous le méridien & à l'Équateur magnétique, en foixante-quinze années.

Prenant un milieu, on auroit donc fous le tropique du Cancer, ou pour 24 degrés tout au plus de latitude boréale, le mouvement de la ligne fans déclinaifon, en foixante-dix-fept années, d'environ 15 degrés, tandis que fous l'équateur magnétique on l'a trouvé plufieurs fois de 19 degrés tout au plus, pendant les mêmes intervalles de temps, à très-peu de chofes près.

Comme M. d'Ulloa s'approchoit très-fort de l'île des Bermudes à fon retour, on pourroit conjecturer avec raifon, d'après les obfervations que nous venons de rapporter, comme auffi d'après celles de la nouvelle Angleterre qui ont été rendues publiques, que la ligne fans déclinaifon ne fe recourbe pas à beaucoup près autant que l'a fuppofé M. Halley fur fa Carte réduite, favoir vers les extrémités boréales de cette ligne fans déclinaifon.

On trouve dans le deuxième volume des Voyages, publié à l'*Imprimerie du Louvre* en 1778, que fix ans auparavant, à 73 degrés $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ de longitude à l'oueft du Méridien de Paris, & par 30^d 17 à $38'$ de latitude boréale, la variation nord-eft n'étoit plus que de 2 degrés $\frac{3}{4}$: mais M. d'Ulloa a trouvé à 75 degrés $\frac{1}{8}$ & à 73 degrés $\frac{1}{2}$ de longitude &

par 29^d 36 à 11′ de latitude, la variation au nord-est 3^d 37′ ½. Il y auroit donc ici près d'un degré en excès, & même deux tiers de degrés au-delà, puisqu'en six ans la variation a dû changer de toute cette dernière quantité : en un mot, M. d'Ulloa l'auroit trouvée trop grande, M.rs Verdun, Borda & Pingré étant par 29^d ½ de latitude.

DÉCLINAISON DE L'AIGUILLE AIMANTÉE,

Observée à Paris en 1779.

Le 22 Mars, par un hâle moins vif qu'à l'ordinaire, & avec la nouvelle Boussole qu'on a décrite au volume précédent, nous avons observé, M.rs le Chevalier Schamps, Cassini le fils & moi, à 11 heures du matin, en pointant plusieurs fois la lunette au troisième Moulin à Montmartre, toutes réductions faites, la déclinaison 20^d 30′ à l'Observatoire.

Le 14 Juin, par un temps variable ou mêlé de quelques légères ondées, à la même heure que ci-dessus, à peine a-t-on trouvé, en recommençant plusieurs fois, un excès de 4 minutes; & adoptant la dernière observation, savoir lorsqu'on a pointé au troisième Moulin à Montmartre, on aura, toutes réductions faites, la variation ou déclinaison de l'aiguille du Nord à l'Ouest 20^d 34′.

Nous aurions bien desiré comparer cette aiguille bien choisie avec différentes chapes d'agate, comme aussi avec une autre aiguille de pareille longueur, mais d'un tiers ou de la moitié moins pesante; ce qu'il faudroit sur-tout comparer entr'elles vers 3 heures du soir & par un temps calme ou plutôt tel qu'il le faut choisir pour des recherches aussi délicates.



MÉMOIRE
SUR LA
LONGITUDE DE LA NOUVELLE ZEMBLE.

Par M. LE MONNIER.

LE lieu où les Hollandois ont hiverné à la nouvelle Zemble, à 76 degrés de latitude boréale *, a été fixé en ce siècle-là, par la conjonction observée de la Lune à Jupiter, 5 heures précisément, comme on l'a déjà dit, à l'orient de Venise; on aura par conséquent, à l'égard de l'île de Fer, que nous supposons 20 degrés $\frac{1}{2}$ à l'ouest du méridien de Paris, $105^d\ 15'$ de longitude orientale: mais les Éphémérides ne représentoient souvent alors qu'à un demi-degré les longitudes de la Lune & de Jupiter, & c'est ce qu'il reste à examiner, ou du moins à comparer avec le résultat des 5 heures de différence en longitude assignée à l'égard du méridien de Venise, représenté par les Éphémérides de Schala. 30 Juin 1779.

Je trouve, quant à la longitude de Jupiter, qu'il vaut mieux la déduire ici des observations de Tycho, que des Tables astronomiques; mais n'ayant plus les mêmes avantages, faute d'un mouvement égal pour la Lune, & uniforme pour ainsi dire, que Tycho n'observa que plusieurs jours après, j'aurai recours aux périodes de dix-huit ans dix à onze jours, pour en déduire, s'il est possible, l'erreur des Tables lunaires, le 24 Janvier 1597, au soir.

Soit d'abord le $\frac{8}{18}$ Janvier 1597, la distance de Jupiter *Aldebaran*, observée par Tycho à $6^h\ 2'\frac{1}{2}$ du soir, de $32^d 40'$, & sa hauteur méridienne $45^d\ 10'\ 10''$: ayant trouvé que l'ascension droite de l'Étoile devoit être alors $63^d\ 16'\ 3''$, j'en ai conclu celle de Jupiter de $29^d\ 56'\ 8''$, & par conséquent, sa longitude ♉ $1^d 43'\ 5''$ tout au plus.

* Voyez sur-tout *Linschot* & la première des deux Cartes de l'édition latine de ce Voyage, publiée *in-folio* à Amsterdam, en 1599.

Mais le $\frac{21}{31}$ Janvier, je trouve auſſi par les diſtances obſervées à la même Étoile, la différence d'aſcenſion droite $32^d 4' 15''$, ce qui, joint à ſa déclinaiſon boréale, donne la longitude de Jupiter, ♉ $2^d 59' 56''$; or il eſt viſible par-là, que le 24 Janvier 1597, au moment de la conjonction, la longitude de Jupiter auroit été ♉ $2^d 19' \frac{1}{4}$ ou $20'$, & ſon aſcenſion & déclinaiſon boréale $30^d 29'$; & $11^d 18'$ tout au plus. Tels ſont les élémens néceſſaires, comme j'en ai averti ci-deſſus, pour trouver l'aſcenſion droite du milieu du ciel, l'abaiſſement de Jupiter ſous l'horizon, & l'heure vraie du Soleil, laquelle ſeroit $6^h 17' \frac{2}{3}$ du matin, ſi l'azimut ou l'aire de vent où la conjonction a paru ſe faire, avoit été bien obſervée, ſavoir de 11 degrés $\frac{1}{4}$, à compter du Nord vers l'Eſt.

On voit par-là, qu'il y a au moins o heures $\frac{1}{4}$ d'incertitude dans l'heure vraie, aſſignée par les Hollandois, que leurs ſabliers ou horloges dentées ou bien à rouages, ne leur donnoient pas alors trop facilement, outre qu'ils ne nous ont pas aſſez détaillé les preuves multipliées des corrections qu'ils ont dû faire à ces horloges: en effet, il eſt certain que Jupiter a dû paſſer au vrai méridien du côté du Nord, à $5^h 31' 48''$ du matin, & que l'azimut de 11 degrés $\frac{1}{4}$ doit être aſſurément du Nord vers l'Eſt; autrement il en faudroit ôter encore trois autres quarts-d'heure, ſi l'on vouloit ſuppoſer l'azimut de 11 degrés $\frac{1}{4}$ à l'oueſt du méridien, du côté du Nord. Comme les Hollandois nous aſſurent, & comme ils nous donnent en effet les preuves les plus vraiſemblables, qu'il y avoit un aire de vent à compter du Nord ſur leur compas rectifié, il s'enſuivroit donc de l'heure qu'on vient de trouver, ſavoir $6^h 17' \frac{2}{3}$, que la longitude de la nouvelle Zemble ſeroit encore 4 degrés $\frac{1}{2}$ plus grande vers l'Eſt, qu'elle n'a été concluë par leur premier & excellent Pilote, à l'aide des Éphémérides de Schala.

Il nous reſte donc à examiner encore s'il y auroit quelques corrections importantes à faire à cette longitude, à cauſe de l'erreur des Tables. Il a été douteux juſqu'ici qu'elle pût être

absolument nulle, & les Adversaires du Professeur royal, J. Morin, ont prétendu plus de quarante ans après, qu'elle devoit être quelquefois énorme, malgré la supériorité des Rudolphines de Képler, sur les Tables pruteniques, jointe aux premiers rayons de faveurs littéraires que S. M. Louis XIII & le Cardinal de Richelieu, Surintendant de la Marine, aient voulu dès-lors accorder à la science des Longitudes.

Je trouve d'abord dans mes Observations de l'année 1741, déjà publiées, l'erreur des Tables Newtoniennes en défaut de 3 minutes $\frac{1}{4}$, puisqu'elles donnent, le 23 Mars à $5^h 47' 56''$ de temps moyen, la longitude de la Lune $2^s 28^d 34' 9'' \frac{1}{2}$, au lieu que l'observation nous donne $2^s 28^d 37' 25'' \frac{1}{2}$; mais à cause de l'accélération du mouvement de la Lune, depuis le temps de Tycho jusqu'alors, jointe à quelques autres causes, dont on aura occasion de parler, l'état de l'orbite lunaire ayant varié depuis la fin de Janvier 1597, à celle du mois de Mars 1741, ces circonstances nous empêchent d'admettre ici la même erreur des Tables qu'on vient de découvrir, en la rapportant à l'année 1597. Voyez Gassendi, *vol. IV.*

Je ne trouve rien, comme je l'ai dit, au temps de cette conjonction parmi les observations de Tycho-Brahé, & environ trente-six ans après, je ne vois pas qu'Ismaël Bouillaud ait saisi quelques occultations correspondantes. En 1669 & 1687, la Lune ne fut point observée à pareille distance du Soleil; mais enfin, je trouve une conjonction apparente de la Lune à Jupiter, dans les Registres manuscrits de M. de la Hire, laquelle a été déterminée à l'Observatoire royal, le 2 Mars 1705, à $10^h 38' 8''$ de temps vrai. Comme la quadrature de Jupiter au Soleil, se trouve dans les mêmes Registres, observée le 6 Mars suivant, à $5^h 56' 51''$ de temps vrai, j'en ai déduit, en supposant le lieu du Soleil ♓ $16^d 0' 10''$, & les différences d'ascensions droites & de déclinaisons observées, la longitude de ♃ ♉ $17^d 24' 25''$; d'où il m'a été facile, à l'aide des Tables de Halley, d'établir la longitude de ♃ ♉ $17^d 7' 49''$ pour l'instant de la conjonction observée le 2 Mars au soir: les Tables des Institutions donnent ce

jour-là, à $10^h 50' 38''$ de temps moyen, la longitude de la Lune, ♊ $17^d 43' 52'' \frac{1}{2}$, avec une latitude boréale de $0^d 56' 8''$. L'angle parallactique, dans l'hypothèse de la Terre aplatie de $\frac{1}{200}$, étoit $51^d 49' 27'' \frac{1}{2}$; d'où l'on déduit la longitude apparente de la Lune, ♊ $17^d 5' 57'' \frac{1}{2}$: or M. de la Hire assurant, & même par une figure faite à dessein, que Jupiter lui a paru dans la ligne des cornes, ce qui indique sa conjonction apparente avec la Lune, & l'incertitude d'une pareille observation ne pouvant guère influer que d'une minute de temps, c'est-à-dire d'une demi-minute de degré sur la longitude de la Lune, il doit s'ensuivre que l'erreur des *Tables* Newtoniennes étoit en 1705, le 2 Mars au soir, de 1 minute $\frac{7}{8}$ en défaut ou négative; on peut donc admettre, selon les deux observations de 1705 & 1741, qu'elle devoit être encore moindre en 1597.

J'ai donc calculé le lieu de la Lune, sur les Tables des Institutions, le 24 Janvier 1597, pour $12^h 32'$ de temps moyen, au méridien de Paris, c'est-à-dire en supposant d'abord la nouvelle Zemble $5^h 44' \frac{1}{3}$ plus orientale, & j'ai trouvé sa longitude ♉ $2^d 20' 19'' \frac{1}{2}$; celles de Mayer donnent ♉ $2^d 21' 44'' \frac{1}{2}$; mais la longitude de Jupiter, déduite des observations de Tycho, étoit alors ♉ $2^d 19' \frac{1}{4}$ ou $20'$: ainsi dans la première hypothèse, qui est celle des Hollandois, savoir, que la conjonction de Jupiter à la Lune se seroit faite le 25 à 6 heures du matin, on auroit la longitude géographique de la nouvelle Zemble, au port de la Glace, à très-peu de chose près, la même que les $105^d 15'$ trouvés ci-dessus, ou plutôt $106^d 35'$, & 1^d à peine plus grande selon les Tables de Mayer.

Mais si l'on adopte pour l'heure de la conjonction, $6^h 17' \frac{2}{3}$ du matin à la nouvelle Zemble, la longitude de la loge des Hollandois se trouvera $4^d 25'$ ou $5^d \frac{1}{2}$ plus avancée.

Il nous reste à considérer encore ici l'effet de la parallaxe, & sur-tout celui de la réfraction, laquelle étant extraordinaire, a dû agir puissamment, dans le sens opposé à l'effet de ces parallaxes.

SECOND

SECOND MÉMOIRE
SUR LE
MOYEN DE DISSOUDRE LA PLATINE
PAR L'ACIDE NITREUX,
Et sur les Déchets extraordinaires qu'éprouve ce métal par l'effet de cette dissolution.

Par M. TILLET.

JE rendis compte à l'Académie, le 23 Juin 1779, de mes premières observations sur la dissolution de la Platine dans l'acide nitreux, à la faveur du mélange de ce métal avec une certaine quantité d'or & d'argent: je ne pus lui présenter alors que quelques faits principaux, en m'engageant à répéter mes expériences sur cette matière, à les varier, d'après les faits nouveaux qui pourroient me frapper, & à conduire sur-tout mon travail vers l'objet utile, qui peut seul donner quelque prix aux recherches dont il s'agit.

Je n'ai donc rien négligé d'abord pour m'assurer de nouveau des deux faits principaux que j'ai avancés: le premier consiste en ce que j'ai donné comme absolument constante la dissolution parfaite de la platine dans l'acide nitreux, lorsque ce métal a été mêlé intimement avec de l'or & de l'argent dans des proportions convenables; le second est relatif au mélange de l'argent seul avec la platine, duquel il ne résulte, ainsi que je l'ai dit, qu'une dissolution très-imparfaite, si l'on fait usage également de l'acide nitreux; & cette opération incomplète a toujours lieu, quelque concentré que soit cet acide, quoiqu'on l'ait plus ou moins affoibli, & quelqu'action qu'on ait tâché de lui donner, tant par une chaleur considérable, que par une ébullition long-temps soutenue.

N'ayant aucun doute sur la dissolution parfaite de la platine

dans l'acide nitreux, quand l'or fait partie du mélange, j'ai voulu me rendre certain d'une manière bien positive de la dissolution réelle d'une partie de la platine dans l'acide nitreux, lorsque ce métal n'étoit mêlé qu'avec de l'argent : je voyois très-bien qu'une grande partie de la platine précipitée en poudre noirâtre, n'avoit éprouvé qu'une division mécanique; mais je n'étois pas sûr que la portion de ce métal, restée dans la liqueur, y fût réellement dissoute, & je pouvois soupçonner avec quelque vraisemblance, que réduite en particules extrêmement atténuées par l'effet du dissolvant, elle y étoit en état de simple suspension & disposée à se précipiter d'elle-même après un certain temps : j'étois d'autant plus fondé dans cette présomption, que l'acide nitreux, après toute son action sur un mélange d'argent & de platine, reste long-temps fort trouble, même après son refroidissement; que les particules les plus atténuées du métal ne se précipitent que lentement; que la liqueur ne s'éclaircit qu'après quelques jours de repos, mais en conservant toujours une couleur brune & assez foncée pour laisser quelque incertitude sur une véritable dissolution. J'employai donc le moyen qui me parut le plus propre à dissiper mes doutes à cet égard : après avoir laissé reposer assez long-temps l'acide nitreux, dans lequel j'avois fait dissoudre de l'argent mêlé avec un peu de platine, je versai la liqueur aussi claire que je pus l'obtenir, sur un filtre de papier assez serré & que j'avois plié en quatre, afin que d'une filtration plus lente & plus gênée il n'en résultât qu'une liqueur avec laquelle les métaux fussent intimement combinés; j'étendis dans une grande quantité d'eau toute la liqueur que je retirai de cette filtration, & après l'avoir versée dans une terrine, j'y plongeai une plaque de cuivre; l'argent, comme on sent bien, ne tarda pas à se précipiter, & la platine qui avoit passé avec lui à travers le filtre, s'annonça également au-dessus de l'argent par des caractères que je reconnus, & dont un grand nombre d'expériences précédentes m'avoit averti. J'aurai lieu de revenir, dans la suite de ce Mémoire, sur la précipitation de l'argent & de la platine par le moyen

du cuivre, & de faire remarquer que ce procédé, relativement à la platine, n'est pas le meilleur que l'on puisse employer: il suffit pour ce moment-ci, qu'on regarde comme constant que la portion de platine restée dans l'acide nitreux, après la dissolution d'un mélange de ce métal avec de l'argent seulement, après le dépôt qui s'est formé au fond du matras, & lorsque la liqueur s'est autant éclaircie qu'il est possible qu'elle le soit, il suffit, dis-je, qu'on reconnoisse que cette petite portion de platine est réellement dissoute dans l'acide, & l'est aussi parfaitement que l'argent, tandis que la plus grande partie de la platine employée dans le mélange, n'étant à proprement parler que divisée, se précipite bientôt au fond du matras, perd beaucoup moins de son premier état que celle qui a éprouvé une véritable dissolution, & souffre par conséquent beaucoup moins de déchet que celle-ci, lorsqu'il s'agit de la rétablir dans l'état métallique & souvent ductile dont elle jouissoit.

Les nombreuses expériences que j'ai faites pour constater la dissolution de la platine par l'acide nitreux, ont roulé principalement sur des mélanges où ce métal étoit joint à de l'or & de l'argent: si j'en ai fait quelques-unes sur un mélange d'une petite portion de platine & d'une quantité plus ou moins considérable d'argent fin seulement, je n'y ai été conduit que par la simple curiosité; j'y ai eu pour but de considérer les cristallisations auxquelles ce dernier mélange donne lieu, & qui m'ont paru propres à caractériser au premier coup-d'œil, l'argent qui contient un peu de platine; ces cristallisations ne sont pas de nature, il est vrai, à devenir une règle pour déterminer la quantité précise de platine qu'un lingot d'argent peut contenir; mais elles préviennent utilement sur une espèce d'alliage qu'on ne soupçonneroit jamais sans ces caractères extérieurs, & avertissent alors de recourir à une opération différente de celle de la coupelle, si l'on veut séparer la platine de l'argent qui la contient: ces cristallisations une fois reconnues, comme un effet assez singulier qui décèle la platine, le mélange de ce métal avec l'argent

n'a plus rien qui intéresse. La séparation de ces deux métaux n'est pas possible par la voie de la coupelle, & on n'y parvient que difficilement par le moyen des acides. Le seul avantage que paroît offrir un alliage de cette espèce, c'est que l'argent fin acquiert de la consistance & du ressort par son union avec la platine pure, sans perdre beaucoup de sa ductilité, & en conservant dans le mat & le bruni, la couleur tranchante dont on sait que l'argent est susceptible.

S'il est peu de circonstances où l'on trouve quelqu'avantage à unir la platine avec l'argent dans de certaines proportions; & si d'ailleurs l'opération par laquelle on parvient à séparer ces deux métaux, demande un temps assez long, exige des soins pour qu'il n'en résulte pas beaucoup de déchets, & n'a pas la simplicité qu'on y desireroit, parce que la voie de la dissolution, à laquelle seule on peut recourir, ne conduit pas sur le champ à des produits bien distincts; il n'en est pas ainsi du mélange de ces métaux lorsque l'or s'y trouve joint, & qu'il s'agit de les obtenir tous les trois séparément.

Il faut observer d'abord qu'il ne convient point en général d'associer l'or à la platine, & qu'il est de l'intérêt du Commerce que le premier de ces métaux soit dépouillé des moindres parties du second, non-seulement parce qu'il est d'un prix supérieur à celui de la platine, mais encore par la raison que ce dernier métal altère sensiblement la riche couleur de l'or, & le fait d'une manière plus désagréable que le cuivre de rosette: l'or, à la vérité, acquiert toujours de la dureté & du ressort par son union avec la platine; mais cette propriété, avantageuse quelquefois, peut lui être procurée par d'autres métaux & d'une manière plus marquée que la platine ne peut la lui donner. Si l'on suppose cependant un mélange accidentel ou formé à dessein d'or, d'argent & de platine, & qu'il soit question de les séparer par le moyen de l'acide nitreux, alors on aura une dissolution complète des deux derniers de ces métaux; on obtiendra par ordre des précipités bien distincts, & il sera facile de faire reparoître chacune de ces substances dans l'état métallique qui leur est particulier.

Tels sont les motifs qui m'ont déterminé à ne prendre pour objet principal de mes expériences que des mélanges des trois métaux, & d'en varier les proportions afin de saisir celle où la platine attaquée avec plus de succès, pourroit être séparée nettement des deux autres métaux, qui ne se trouvoient avec elle que pour en faciliter la dissolution.

Je ne détaillerai point ici les expériences sans nombre que j'ai faites, tant en petit qu'un peu en grand, pour bien connoître les faits que je desirois de constater : comme rien ne s'y est démenti, à l'égard de la dissolution bien réelle de la platine dans l'acide nitreux pur, & d'une dissolution plus parfaite peut-être qu'on ne l'obtient par l'eau régale lorsqu'on fait attaquer la platine seule par les deux acides réunis, je n'exposerai les détails que de quelques-unes de mes expériences; ils suffiront sans doute pour qu'on puisse bien juger des conséquences que j'en ai tirées, & pour que des Chimistes plus éclairés que moi perfectionnent mon travail avec moins de peine que je n'en ai eu à l'ébaucher.

Quoique les expériences en petit, ne conduisent pas ordinairement à des résultats sur lesquels il soit prudent de compter, cependant du scrupule dans les recherches, des instrumens faits avec précision, & une égalité assez constante dans les produits, sont une présomption favorable pour les conséquences qu'on en tire : alors une seule expérience en grand qui quadre avec une multitude d'autres, lesquelles n'ont roulé que sur de petites quantités de matière, fait entrer, pour ainsi dire, celles-ci dans le nombre des épreuves exécutées en grand, & achève la conviction.

Je n'employai donc d'abord pour mes expériences que 10 ou 11 grains d'or fin, 1 grain ou 2 de platine, & 30 ou 36 grains d'argent fin. Je dois avertir que la platine dont je fis usage, étoit ductile & aussi pure, je crois, qu'il est possible de l'obtenir : mon dessein étant de la dissoudre complètement par l'acide nitreux, j'avois intérêt de ne l'employer qu'autant qu'elle étoit bien dépouillée de tout ce qui pouvoit être attaqué naturellement par ce même acide, afin que je

même diſparoître dans les parties atténuées, dans le précipité preſque ſans conſiſtance qui réſulte de la platine diſſoute dans l'acide nitreux, & que ce métal, qui eſt ſeul comparable à l'or du côté de la peſanteur, loin de réſiſter à cet acide, dans les épreuves dont il s'agit ici, s'y altère, s'y décompoſe en grande partie, tandis que le cuivre, dont la peſanteur ſpécifique n'approche pas de celle de la platine, cède ſans peine il eſt vrai à l'action de l'acide nitreux, mais reparoît bientôt avec tous ſes caractères métalliques, annonce ſa peſanteur naturelle, même en état de précipité, & n'éprouve qu'un déchet médiocre lorſqu'on le rétablit par la fonte dans toute ſa ductilité.

Ayant donc remarqué aſſez conſtamment qu'il reſtoit encore un peu de platine dans les cornets d'or, quelque précaution que je priſſe pour qu'aucune de ſes parties n'échappât à l'action de l'acide nitreux, & m'étant aperçu que plus j'employois de platine dans le mélange des trois métaux, moins le départ étoit complet, je me bornai à une petite quantité de platine pour de nouvelles expériences; elle fut de la vingt-quatrième partie de l'or que j'employai, avec une quantité d'argent deux à trois fois plus forte que celle de l'or. Je parvins *enfin* à dépouiller totalement les cornets de la platine qu'ils contenoient; ils avoient la netteté, le beau mat & la couleur que j'y deſirois, & je ne retrouvai à la balance que le poids précis de l'or qui étoit entré dans le mélange.

Le ſuccès de cette expérience exige des précautions; il faut que le mélange éprouve une grande chaleur dans la coupelle pendant que la litharge s'y imbibe, que la matière y circule avec un peu plus de vivacité que les eſſais d'or ne le demandent, & que les trois métaux ſoient parfaitement combinés dans le bouton qui les contient; il convient encore que ce bouton ſoit réduit en une lame fort mince, & que, par une conſéquence néceſſaire de cette dernière précaution, le départ ſoit conduit avec beaucoup de ménagemens: ſi en effet on bruſquoit l'opération, en commençant à ſe ſervir d'un acide nitreux un peu trop fort, quelques parties du cornet

cornet pourroient s'en détacher; peut-être même se briseroit-il entièrement, en laissant alors de l'incertitude sur la réunion totale de l'or employé : aussi ai-je toujours eu l'attention, pour ces épreuves délicates, de ne faire usage de l'acide nitreux porté à un certain degré de force qu'au moment d'achever le départ, après que cet acide, très-affoibli d'abord pour la première attaque du cornet, rendu ensuite plus actif pour la seconde, avoit criblé lentement ce cornet, & par-là l'avoit préparé à toute l'action d'un acide nitreux plus puissant.

Dans la vue d'obtenir, s'il étoit possible, un succès égal, en employant le double de platine, je formai un mélange dans lequel ce métal entroit pour un douzième sur onze parties d'or & une quantité d'argent proportionnée. Il me resta presque toujours après l'opération un léger excédant de poids dans les cornets d'or, & cette surcharge de quelques trente-deuxièmes de grain n'étoit pas constamment égale; je fis même une expérience qui me convainquit que si je n'avois pas dépouillé l'or de la totalité de la platine, je ne pouvois pas en attribuer la cause à un défaut d'action de l'acide nitreux : les étuis d'or destinés à renfermer des cornets d'essais, & que j'ai proposés pour faire tout-à-la-fois le départ de plusieurs de ces cornets dans un même matras, ces étuis me servirent utilement pour l'épreuve dont il s'agit. Je fis passer à la coupelle douze grains d'or pur & trente grains d'argent fin; j'en obtins un bouton d'essai ordinaire dont je formai un cornet destiné, comme on peut le prévoir, à servir de témoin dans l'expérience que je projetois : deux autres cornets qui contenoient chacun 11 grains d'or fin, 1 grain de platine & l'argent nécessaire pour le départ, furent mis chacun dans un étui, comme le cornet où il n'entroit point de platine fut renfermé dans le sien, & un même matras servit pour le départ de ces trois cornets. Je donnai à cette expérience l'attention qu'elle demandoit, en ménageant, comme on a vu plus haut, l'action de l'acide nitreux, afin que les trois cornets restassent bien entiers : après qu'ils eurent reçu un recuit convenable dans leur étui, ils en sortirent sans y avoir éprouvé

Mémoires de l'Acad. année 1778, page 505.

la moindre adhérence & ſans qu'aucune de leurs parties ſe fût détachée; portés enſuite à la balance, ils m'inſtruiſirent bientôt de l'effet de l'acide nitreux dont j'étois ſur-tout occupé dans ce moment: le premier de ces cornets avoit exactement le poids des douze grains d'or que j'avois employés pour lui, avant qu'il fut ſoumis au départ. Il n'en étoit pas ainſi des deux autres; l'un conſervoit encore un huitième de grain au-delà des onze grains d'or qu'il avoit reçus, & j'obſervai dans l'autre un excédant de poids encore plus fort; cette ſurcharge aſſez inégale ne pouvoit être attribuée ſans doute qu'à la platine: l'état de ces cornets ne l'annonçoit pas au premier coup-d'œil; mais en les conſidérant avec une certaine attention, & en les rapprochant d'autres cornets d'or qui ne contenoient rien d'étranger à ce métal, on ne remarquoit à leur ſurface ni la grande netteté, ni la couleur riche & particulière à l'or mat qui auroit dû les diſtinguer.

Je ne pouvois pas douter que dans cette expérience l'acide nitreux n'eût agi autant qu'il falloit ſur tout ce qu'il étoit capable de diſſoudre, puiſqu'il n'étoit reſté aucune partie d'argent dans le cornet d'or de 12 grains, quoiqu'on s'aperçoive quelquefois d'une légère ſurcharge en argent dans les eſſais ordinaires par un vice de l'opération: j'ai donc dû conclure avec beaucoup de fondement, que ſi le même acide employé à trois repriſes dans le même matras, & agiſſant avec le même degré de force ſur les trois cornets réunis, a enlevé à l'un tout l'argent qu'il contenoit, ſans porter d'atteinte à l'or, on doit regarder cet acide comme ayant exercé dans cette expérience toute l'action dont il étoit capable, & que s'il s'eſt trouvé un excédant de poids ſur les deux autres cornets, il ne faut pas l'attribuer à un défaut d'énergie dans le diſſolvant ou à quelque vice dans l'opération: tout en effet y a été parfaitement égal, au grain près de platine que chacun de ces deux cornets contenoit, & dont une très-petite portion s'eſt trouvée inacceſſible à l'acide nitreux pendant qu'il a pu diſſoudre ſans peine la plus grande partie de ce métal.

La cauſe de cette imperfection aſſez ordinaire du départ,

lors même que la platine n'entre que pour un douzième de l'or dans le mélange des trois métaux, & qu'on a pour but de conserver en entier le cornet d'or pur qui doit résulter de l'opération, cette cause ne se présente pas d'abord à l'esprit, & peut-être ne pourrois-je pas hasarder à ce sujet quelques conjectures si, dans le courant de mes expériences, je n'eusse pas été averti plusieurs fois d'un fait que je ne soupçonnois pas.

J'ai été contraint, pour des expériences beaucoup plus en grand que celles dont je viens de parler, & que j'exposerai dans la suite de ce Mémoire, d'employer un creuset pour fondre ensemble & mêler aussi intimement que je le pourrois l'or, l'argent & la platine destinés dès-lors à être soumis au départ: après avoir forgé le lingot provenant de cette fonte, & du poids de 4 onces au moins, je le réduisois en lames très-minces, & je le divisois en trente-deux parties; chacune d'elles, du poids d'un gros ou environ, étoit roulée en cornet, & j'en réunissois ensuite seize pour un seul départ dans un même matras. Après cette opération, les lotions répétées dans l'eau distillée & le recuit ordinaire, je vis que mes seize cornets étoient en général assez bien conservés; mais je m'aperçus qu'il régnoit des fentes circulaires sur quelques-uns d'eux, qu'il s'élevoit un peu au-dessus du corps du cornet de petites lames minces, très-étroites, dont la surface étoit d'or, mais qui avoient une consistance, un ressort que n'ont jamais les cornets sortis d'un départ, & encore moins des parties effilées & fort minces qui s'en seroient détachées: j'eus bientôt reconnu, à l'aide de la loupe, qu'une petite portion de platine, ayant encore la couleur de ce métal en état de ductilité, régnoit dans l'intérieur des petites lames circulaires qui s'étoient séparées en partie du corps du cornet, & que l'or leur servant comme d'une espèce de fourreau, les auroit toujours dérobées à ma vue, si ces petites lames, par un effet de leur ressort naturel, n'eussent pas occasionné une rupture dans le cornet & ne m'eussent pas averti de leur présence par la couleur si différente de l'or qu'elles offroient du

côté de la tranche & à la faveur de cette même rupture du cornet.

On voit clairement ſans doute, d'après les détails dans leſquels je viens d'entrer, qu'une portion peu conſidérable de la platine ductile & réduite en petites parties que j'avois employée, pour l'expérience dont il s'agit ici & à laquelle je reviendrai, n'étoit pas entrée en fuſion dans le creuſet, lorſque j'y fis fondre les trois métaux; qu'elle y reſta comme iſolée & au fond du creuſet, ſelon toute apparence, pendant que ces métaux ſe combinèrent & ſe pénétrèrent réciproquement; qu'elle paſſa dans le lingot en état de platine pure, lorſque je vidai le creuſet; qu'elle s'alongea entre les rouleaux du laminoir, en prenant toute l'étendue que ſon volume, quel qu'il fût, lui permit d'occuper; qu'elle s'étendit peut-être de 1 ou 2 pouces ſur 96 de longueur qu'avoit la lame entière produite par le lingot; qu'elle put par conſéquent faire partie de deux des cornets que je tirai de cette lame, y réſiſter à l'acide nitreux, & s'y manifeſter enfin après leur départ, avec tous les indices que j'ai expoſés.

Si ce fait, qui m'a paru mériter quelque attention, eſt regardé comme conſtant, je crois qu'il fera naître des conjectures bien fondées ſur la cauſe de l'excédant de poids qu'on remarque ordinairement dans les cornets d'or qui réſultent d'un mélange d'or, d'argent & d'un peu de platine, après que ces métaux ont été ſéparés.

La platine réſiſte, étant ſeule, au feu le plus violent de nos fourneaux; elle ne ſe fond qu'avec peine, étant jointe à d'autres métaux aſſez fuſibles, tels que l'or, l'argent & le cuivre; j'aurai même lieu de faire obſerver, dans d'autres expériences que je rapporterai, qu'on regarde quelquefois la platine comme fondue parfaitement avec quelqu'un de ces métaux fuſibles, tandis qu'elle n'y eſt que dans un état pâteux & bien éloigné de celui d'une exacte combinaiſon. Dès-lors ne pourroit-on pas ſoupçonner, avec beaucoup de vraiſemblance, que dans les mélanges d'or, d'argent & de platine, quelques-unes des parties de ce dernier métal refuſent quelque-

fois de s'incorporer dans la matière en fusion, & y resten dans l'état simple de ramollissement, parce que les parties de la matière en bain qui les environnent, n'ont pas assez de chaleur pour faire passer à l'état de fluidité ces petites portions de platine & achever la combinaison? Des faits palpables viendront bientôt à l'appui de ce que j'avance ici, & prouveront, je crois, qu'on n'est pas toujours sûr d'avoir fondu complètement la platine, au milieu même des métaux qu'on voit en pleine fusion.

D'ailleurs il est bon d'observer que de petites portions de platine fondue, à la faveur de l'or & de l'argent, peuvent se trouver non pas pénétrées par l'un & l'autre de ces métaux, mais enveloppées simplement & hors d'attaque par conséquent de tout ce qui feroit capable de les entamer, puisqu'elles ne peuvent l'être qu'autant qu'elles sont pénétrées de l'or & de l'argent réunis, qu'autant que les trois métaux forment un tout parfaitement combiné.

Ces remarques, dont il eût été difficile que je me fusse occupé avant que d'avoir considéré avec attention, dans le courant de mes expériences, quelques effets peu ordinaires & que j'étois bien éloigné de prévoir, ces remarques, dis-je, ne paroissent-elles pas conduire à une explication assez plausible de la cause de l'excédant de poids qu'offrent communément les cornets d'or, après le départ des trois métaux réunis dont j'ai parlé plus haut!

Il est certain d'abord, qu'en faisant attaquer par l'acide nitreux un mélange d'or, d'argent & de platine, on obtient la dissolution de l'argent & celle de la plus grande partie de la platine; que moins on emploie de ce dernier métal dans l'opération du départ, moins il en reste proportionnément dans les cornets d'or; & qu'en ne faisant entrer la platine que pour un vingt-quatrième du poids de l'or dans un alliage de cette espèce, on peut parvenir à dépouiller totalement les cornets d'or du peu de platine qu'ils contenoient. Ce métal, si rebelle, quand il est seul, aux plus vives attaques de l'acide nitreux, cède donc facilement à ce même

acide quand il ſe trouve combiné avec l'or & l'argent? Cette diſſolution n'a donc lieu, n'eſt conſtante & plus parfaite peut-être que celle de la platine ſeule par l'eau régale, qu'à la faveur d'une exacte combinaiſon des trois métaux! S'il eſt évident que dans ces circonſtances l'acide nitreux a la plus grande action ſur la platine, comment ſeroit-il poſſible qu'une petite portion de ce métal échappât à la puiſſance de cet acide, pendant que ce métal auroit été diſſous preſqu'en entier, & l'auroit été promptement ſi on ne ſuppoſoit pas que cette petite portion de platine n'a été garantie de l'action de l'acide que parce qu'elle ſe trouvoit en état de platine pure, & comme iſolée entre les trois métaux mélangés? Le fait que j'ai cité plus haut, ce filet de platine ductile, que l'or recouvroit, qui avoit été laminé ſous cette enveloppe, & que je n'aperçus qu'à la faveur de la rupture du cornet, cette portion de platine ainſi conſervée, après la fonte complète en apparence des trois métaux auxquels elle appartenoit, ne ſemble-t-elle pas venir à l'appui de l'opinion que j'expoſe? Si on ne regarde pas encore ce fait, quelque frappant qu'il ſoit, comme auſſi concluant pour cette opinion qu'il le paroît au premier coup-d'œil, on voit au moins qu'il méritoit que je m'y rendiſſe attentif, & qu'il conduit à une explication aſſez naturelle de l'excédant de poids ſur les cornets d'or dont je cherche ici la raiſon.

Qelle que ſoit la cauſe de cet excédant de poids, on peut l'enlever par une ſeconde opération, qui ſera faite avec d'autant plus de ſuccès, que cet excédant ſera plus foible relativement à la quantité d'or fin qui ſera entrée dans les cornets; & c'eſt alors que ceſſera toute illuſion ſur une augmentation de la matière même de l'or, comme produite par celui qu'on a ſoupçonné dans la platine : après une telle expérience, le préjugé tombe néceſſairement; l'or qu'on avoit employé reſte ſeul, & l'excédant de poids s'évanouit.

J'ai déjà annoncé qu'on parvenoit plus aiſément à dépouiller l'or de la platine dans l'opération du départ, en évitant de le conſerver en cornet, & en le faiſant précipiter en une chaux

assez fine au fond du matras. On sait que par un départ trop prompt & un acide nitreux trop actif, on a bientôt brisé les cornets d'essais & divisé l'or en une infinité de parties; mais dans cette opération-ci, c'est d'un mélange des trois métaux où l'argent entre en plus grande quantité que le départ des essais d'or ne l'exige, c'est de la dissolution lente & progressive des deux métaux attaquables par l'acide nitreux, qu'il faut attendre une chaux d'or bien atténuée, sur-tout si la combinaison des matières a été parfaite, & qu'on peut espérer que cet or réduit en poudre ne contiendra plus rien d'étranger. On ne sauroit se dissimuler cependant que ce procédé demande beaucoup d'attention & une certaine dextérité pour qu'il n'en résulte pas un inconvénient; l'or ainsi précipité en une chaux très-divisée qu'il faut bien laver pour la dépouiller de l'acide nitreux dont elle reste imbibée, & qui tient encore en dissolution quelques parties des deux autres métaux, cet or est difficile à rassembler parfaitement; on court le risque par une suite des lotions & de la précipitation de cette chaux d'or dans un creuset, afin qu'elle y éprouve un recuit, de perdre quelques-unes de ses parties les plus atténuées, & de ne pas obtenir par conséquent dans cette circonstance le poids total de l'or qu'on aura employé: mais avec des précautions on peut éviter cette perte; & comme on sera rarement dans le cas d'avoir recours à ce procédé moins simple pour dépouiller l'or de la platine, on y portera plus volontiers une certaine attention, celle qu'on donne à des expériences délicates & où il s'agit d'établir des produits qui entreront en comparaison.

Je n'ai considéré jusqu'ici la platine que relativement à sa dissolution dans l'acide nitreux, à la faveur de l'or & de l'argent qu'on lui associe, & par rapport encore à la difficulté qu'on éprouve pour la bannir totalement de celui de ces métaux qui résiste à l'acide nitreux & subsiste en entier après l'opération. Je vais exposer dans la suite de ce Mémoire, les observations que j'ai faites sur la manière de séparer la platine, après sa dissolution dans l'acide nitreux, de l'argent avec lequel elle y est combinée, sur l'état où elle se trouve par

une ſuite de cette diſſolution, & ſur les déchets conſidérables que j'y ai remarqués, malgré toutes les précautions que j'ai priſes pour ne rien perdre du précipité de ce métal.

Mes expériences, lorſque je commençai ces recherches, ne roulèrent d'abord que ſur de petites quantités des trois métaux réunis, & par conſéquent ſur très-peu de platine en particulier; mais elles furent ſi muliplićes que je pus recueillir, à différentes repriſes, pluſieurs précipités de platine, & les conſidérer attentivement, avant que de leur faire reprendre l'état métallique, que rien en eux ne paroiſſoit annoncer.

Le premier moyen que j'employai pour retirer la platine de l'acide nitreux, où elle avoit été diſſoute avec l'argent qui étoit entré dans le mélange des trois métaux, fut d'étendre la diſſolution dans une grande quantité d'eau & d'y mettre enſuite une plaque de cuivre rouge, ſuivant le procédé connu & adopté pour les travaux en grand: l'argent ſe précipita d'abord avec ſon éclat métallique; il couvrit le cuivre de ramifications brillantes, découpées comme la fougère & ſi déliées qu'elles s'inclinoient en tout ſens au moindre mouvement de l'eau; elles offroient alors un ſpectacle très-agréable, par l'éclat plus ou moins vif qu'elles prenoient à la plus légère ondulation: mais ce ſpectacle nouveau pour moi, quoique j'euſſe fait précipiter mille fois de l'argent par le cuivre, ne dura pas long-temps; bientôt une poudre brune commença à s'attacher à ces ramifications; elle en ternit l'éclat par des degrés inſenſibles, les affaiſſa peu-à-peu & les couvrit enfin de manière que je n'aperçus plus l'argent dont la plaque de cuivre étoit enveloppée, ni même celui qui s'étoit précipité au fond du vaſe, & que cette poudre brune déroboit totalement à mes yeux. Je ne doutai point qu'elle ne fût dûe à la platine contenue dans la diſſolution, & je ſoupçonnai dès-lors qu'elle avoit été la cauſe aſſez difficile à expliquer des belles ramifications que j'avois d'abord remarquées.

J'aurai occaſion de faire obſerver qu'un dixième de platine fondu avec de l'argent fin, y occaſionne des criſtalliſations, y donne lieu à la formation d'une multitude de figures pyramidales

pyramidales & régulières, qui ont beaucoup de rapport avec le fait dont je viens de parler.

J'avois donc obtenu, par ce moyen, l'argent & la platine précipités l'un après l'autre, mais confondus en grande partie & hors d'état, étant réduits à des molécules impalpables, de pouvoir être séparés même grossièrement : je n'hésitai point par conséquent à laisser ces deux métaux confondus; ils formoient une chaux grise que je lavai avec soin & que je fis recuire dans un creuset : elle conserva la même couleur après le recuit; mais lorsque je l'eus fondue, le lingot qui en provint avoit à peu-près la blancheur de l'argent exempt de platine, & la mie du lingot, à l'endroit où il fut cassé, étoit d'un blanc assez mat.

Ce fut en examinant sa superficie à l'aide d'une loupe, que je commençai à m'apercevoir des cristallisations dont j'ai parlé, & que je fus mis sur la voie pour en obtenir de plus parfaites : on verra bientôt pourquoi je remarque ici que la couleur grise de la chaux subsista après le recuit, & disparut après la fonte. Je réduisis ce lingot en lames très-minces que je fis dissoudre par l'acide nitreux; après le refroidissement de la liqueur & un assez long repos, j'eus au fond du matras un précipité de platine, mais bien moins considérable que je ne l'attendois : je n'ignorois pas que l'acide nitreux avoit pu en dissoudre une partie, & produire par-là une diminution sur le précipité; mais cet acide en eût-il autant dissous qu'il en étoit resté en dépôt au fond du matras, ce qui n'étoit guère probable d'après d'autres expériences que j'avois faites sur un pareil mélange de platine & d'argent, je ne jugeois point encore que ce précipité fût aussi considérable, à beaucoup près, que la poudre noirâtre qui recouvroit la chaux d'argent, & qui confondue avec elle, étoit entrée dans la composition du lingot que je venois de faire dissoudre.

Je crus donc devoir répéter cette même expérience, à une différence près qui paroissoit peu essentielle, mais d'où j'attendois quelque lumière sur ce qui m'avoit surpris dans l'expérience dont je viens de parler : au lieu de faire recuire

& de fondre enſuite la chaux d'argent mêlée de platine que j'obtins en précipité par le cuivre d'une diſſolution pareille à la première, je me contentai de la faire ſécher ſur un feu doux, & après l'avoir ramenée, en la remuant ſans ceſſe avec une ſpatule, à l'état d'extrême diviſion où elle étoit d'abord, je la mis dans un matras dont la boule avoit beaucoup plus de capacité qu'il n'en eût fallu pour une diſſolution ordinaire d'argent; je ne verſai d'abord qu'un peu d'acide nitreux affoibli ſur cette chaux: on juge bien que malgré cette précaution l'efferveſcence fut très-vive; lorſqu'elle fut calmée, je verſai de nouvel acide nitreux; j'en ménageai l'action en ne l'appliquant à la chaux que par intervalles; & c'eſt ainſi que par degrés & à froid je parvins à diſſoudre la plus grande partie de l'argent qu'elle contenoit. Lorſque je n'eus plus à craindre une certaine efferveſcence, tant de la chaleur qu'il convenoit de donner à la diſſolution que de l'emploi d'un acide plus actif, je mis le matras ſur des charbons à demi-éteints, & j'y laiſſai l'acide en ébullition juſqu'à ce qu'il m'eut paru qu'il avoit produit tout ſon effet: lorſque la liqueur ſe fut refroidie & eut acquis de la tranſparence, je la décantai avec précaution; je verſai ſur le dépôt reſté au fond du matras un acide nitreux plus fort, & je le fis bouillir auſſi pendant quelque temps ſur un feu modéré: après le refroidiſſement de cet acide, je remarquai que le dépôt étoit beaucoup plus conſidérable que celui de l'expérience précédente, & qu'il paroiſſoit répondre à la quantité de poudre noirâtre qui avoit recouvert la chaux d'argent dans l'un & l'autre précipité que j'avois obtenu par le cuivre. Je commençai dès-lors à ſoupçonner que ſi je n'avois eu que très-peu de dépôt après la diſſolution du lingot dont j'ai parlé plus haut, quoiqu'il contînt autant de poudre noirâtre que la chaux dont il s'agit ici, c'eſt que, par la fonte, une grande partie de cette poudre s'étoit décompoſée, avoit perdu peut-être les propriétés métalliques, & la faculté par conſéquent de s'incorporer dans le lingot; au lieu que cette même poudre noirâtre mêlée avec la chaux d'argent & foiblement attaquée

par l'acide nitreux, qui exerçoit principalement & avec la plus grande facilité ſur l'argent toute l'action dont il étoit capable, cette poudre réſultant de la platine, a pu reſter dans le même état où elle étoit lorſqu'elle s'eſt précipitée par le moyen du cuivre, puiſqu'en la faiſant attaquer de nouveau par l'acide nitreux, je n'ai pu produire ſur elle qu'un effet qu'elle avoit déjà éprouvé : mais il n'en a pas été ainſi ſans doute de l'effet qu'a produit ſur elle le feu, & un feu tel qu'il eſt néceſſaire pour que la chaux d'argent ſe réduiſe parfaitement en bain.

En réfléchiſſant ſur les faits que j'expoſe ici, dans l'ordre où ils m'ont frappé, on commence à ſentir que la diſſolution de la platine ductile, affinée, ayant toute ſa peſanteur ſpécifique, priſe en un mot dans l'état le plus parfait que nous lui connoiſſions, on commence, dis-je, à entrevoir que cette diſſolution par l'acide nitreux, eſt une terrible épreuve pour ce métal, & qu'il y ſouffre dans ſa matière propre, dans les principes qui le conſtituent, une altération dont les autres métaux ſont à l'abri. Les faits que j'ai encore à rapporter, quadreront avec ceux-ci : on verra ſans ceſſe des précipités de platine, ou au moins une grande partie de ces précipités, échapper aux moyens connus de rendre aux ſubſtances métalliques les propriétés qui les diſtinguent, & diſparoître, pour ainſi dire, entre des mains occupées à les rétablir dans leur premier état.

Il faut beaucoup de précautions pour recueillir ces précipités & pour les réduire à un état ſec & pulvérulent; l'infinité de particules dont ils ſont l'aſſemblage, ont tant de légèreté qu'elles ne tombent totalement au fond du matras qu'après un long repos, & qu'on ne ſoupçonneroit jamais qu'elles euſſent appartenu à un métal d'une auſſi grande peſanteur que l'eſt la platine. Je crus d'abord qu'en mettant cette poudre noirâtre dans une capſule de verre, pour l'y faire ſécher ſur un bain de ſable & enſuite dans un creuſet, afin qu'elle y éprouvât un recuit, je pourrois l'obtenir, comme les précipités d'autres métaux, en un état pulvérulent & même métallique; mais je fus fort trompé à cet égard : ce précipité réduit à

très-peu de chose, dans la capsule de verre par la sécheresse, en comparaison de ce qu'il étoit avant qu'il y reçût une douce chaleur, s'attacha fortement au fond & aux parois de la capsule; je ne pus en détacher une partie qu'à l'aide de la pointe d'une lame de couteau; & une autre portion de ce même précipité que je voulus faire sécher dans un creuset, y resta tellement adhérente, qu'il me fut impossible de l'en détacher. J'avois eu l'attention cependant de laver à plusieurs reprises ce précipité, & de lui enlever par-là, autant qu'il m'avoit été possible, les moindres parties de l'acide, très-affoibli d'ailleurs, dans lequel il avoit nagé: je vis alors qu'il falloit se borner à la capsule de verre pour faire sécher ce dépôt noirâtre, mais qu'il y avoit une précaution à prendre pour ne rien perdre de ce dépôt desséché: ce soin ne consista qu'à rapprocher vers le milieu de la capsule les parties du dépôt qui en étoient le plus éloignées, à mesure qu'elles commençoient à perdre leur humidité, à ne pas attendre qu'elles l'eussent perdue entièrement pour les détacher de la surface du vase, & à former ainsi au milieu de la capsule un petit amas auquel s'étoit réduit tout e dépôt que j'y avois mis. J'eus alors le précipité de platine sous la forme d'une poudre noirâtre, dont j'ai été contraint de parler plusieurs fois avant que j'eusse dit comment je l'avois obtenue: elle étoit si légère que le moindre souffle l'auroit dissipée, & qu'un petit amas de cette poudre, de la grosseur ou à peu-près d'une noisette, ne pesoit pas tout-à-fait 5 grains: encore est-il bon d'observer qu'elle receloit quelques parties d'argent qui en augmentoient un peu le poids.

Je fis plusieurs expériences dans la vue d'examiner si cette poudre ne pourroit pas reprendre une certaine consistance & revenir à l'état métallique dont elle me paroissoit si éloignée: j'en fis passer à la coupelle avec du plomb seulement; j'en mêlai d'autre avec une quantité déterminée d'argent fin, & une dose de plomb convenable, qui subit également l'épreuve de la coupelle; je joignis encore du *minium* à une portion de cette poudre, & je la traitai par le flux noir. Le résultat

de ces expériences fut toujours que presque la totalité de cette poudre disparoissoit dans les produits : à peine l'argent mis à dessein dans la coupelle conservoit-il quelque trace de platine ; on s'en apercevoit encore moins dans les petits grains d'argent dûs aux particules de ce métal que la poudre contenoit, & que la litharge, en s'imbibant dans les coupelles, avoit laissées sur leur bassin : rien n'avoit pu donner à ce précipité de platine la consistance d'une matière quelconque, loin de l'avoir rétabli dans son état métallique; je n'aperçus même aucune espèce de scories sur le bassin des coupelles où ce précipité, soit seul avec du plomb, soit joint à de l'argent, avoit passé par l'épreuve de la litharge.

Dans une de mes expériences, où j'avois joint à 24 grains d'or fin 69 grains d'argent fin également, & 5 grains ou à peu-près de précipité de platine, je ne remarquai point de scories aux bords du bassin de la coupelle, comme on y en voit dans quelques circonstances, après que la litharge s'y est imbibée; le bouton composé d'or, d'argent & de quelques particules de platine, étoit net, bien arrondi, & avoit l'éclat ordinaire : je le pesai avant que d'en faire le départ; je fus surpris d'en trouver le poids plus foible de 4 à 5 grains qu'il n'auroit dû être suivant la quantité des trois matières que j'avois employées, & je craignis, dans le premier moment, d'avoir oublié de mettre dans la coupelle le précipité de platine en poudre, quoiqu'il fût spécialement l'objet de mon expérience ; mais je ne pus pas douter, par un examen plus particulier du bouton, par la suite du départ que j'en fis & le résultat de cette opération, que le précipité de la platine n'eût été joint dans la coupelle aux deux autres métaux : les deux cornets d'or que j'obtins de cette expérience, étoient à la vérité très-beaux, mais je crus y apercevoir quelques indices légers de platine, & ils me suffirent pour que les conséquences que j'avois à tirer me parussent bien fondées.

Si on rapproche en effet cette dernière expérience de celles qui la précèdent, on reconnoîtra sur le champ que le précipité de platine n'a pas plus de consistance dans une épreuve que

dans une autre, malgré les différences qu'on y a remarquées; & que si quelque portion de ce précipité y a repris ses propriétés métalliques, elle est peu considérable & laisse toujours subsister une présomption assez forte sur la décomposition de ce métal singulier.

On m'objectera peut-être que cette poudre noirâtre que mes expériences m'ont donnée, n'est pas dûe à la platine pure & dépouillée de tout ce qui lui est étranger; que la matière noire & ferrugineuse avec laquelle on la trouve toujours unie, peut être l'origine de celle que j'ai recueillie par voie de dissolution, & qu'il est difficile de concevoir qu'un métal aussi solide se détruise, pour ainsi dire, par l'effet d'un dissolvant, & encore dans des circonstances particulières, tandis que l'action de ce même dissolvant n'a jamais de pareilles suites dans les autres métaux qui s'y trouvent exposés, quelque force qu'on suppose dans cet acide pour les dissoudre, quelle que soit la violence avec laquelle ces métaux en sont attaqués. Je répondrai en rappelant ici ce que j'ai dit, que la platine dont j'ai fait la matière de mes expériences, étoit très-ductile, qu'elle devenoit brillante à peu-près comme l'argent au sortir du laminoir, & qu'elle étoit aussi pure que je pouvois l'espérer: j'ajouterai que je ne me servis que d'or & d'argent fins pour toutes mes opérations, & que je fus très-attentif, en les suivant, à ne laisser aucune incertitude sur ce qui résulteroit de la dissolution de la platine par l'acide nitreux.

S'il est nécessaire d'écarter l'or & l'argent fins pour remonter au principe de ce résidu singulier, il n'est pas possible de le chercher ailleurs que dans la platine; & si la pureté de celle dont je me suis servi n'est pas parfaitement prouvée, on verra au moins, par une expérience dont je rendrai compte, que les portions de ce métal qui se sont annoncées encore avec les caractères métalliques, après une première dissolution, les ont perdus à la seconde, & se sont converties en cette poussière noirâtre que j'ai tenté en vain de ramener à son premier état de solidité.

On remarque sans doute, dans le compte que je viens de

rendre de mes premières expériences, que le moyen dont je me suis servi pour retirer de l'acide nitreux l'argent & la platine qu'il tenoit en dissolution, n'étoit pas le meilleur que je pusse employer: on a vu que, par une suite de la confusion qui se faisoit des deux métaux précipités l'un sur l'autre par la même cause, j'étois obligé de mettre de nouveau l'argent en dissolution pour que la platine s'en séparât & restât seule au fond du matras. Il est vrai que ce procédé n'étoit pas assez simple ni même propre à me procurer des produits bien distincts; mais il me fut utile pour me faire connoître cette poudre noire, ce résidu sans consistance que la platine fournit; je pus, en l'employant, distinguer assez bien la partie du métal capable de reprendre les caractères métalliques d'avec la portion de ce même métal que j'essayai en vain, par différens moyens, de rétablir dans son premier état. Le procédé en effet dont je fis usage en continuant mes recherches, fut plus favorable à la vérité pour séparer l'argent de la platine d'une manière exacte, mais il étoit de nature à me dérober la présence de ce résidu noirâtre, & à ne me laisser après le dépôt total de l'argent, pour produit presque unique de la platine, que la partie de ce métal qui en avoit repris les propriétés. Je dûs donc au moyen le moins avantageux de faire précipiter l'argent & la platine du dissolvant qui les contenoit, la connoissance de ce résidu singulier: quoiqu'en apparence il soit peu digne d'attention, je crois cependant qu'il pourra donner lieu à de nouvelles recherches sur la nature de la platine; que les Chimistes, qui se sont déjà occupés de ce métal avec tant de succès, pourront le considérer de nouveau relativement à mon travail qui n'est qu'ébauché, & que bientôt ils verront mieux que moi, par les épreuves que la platine subira entre leurs mains, combien elle est éloignée, malgré tout ce qui la distingue, de l'or & de l'argent, sur-tout quand on considère l'état fixe de ces deux métaux & les principes inaltérables qui les constituent.

Lorsque je commençai mes expériences, pour séparer de la manière la plus exacte l'argent & la platine que l'acide

nitreux tenoit en diſſolution, je me bornai à une petite quantité des trois métaux, afin de ne tenter des expériences un peu plus en grand qu'avec la certitude d'y réuſſir: je n'employai d'abord que 12 ou 24 grains d'or fin, 2 ou 4 grains de platine ductile & une quantité d'argent fin trois fois plus forte, ou à peu-près, que celle de l'or qui faiſoit partie du mélange: les trois métaux paſſoient à la coupelle, non pour y être épurés, comme on ſent bien, puiſqu'aucun d'eux ne contenoit d'alliage, mais afin qu'ils s'y fondiſſent complètement à la faveur de la litharge, & y entraſſent dans une combinaiſon parfaite: le bouton que j'en retirois étoit laminé, réduit en cornet & diſſous dans l'acide nitreux: à meſure que je retirois du matras l'acide plus ou moins affoibli, que j'y avois mis à deux ou trois repriſes, je le verſois dans un flacon où devoit ſe faire le premier précipité; je lavois le cornet d'or, je lui donnois le recuit ordinaire, & je ne m'occupois plus enſuite que de la diſſolution d'argent & de platine que le flacon contenoit.

Je commençois par y verſer une quantité d'eau diſtillée, égale à celle de la diſſolution, & je faiſois parfaitement le mélange de la totalité de la liqueur, en agitant fortement le flacon; j'y verſois enſuite à pluſieurs repriſes de l'eſprit de ſel; je laiſſois repoſer la liqueur pendant quelques heures, afin que ſa partie ſupérieure s'éclaircît, & que je puſſe juger, en y faiſant tomber des gouttes d'eſprit de ſel, ſi elle contenoit ou non quelques parties d'argent: lorſque je m'étois rendu certain que la totalité, ou à peu-près, de ce métal s'étoit précipitée au fond du flacon, je laiſſois repoſer la liqueur pendant pluſieurs jours; je ne la décantois même qu'autant qu'elle étoit de la plus grande tranſparence & que l'eſprit de ſel ne la troubloit plus. L'affaiſſement bien marqué de l'argent & ſon adhéſion au fond du flacon me donnoit la facilité de verſer dans un vaſe de verre ou dans une terrine de grès la liqueur très-claire, & juſqu'à la dernière goutte; elle ne contenoit plus que la platine: l'argent en effet reſté dans le flacon en étoit entièrement dépouillé, comme je l'ai toujours

reconnu,

reconnu, en rendant à ce métal sa première ductilité. La liqueur que la terrine contenoit, & qui étoit devenue une eau régale foible, attiroit ensuite toute mon attention; elle en fut long-temps l'objet principal dans le cours de mes expériences, parce que je n'employai pas d'abord le seul moyen d'en retirer totalement la platine, & que je fus trompé sur ce qu'il y avoit de réel en résidu de ce métal dans les premiers précipités que j'obtins. J'étendois donc dans une assez grande quantité d'eau distillée cette liqueur, tenant la platine en dissolution, & après l'avoir mêlée parfaitement en me servant d'une spatule de bois, j'y versois de l'alkali fixe avec ménagement; après l'effervescence qui en étoit la suite prompte, j'y versois de nouvel alkali; j'attendois qu'il eût produit son effet, & je continuois ainsi d'y en verser jusqu'à ce que la liqueur devînt calme & que l'acide fût saturé: alors je commençois à m'apercevoir que la liqueur perdoit un peu de sa transparence, qu'il nageoit une infinité de particules blanchâtres, légères, un peu transparentes elles-mêmes, & qui, en se réunissant, tomboient fort lentement au fond du vase; lorsque le dépôt étoit formé & que la liqueur avoit repris sa transparence, j'en décantois la plus grande partie, & je filtrois le reste à travers du papier fin, assez serré & plié en quatre: le dépôt resté sur le filtre ressembloit beaucoup, tant pour la couleur que pour l'espèce de consistance qu'il avoit, à de la colle de farine qui a perdu une partie de son humidité. J'enlevois de dessus le filtre la feuille sur laquelle étoit le dépôt; je le laissois sécher à l'air; je l'enveloppois ensuite dans cette même feuille de papier, & j'en formois un peloton que je brûlois dans un creuset bien couvert, en le faisant rougir au milieu des charbons. Étant certain que par cette précaution je ne perdois rien du dépôt, je mêlois la poudre jointe aux cendres du papier à laquelle il s'étoit réduit, soit avec du *minium*, soit avec de la chaux de cuivre, & je la traitois par le flux noir: je passois à la coupelle le culot de plomb qui me venoit d'une part, & je faisois dissoudre dans l'acide nitreux le culot de cuivre réduit en lames minces que je

retirois d'un autre côté; je n'employois l'acide, dans cette circonſtance, qu'à froid & après l'avoir affoibli.

Dès les premières expériences que je fis pour retirer la platine de l'acide nitreux, par le procédé plus exact dont je viens d'expoſer les détails, je vis avec ſurpriſe que non-ſeulement le plomb ſur la coupelle & le cuivre dans le matras ne m'avoit pas laiſſé la petite quantité de platine à laquelle je devois m'attendre, dans l'ordre ordinaire des réductions de métaux, mais qu'il s'y en trouvoit à peine quelques particules, dont peut-être je ne me ſerois pas aperçu ſi je n'euſſe pas compté ſur un produit plus ou moins fort en platine dans ces opérations. Je répétai pluſieurs fois ces expériences tantôt en me bornant à la quantité préciſe d'or, d'argent & de platine que j'avois d'abord employée, tantôt en augmentant un peu la quantité de ces trois métaux, & en donnant une attention nouvelle aux détails de l'opération : j'ai toujours reconnu que ce qui reſtoit en platine, ſoit ſur la coupelle, ſoit dans le matras, n'avoit aucune proportion avec la quantité de ce métal qui étoit entrée dans le mélange, & j'ai ſenti que ce fait, aſſez ſurprenant en lui-même, méritoit encore d'être approfondi.

Dans la forte perſuaſion où j'étois que la platine diſſoute dans l'acide nitreux pouvoit en être précipitée par le moyen de l'alkali fixe, mais que peut-être cette précipitation n'avoit lieu que difficilement, je crus qu'en mêlant de la diſſolution de cuivre par le même acide avec celle qui contenoit de la platine, le dépôt de ce dernier métal deviendroit plus facile à la faveur du cuivre qui s'y trouveroit mêlé, & qui certainement ſeroit très-prompt à ſe précipiter.

Je verſai donc de l'alkali fixe ſur un mélange de ces deux ſortes de diſſolution: lorſque la liqueur bien ſaturée eut repris ſa tranſparence, j'en décantai la plus grande partie, & je filtrai le reſte qui contenoit tout le dépôt: lorſque la filtration fut finie, je fis ſécher ce dépôt bleuâtre; je l'enveloppai avec le papier même ſur lequel il étoit reſté; je le réduiſis en cendres, comme on a vu que je l'ai fait pour

une autre expérience, & je procédai à la réduction de ce dépôt par le moyen du flux noir. J'avois fait dissoudre un gros de cuivre dans l'acide nitreux qui me servit pour cette expérience, & qui fut mêlé avec la dissolution de platine: je retrouvai ce même gros de cuivre, ou à peu-près, dans le culot que je retirai de cette opération; je l'aplatis sous le marteau; je le laminai, & je le fis dissoudre à froid dans de l'acide nitreux affoibli; mais ce fut inutilement pour y retrouver aussi la quantité de platine que j'avois employée: cette expérience ne fit que confirmer celles dont j'ai rendu compte; elle me convainquit, par une comparaison frappante, que le cuivre, bien inférieur à la platine, quant à la pesanteur spécifique & à la roideur des parties, n'éprouvoit pas cependant une altération considérable dans sa dissolution par l'acide nitreux, tandis que la platine, avec des caractères qui annoncent la plus grande solidité dans les principes qui la constituent, ne sort jamais d'une pareille épreuve, l'acide nitreux fût-il affoibli, qu'avec des pertes qui étonnent & qui doivent la faire regarder à cet égard, comme au-dessous même du cuivre, loin qu'on puisse la placer à côté des métaux précieux.

On juge sans doute que d'après tout ce qui s'étoit passé sous mes yeux, & un grand nombre d'expériences qui ne s'étoient point démenties sur le fait dont il s'agit ici, je fus conduit comme nécessairement à conclure, ou que la platine se décomposoit, se détruisoit en très-grande partie lorsque je la rendois dissoluble par l'acide nitreux, ou qu'une fois dissoute dans cet acide, elle y restoit si bien combinée, que les moyens dont je me suis servi pour la faire précipiter n'étoient pas capables de produire cet effet, ne pouvoient pas au moins le produire tout entier.

J'ai donc fini par tourner mes vues de ce dernier côté; j'ai voulu être certain que j'aurois retiré de la dissolution de platine, la moindre des parties de ce métal qu'elle auroit contenue; j'ai desiré que si ensuite de cette dissolution, la platine ne paroissoit pas en total ou à peu-près, comme l'or, l'argent, le cuivre, & avec l'éclat & la solidité qui

caractérisent les métaux, on ne pût attribuer qu'à la nature même de la platine les déchets extraordinaires qu'on y observeroit.

Je n'ai pas eu besoin, pour parvenir à ce but, de m'écarter beaucoup de la route que j'avois d'abord suivie; au lieu en effet de chercher la platine dans le dépôt seul qui, à la faveur de l'alkali fixe, s'étoit précipité de la dissolution, je la cherchai, tant dans ce dépôt même que dans la liqueur qui l'avoit fourni.

Persuadé que cette expérience-ci seroit plus décisive que celles dont j'ai rendu compte, pour qu'il ne subsistât aucun doute, s'il étoit possible, sur le fait dont il est ici question, je la fis un peu plus en grand que n'étoient les précédentes; à une once d'or fin, je joignis 2 gros de platine ductile & 2 onces 6 gros d'argent fin, je fondis ces trois métaux dans un creuset; je les y mêlai aussi parfaitement qu'il me fut possible pendant que la matière étoit en bain, & je la coulai ensuite dans une lingotière dont aucune grenaille de ce mélange ne s'écarta; le lingot que j'obtins de cette fonte étoit très-net & aussi doux que peuvent l'être l'or & l'argent qui contiennent de la platine; il fut forgé, réduit en une lame mince & divisé en trente-deux parties, lesquelles furent roulées en cornets du poids chacun d'un gros ou environ: je fis dissoudre dans l'acide nitreux seize de ces cornets qui composoient à peu-près 2 onces, & je conduisis cette opération avec les mêmes soins que j'avois donnés à d'autres dont j'ai parlé précédemment. Lorsque les cornets d'or eurent été recuits & pesés, je remarquai que leur poids étoit de 4 gros 12 grains, c'est-à-dire plus fort de ces 12 grains qu'il n'auroit fallu pour que ces cornets eussent représenté exactement la quantité d'or que j'avois employée: on a vu en effet qu'il étoit entré une once d'or dans le lingot dont les seize cornets, avant le départ, formoient la moitié, & que par conséquent il ne devoit me rester que 4 gros de ce métal après la dissolution de la platine & de l'argent. Je ne fus point surpris de cette surcharge de 12 grains; le poids de la platine, dans cette expérience, étoit

d'un gros ſur quatre d'or fin: je ſavois que quand on l'emploie dans une pareille proportion pour le mélange des trois métaux, & qu'on veut conſerver en entier les cornets, il eſt très-difficile de la diſſoudre en totalité; mais cet inconvénient n'influoit en rien, comme on va en juger, ſur les conſéquences qu'il y avoit à tirer de l'opération; au lieu de ſuppoſer un gros de platine dans la diſſolution, je ne comptai que ſur 60 grains, & j'établis mes réſultats ſur le pied d'un ſixième de moins à l'égard de ce métal.

Après avoir étendu cette diſſolution dans une certaine quantité d'eau, j'en fis précipiter l'argent par l'eſprit de ſel, & je verſai enſuite de l'alkali fixe juſqu'à ſaturation ſur la liqueur tranſparente que j'avois décantée du flacon où l'argent étoit reſté en dépôt: au lieu d'attendre que cette liqueur s'éclaircît en me donnant un précipité, je l'agitai beaucoup au contraire & je la verſai bruſquement dans une terrine que je plaçai ſur un bain de ſable, afin qu'elle s'y évaporât lentement à la faveur d'une chaleur modérée; j'avois ſoin, à meſure qu'elle diminuoit & laiſſoit ſur les bords le ſel qui s'y deſſéchoit bien-tôt & y adhéroit fortement, de le détacher de la ſuperficie de la terrine & de le faire rentrer dans la liqueur; je parvins ainſi peu-à-peu à raſſembler en une maſſe ſaline tout ce que la liqueur contenoit, & lorſqu'elle fut bien sèche, j'en conſtatai le poids; il étoit de 5 onces 4 gros.

J'avois d'abord penſé que pour retirer la platine de ce dépôt ſalin, qui étoit une eſpèce de nitre régénéré, il me ſuffiroit, en faiſant uſage du flux noir, de le compoſer d'une partie de ſalpêtre égale à la quantité du dépôt ſalin que j'emploîrois, & de deux parties de tartre qui détonneroient ſeules avec le ſalpêtre; je croyois qu'en mêlant enſuite le dépôt ſalin, joint à une certaine quantité de *minium* avec le flux noir, j'obtiendrois, par une réduction prompte, un culot de plomb, plus ou moins chargé de la platine que le dépôt ſalin auroit fournie: mais je ne réuſſis point dans cette expérience; je ne recueillis des ſcories que quelques grenailles de plomb; je la fis même une ſeconde fois avec auſſi peu de ſuccès: j'en

sentis bien-tôt la raison; il n'étoit pas entré assez de tartre dans la composition du flux noir, & il convenoit d'ailleurs que le dépôt salin fût joint au salpêtre pour la détonation.

On a vu plus haut que la masse saline retirée de la liqueur pesoit 5 onces 4 gros.

Je n'employai d'abord que la cinquième partie de ce dépôt salin, qui pesoit par conséquent 1 once 57 grains; je la mêlai avec une quantité égale de salpêtre rafiné, & je les fis détoner ensuite avec un peu plus de 4 onces de tartre; lorsque ce flux noir eut été réduit en poudre, j'y mêlai 6 gros de cuivre provenant du dépôt que laissent après elles aux affinages, les eaux-fortes de reprise: cette espèce de chaux de cuivre me parut préférable à toute autre pour cette opération; ce n'est qu'une poudre impalpable & par-là très-propre à saisir dans sa réduction toutes les particules éparses des autres matières métalliques avec lesquelles ce cuivre en poudre se trouve confondu.

La fonte de ce mélange réussit comme je le desirois; les scories étoient nettes, & je trouvai au fond du creuset en forme de cône renversé dont je me servis, un culot de cuivre du poids de 4 gros 48 grains. Je ne fus point étonné du déchet de 1 gros 24 grains sur la chaux de cuivre que j'avois employée: on peut voir en effet, dans un Mémoire que j'ai
Année 1775, page 193.
lû à l'Académie, sur la fonte de la chaux de cuivre des affinages, qu'après plusieurs expériences pour la revivifier le plus utilement qu'il seroit possible, la moindre perte que j'éprouvai sur cette chaux, en la rétablissant dans son état métallique,
Page 202.
fut de 22 pour 100 ou environ; & on voit que dans l'expérience dont il s'agit ici, les déchets ont été dans un rapport égal ou à peu-près sur cette même chaux.

On peut se rappeler que les seize cornets d'or dépendans de l'expérience dont il est ici question, avoient un excédant en poids de 12 grains, qui ne pouvoit être attribué qu'à une portion de platine dont ces cornets n'avoient pas été dépouillés; dès-lors il devient constant que le dépôt salin résultant de la dissolution ne contenoit, comme je l'ai dit,

que 60 grains de ce métal; que le cinquième de ce dépôt, qui avoit été la matière de mon expérience, n'en contenoit que 12, & que cette cinquième partie de la platine devoit se trouver dans le culot de cuivre, pesant 4 gros 48 grains, qui m'étoit resté de cette opération.

Je réduisis ce culot de cuivre en lames fort minces & propres à être promptement attaquées par l'acide nitreux : je n'en employai d'abord qu'une douzième partie ou 28 grains; je les fis dissoudre à froid dans l'acide nitreux que j'avois affoibli; la dissolution fut lente, mais complète; & lorsque je m'aperçus que l'acide n'agissoit plus sur le métal, je mis le matras sur le feu, & j'y tins la liqueur en ébullition pendant quelque temps : il s'en précipita une poudre noirâtre que je lavai avec de l'eau distillée, que je rassemblai avec soin & que je fis recuire ensuite dans un petit creuset : elle y prit une couleur grise; examinée au microscope, elle avoit le coup-d'œil de la platine en poudre & tous les caractères métalliques : je la pesai à une balance délicate, son poids ne se trouva que de $\frac{21}{64}$ de grain : je répétai trois fois cette expérience, en ne faisant dissoudre également que 28 grains ou un douzième du culot de cuivre; le poids de la poudre de la platine que je recueillois rouloit toujours sur 20 à $\frac{21}{64}$ de grain : on a vu cependant que chacune de ces portions déterminées du culot de cuivre auroit dû contenir 1 grain entier de platine, ou au moins à peu-près 1 grain, en supposant que ce métal n'eût souffert aucune altération notable dans l'opération du départ : on remarque au contraire qu'il s'est trouvé une perte des deux tiers sur chacun des petits produits en poudre de platine, & que cette perte s'est soutenue constamment dans les quatre différentes dissolutions.

Je jugeai encore mieux du degré de confiance que pouvoient mériter ces premiers résultats par celui qui les suivit; je fis dissoudre dans de l'acide nitreux affoibli & à froid également jusqu'au moment où l'acide n'agissoit plus, 112 grains du même culot de cuivre; je cherchai, comme on voit, dans le produit d'une seule opération celui que les

quatre autres réunies m'avoient donné; il fut effectivement d'un grain $\frac{10}{32}$ de platine, quantité à laquelle se rapportoient les produits réunis des expériences précédentes, & qui n'étoit elle-même que le tiers, à très-peu près, des 4 grains de platine que les 112 grains de cuivre auroient dû contenir. Il paroît certain, d'après les détails dans lesquels je viens d'entrer, que si la quantité de flux noir que j'ai été contraint d'employer étoit dix fois plus considérable qu'il ne falloit pour revivifier le peu de platine que le cinquième du dépôt salin contenoit, & la chaux de cuivre que j'y avois jointe, cette même chaux de cuivre étoit aussi plus que suffisante pour saisir toutes les particules de la platine capables de reprendre l'état métallique & pour se combiner parfaitement avec elles. Sur 12 grains de platine, il n'y en a eu que 4 qui ont pu rentrer dans l'état de métal; le cuivre s'en est emparé, & ces 4 grains de platine se sont trouvés répandus avec une égalité parfaite, comme je viens de le faire observer, dans les 336 grains de cuivre, auxquels s'étoit réduite la chaux de ce même métal que j'avois employée.

Si au lieu de verser de l'alkali fixe sur l'acide nitreux tenant la platine en dissolution, & de faire évaporer ensuite la totalité de la liqueur pour obtenir le nitre régénéré & chargé de la platine, on fait évaporer l'acide nitreux dans l'état où il est lorsque l'argent en a été précipité par le moyen de l'esprit de sel, on aura un léger dépôt qui contiendra la platine, comme le nitre régénéré l'auroit contenu: si à ce dépôt peu considérable, on joint le double & même le quadruple de son poids en chaux de cuivre, afin qu'elle puisse recueillir toutes les parcelles de platine, & on traite ce mélange par le flux noir, on obtiendra un petit culot de cuivre très-ductile qui contiendra la platine, mais qui après avoir été dissous à froid par l'acide nitreux, ne laissera au fond du matras que la moitié ou environ de la quantité de cette même platine qu'on aura employée; ce restant de la quantité du métal mis en expérience, ne sera pas même entièrement dans l'état métallique, puisqu'en le mettant dans un matras avec de

de l'acide marin, après l'avoir recuit, & en faisant bouillir la liqueur, on remarquera que cette platine réduite en poudre grisâtre perdra un peu de la couleur cendrée, reprendra celle qui est propre à la platine brute, mais éprouvera une nouvelle diminution sur son poids: ce nouveau déchet n'est pas constamment égal, toute proportion gardée; il dépend du plus ou du moins de particules ferrugineuses qui se trouvent mêlées avec les parties de platine dont l'état métallique est encore conservé: cette seconde perte est quelquefois d'un tiers, d'un quart ou d'un cinquième du poids qu'avoit le précipité de platine avant qu'on l'exposât à l'action de l'acide marin. On voit par-là que la platine dissoute d'abord par l'eau régale, où elle a éprouvé beaucoup de déchet, portée ensuite à l'état de ductilité, & dépouillée par conséquent d'une grande quantité de matière ferrugineuse, se trouve réduite, après une première dissolution dans l'acide nitreux, à la moitié ou environ du poids qu'elle avoit avant qu'elle fût soumise à l'action de ce dernier acide, & fera sans cesse des pertes proportionnelles lorsqu'on la traitera de nouveau par l'acide nitreux & suivant le procédé que j'ai décrit.

Il est bon d'observer ici que la méthode dont je viens de parler, celle de faire évaporer la liqueur dans laquelle la platine est restée en dissolution, après que l'argent en a été précipité par le moyen de l'esprit de sel, & de ne point employer auparavant de l'alkali fixe, il convient, dis-je, de faire attention que ce procédé, outre qu'il est plus simple que celui que j'avois d'abord suivi, est le plus favorable pour ne rien perdre de la platine contenue dans la liqueur, & que j'ai remarqué moins de déchet sur le métal, en employant ce procédé plus simple, que je n'en avois reconnu dans les premières expériences dont j'ai exposé les détails.

On m'objectera peut-être & avec raison, que par le procédé dont j'ai fait usage, j'ai recueilli, il est vrai, du dépôt salin toute la platine qu'il contenoit, mais qu'il a pu s'en dissoudre une partie pendant la dissolution du cuivre avec lequel la platine étoit mêlée, comme elle éprouve jusqu'à un certain

point l'action de l'acide nitreux, lors même qu'elle n'est combinée qu'avec de l'argent; & on ajoutera, par une conséquence juste de cette supposition, que j'ai annoncé le poids de la poudre de platine, après la dissolution du cuivre, comme plus foible qu'il n'est réellement.

Cette objection est bien fondée; c'est même parce que j'ai senti qu'elle se présenteroit naturellement à l'esprit lorsqu'on suivroit le fil de mes recherches, que j'ai fait plusieurs expériences relatives à ce point particulier: je crois qu'elles pourront faire juger avec une sorte de précision, de ce qui reste réellement en platine après la dissolution de ce métal dans l'acide nitreux.

On a vu dans l'expérience précédente, que le culot de cuivre retiré du cinquième du dépôt salin devoit contenir $\frac{1}{28}$ en platine: je ne m'écartai point de cette proportion pour les expériences dont je vais parler; mais au lieu de composer de ces deux métaux un petit lingot duquel je pusse tirer des portions à mesure que j'en aurois besoin, je ne mêlai que 2 grains de platine ductile à 56 grains de cuivre; & afin que je fusse certain que ces 2 grains de platine étoient bien réellement dans le cuivre que j'aurois à faire dissoudre dans l'acide nitreux, j'employai, pour les fondre ensemble, le feu de lampe des Émailleurs, tantôt en réunissant les deux métaux dans une coupelle d'essai sur laquelle dardoit la flamme, tantôt en les mettant sur un charbon plat & dans un petit bassin qu'on y avoit creusé. Je n'aurois jamais pu compter sur une distribution égale de la platine dans un lingot de cuivre, si j'eusse employé ce moyen d'unir les deux métaux; & d'un autre côté j'aurois souvent couru le risque de laisser adhérentes dans un creuset quelques-unes de leurs parties si je me fusse borné à n'y fondre que 58 grains pour le total des deux métaux: j'obtins plus sûrement la précision que je desirois, à la faveur de la flamme dardée vivement sur les deux métaux: j'eus besoin qu'elle y fût poussée assez long-temps & avec violence, tant le cuivre rouge, & sur-tout la platine, entrent difficilement en fusion par ce moyen. Chacun

des boutons métalliques que j'avois ainsi mélangés, contenoit donc la petite portion de platine que je lui avois associée, & je ne pouvois attribuer qu'à l'action de l'acide nitreux la moindre perte que j'y remarquerois.

Après avoir aplati ces boutons sous le marteau, & les avoir réduits en lames minces, je les divisai chacun en huit ou dix parties, & je les fis dissoudre à froid dans de l'acide nitreux affoibli par une égale quantité d'eau distillée; cet acide ainsi affoibli, n'avoit que 21 degrés de force ou à peu-près: j'avois cru d'abord qu'il auroit peut-être suffi de faire dissoudre à froid ces lames minces & composées presque entièrement de cuivre, pour avoir en précipité bien net, les 2 grains de platine qui s'y trouvoient joints; je voyois la dissolution s'opérer d'une manière égale & toujours soutenue; je remarquois, à l'aide de la loupe, les particules noirâtres de platine qui se dégageoient de celles du cuivre, & voltigeoient dans la liqueur à mesure que ce dernier métal se fondoit peu-à-peu dans l'acide, en se combinant avec lui, & je regardois l'opération comme terminée lorsque la liqueur devenue tranquille avoit laissé tomber au fond du matras en poudre noire, en petites lames excessivement minces, toute la platine qu'elle contenoit; mais après avoir lavé avec beaucoup de précautions ce précipité & l'avoir fait recuire, j'ai observé quelquefois qu'il pesoit un peu plus de 2 grains, & qu'il receloit encore par conséquent quelques particules de cuivre: dès-lors je me déterminai à faire bouillir l'acide pendant quelques minutes après la dissolution à froid & l'état tranquille de la liqueur. Loin d'avoir un excédant de poids lorsque j'avois ainsi donné par la chaleur plus d'action à l'acide nitreux, j'observois quelque diminution sur le poids de la platine, & je voyois qu'elle rouloit sur un quart de grain ou environ, c'est-à-dire sur le huitième de la platine que chacun des boutons contenoit. Je répétai plusieurs fois cette expérience, soit en faisant dissoudre le bouton tout entier, soit en le divisant en deux ou même en quatre parties, pour faire autant d'opérations & obtenir des résultats que je pusse

rapprocher de celui que le bouton entier m'avoit fourni : il m'a toujours paru que la perte sur les 2 grains de platine rouloit, comme je l'ai dit, sur un huitième ou environ de ce métal, lorsque je n'avois rien perdu des particules sans nombre, infiniment légères & très-lentes à se précipiter en total, qui composoient la quantité juste de platine que j'avois à recueillir. Cette opération en effet, quand même on la feroit en grand, demande beaucoup de soin; & peut-être, en la bornant à de petits objets dont une balance délicate ne manqueroit jamais de déterminer le poids, seroit-il possible d'y mieux réussir qu'en employant une quantité un peu considérable de platine, dont les particules subdivisées à l'infini dans une grande quantité de liqueur, seroient très-difficiles à rassembler.

Ne pouvant pas douter que la platine mêlée avec du cuivre ne fût attaquée jusqu'à un certain point par l'acide nitreux, quoiqu'affoibli & employé à froid, je tâchai de faire restituer à cet acide le quart de grain en platine dont il s'étoit chargé: je suivis à cet égard la méthode que j'avois déjà employée & dont on a vu les détails: je versai de l'alkali fixe sur cet acide jusqu'à saturation; je fis évaporer la liqueur, & ayant traité ensuite par le flux noir le dépôt qu'elle me laissa, j'en tirai un petit bouton de cuivre qui fut laminé & dissous dans l'acide nitreux : il resta au fond du matras un léger dépôt de poudre noirâtre que je lavai attentivement avec de l'eau distillée & que je fis précipiter ensuite dans un petit creuset neuf dont le fond étoit très-net: au lieu d'y trouver, après le recuit qu'y reçut cette poudre noire, des parcelles de platine dans l'état métallique, éparses, mais aisées à rassembler au moindre coup que l'on donne au creuset, je n'y vis qu'une tache noirâtre superficielle, sans aucune apparence de métal, & si adhérente au fond du creuset, qu'il me fut impossible d'en détacher quelques parties pour mieux les examiner. A la vue de cette pellicule noire & comme incrustée dans l'endroit du creuset où le précipité de platine s'étoit réuni, il ne me fut pas difficile de reconnoître la poudre noire dont j'ai déjà parlé, qui s'attachoit fortement aux capsules de verre, &

dont je ne pus parvenir à former un petit amas pulvérulent qu'en la détachant peu-à-peu des parois de la capſule & à meſure qu'elle perdoit ſon humidité: on ſe rappelle que cette poudre noire n'avoit preſque rien conſervé de ſa nature métallique, & annonçoit une décompoſition en partie de la platine, comme le fait dont il s'agit ici tend beaucoup à la confirmer.

Je ne pus donc pas conſtater par le poids, ſi le quart de grain en platine que l'acide nitreux avoit enlevé, ſe trouvoit réellement dans le précipité que j'obtins; mais il me parut aſſez conſidérable pour répondre à ce quart de grain, s'il eût repris ſes propriétés métalliques, & conſéquemment la peſanteur ſpécifique de la platine dont ce précipité étoit une portion.

Dans le nombre des boutons compoſés de 56 grains de cuivre & de 2 grains de platine, que je fis fondre au feu de lampe, il s'en trouva deux qui m'inſtruiſirent d'un fait auſſi ſingulier en lui-même, qu'il s'accorde peu avec un autre du même ordre dont je ſuis témoin tous les jours.

Après avoir réduit un de ces boutons en une lame très-mince, & l'avoir coupée avec des ciſoires en huit ou dix parties, je la fis diſſoudre dans de l'acide nitreux affoibli; lorſque la liqueur fut tranquille & que l'opération me parut terminée, je conſidérai, à l'aide de la loupe, le fond extérieur du matras, dans la vue ſeule d'examiner la quantité de platine en poudre qui pouvoit s'y être précipitée; je fus fort ſurpris d'y apercevoir de petites plaques blanches dont la forme me parut la même que celle des morceaux du bouton laminé que j'avois mis dans le matras & dont j'attendois l'entière diſſolution, à la petite portion près de platine qu'ils contenoient: ma première idée fut de ſoupçonner que l'acide nitreux n'avoit pas produit tout ſon effet, & ſur le champ je plaçai le matras ſur le feu où l'acide reſta en ébullition pendant quelque temps: cette dernière opération ne ſervit qu'à donner plus de blancheur, plus de netteté aux petites plaques que j'avois d'abord obſervées; je n'héſitai donc plus à décanter l'acide, à laver le précipité & à le faire tomber enſuite dans un petit creuſet

où il pût recevoir un recuit; mais avant que d'en venir à ce dernier terme de l'opération, j'examinai attentivement les petites plaques que le creuſet contenoit : je ne doutai point qu'elles ne fuſſent preſque entièrement de platine, & je ne me trompois pas; mais leur petiteſſe, relativement à la dimenſion de celles que j'avois miſes en diſſolution, leur forme régulière & abſolument pareille à celle de ces mêmes plaques miſes dans l'acide nitreux, la ſurface aſſez conſidérable qu'elles occupoient, quoiqu'elles ne duſſent peſer que 2 grains, tout me parut ſurprenant dans ce fait & piqua ma curioſité. Mon étonnement augmenta lorſque je vis que ces plaques avoient conſervé toutes leurs dimenſions après le recuit, ou au moins n'avoient pas pris une retraite ſenſible ; elles peſoient enſemble 2 grains & repréſentoient par conſéquent le poids total de la platine qui étoit entrée dans le bouton duquel ces plaques ſortoient. Inſtruit de ce que j'avois à obſerver dans une ſeconde expérience, par le fait aſſez ſingulier que je venois d'avoir ſous les yeux, je m'appliquai moins à chercher quelle pouvoit en être la cauſe, qu'à le conſtater de manière qu'il ne me reſtât aucun doute ſur la certitude que j'y attacherois. Lorſque j'eus aplati ſous le marteau & réduit en une lame mince un bouton pareil à celui dont je viens de parler, je coupai ſur cette lame deux petites plaques parfaitement égales, & qui avoient chacune 7 lignes $\frac{2}{3}$ de longueur ſur 3 lignes $\frac{3}{4}$ de largeur; une de ces plaques fut miſe dans l'acide nitreux affoibli, & je réſervai l'autre pour lui être comparée après la diſſolution du cuivre qu'elle contenoit: l'effet que j'ai annoncé plus haut eut lieu également dans cette expérience-ci; il ſe trouva au fond du matras une petite plaque blanche qui avoit conſervé ſa première forme, mais dont les dimenſions étoient beaucoup plus petites au ſimple coup-d'œil, que celles de la plaque que j'avois réſervée: je décantai l'acide nitreux, & après avoir lavé la plaque, qui étoit d'une légèreté extrême, je la fis gliſſer doucement dans un petit creuſet; lorſque l'eau en fut totalement écoulée & que la plaque fut reſtée à ſec, j'en pris les dimenſions avec un compas; elle n'avoit plus

que 3 lignes $\frac{1}{3}$ de longueur ſur 2 lignes $\frac{1}{4}$ de largeur; elle avoit perdu par conſéquent 4 lignes $\frac{1}{3}$ d'un côté & 1 ligne $\frac{1}{2}$ de l'autre. Le recuit que je donnai à cette petite feuille de platine ne produiſit aucun changement dans ſes dimenſions, ou au moins il ne fut pas aſſez marqué pour que le compas m'en avertît.

On ſera étonné ſans doute que la retraite conſidérable, & une retraite en tout ſens que cette feuille de platine a éprouvée, n'ait eu lieu que dans l'acide nitreux & pendant ſa moindre action ſur le cuivre qui la contenoit; on verra encore avec ſurpriſe que le recuit n'a contribué en rien au rétréciſſement d'une feuille de métal ſi légère, tandis qu'il eſt certain qu'un cornet d'or, après le départ, conſerve toutes les dimenſions qu'il avoit avant que d'y être ſoumis, & qu'au contraire après le recuit il perd un tiers, ou à peu-près, ſur ces mêmes dimenſions.

On préſumera peut-être que la grande diminution que j'ai obſervée ſur l'étendue qu'avoit d'abord cette feuille de platine, n'étoit pas dûe à un reſſerrement des parties ſur elles-mêmes, mais à un retranchement qui a pu ſe faire avec une ſorte d'égalité aux bords de cette feuille, tandis que le milieu eſt reſté intact & tel qu'il ſubſiſtoit dans la petite plaque avant que l'acide nitreux l'attaquât: mais on écartera bien-tôt cette idée quand j'aurai fait obſerver que non-ſeulement les bords de cette feuille de platine étoient parfaitement terminés & avoient conſervé leur vive-arête, mais qu'on remarque encore quelquefois, avec le ſecours de la loupe, ſur les bords de quelques-unes de ces feuilles, une légère bavure, une eſpèce de morfil que la ciſoire occaſionne, parce qu'elle ne coupe pas toujours d'une manière bien nette les plaques d'où ſortent ces petites feuilles de platine *. Les bords de celle dont il s'agit ici

* On doit faire attention encore que dans le cas où l'on perſiſteroit à croire qu'il n'y a pas de retraite réelle dans la feuille de la platine, mais que ſes bords ſont entamés de toutes parts, & que le milieu ſeul ſubſiſte dans ſon entier, il faudroit ſuppoſer que la portion détachée des bords s'annonceroit d'une manière ſenſible, quelque foible qu'elle fût, & ſe précipiteroit

n'ont donc souffert aucune altération ; & comme il est constant que cette feuille si délicate de platine a éprouvé une diminution considérable sur son étendue, même au milieu d'un fluide très-actif qui tendoit sans cesse par sa nature à écarter les unes des autres les parties de cette feuille, on se trouve forcé de reconnoître qu'il y a eu dans cette circonstance une retraite bien réelle, un rapprochement de ces mêmes parties dont la cause paroît d'autant plus difficile à découvrir, que ce fait particulier ne s'accorde point avec ceux du même ordre qui sont connus, & qu'il ne laisse rien entrevoir qui conduise à l'expliquer.

Il sera plus aisé, je crois, de remonter à la cause d'un autre fait qu'on a pu remarquer dans l'expérience dont j'expose ici les détails. On a dû être surpris que 2 grains de platine fondus avec 56 grains de cuivre aient pu subsister en feuille après la dissolution du second de ces métaux; on a dû naturellement s'attendre à un précipité de platine en poudre, parce qu'en la supposant également distribuée dans toute l'étendue du mélange, chaque grain de platine répondoit à 28 grains de cuivre; & que dans cette supposition d'une combinaison parfaite, il ne seroit pas possible que 2 grains de métal formassent un corps continu, comme la petite feuille de platine dont il s'agit ici, quelque léger & criblé de toutes parts qu'on pût l'imaginer. Ainsi on ne peut donner une explication plausible de ce fait qu'en supposant, avec beaucoup de vraisemblance,

au fond du matras : or on ne remarque dans ces circonstances aucune particule de platine qui soit mêlée avec les feuilles; celles-ci sont seules au fond du matras, & s'y offrent dans la plus grande netteté au milieu de la liqueur qui a toute sa transparence.

Il est vrai que ces feuilles de platine se divisent quelquefois en deux parties dont les bords sont bien terminés & sans apparence de rupture, par la raison sans doute qu'elles proviennent de deux petits morceaux de platine qui n'étoient qu'adhérens l'un à l'autre dans le bouton de cuivre, qui n'étoient point entrés en fusion avec ce dernier métal, & qui s'étoient étendus l'un à côté de l'autre sous les rouleaux du laminoir; mais en rapprochant les deux parties de cette feuille de platine, on voit clairement qu'elles en forment la totalité, & représentent, à la grande retraite près qu'elles ont éprouvée, la petite plaque de cuivre chargée d'un peu de platine, à laquelle ces deux portions de la feuille appartenoient.

vraiſemblance, que le mélange de la platine & du cuivre n'étoit pas complet dans cette circonſtance, quoiqu'il eût été fait au feu de lampe, & que la matière en fuſion roulât comme une perle, dans le baſſin de la coupelle, pour peu qu'on l'agitât. Les deux grains de platine n'auront été mis, ſelon toute apparence, que dans un état pâteux au milieu du cuivre en fuſion; peu de ce dernier métal les aura pénétrés; & ces 2 grains de platine aplatis ſous le marteau dans le bouton de cuivre qui les contenoit, laminés enſuite avec lui, auront pris toute l'extenſion dont ils étoient ſuſceptibles, & auront formé, au milieu de la lame de cuivre, une lame diſtincte de platine qui, par ſa nature, devoit réſiſter à l'acide nitreux. J'ai remarqué en effet, dans une occaſion où je faiſois fondre du cuivre & de la platine au feu de lampe, & où je regardois ces deux métaux comme bien mêlés, qu'un des boutons que j'avois obtenus, laiſſoit apercevoir une petite portion de platine, dont l'éclat argentin me frappa ſur le champ, & qui étoit reſtée intacte au-deſſous du cuivre en fuſion.

Quoique je ne doutaſſe point que les précipités de platine, ayant toutes les propriétés métalliques après la diſſolution de ce métal par l'acide nitreux, ne puſſent être décompoſés en très-grande partie par l'effet d'une ſeconde diſſolution, comme l'avoit été la platine ductile que j'avois fait diſſoudre en premier lieu par le même acide, cependant je voulus avoir une expérience poſitive ſur cette altération nouvelle de la platine, & je préſumai qu'elle ſeroit au moins auſſi conſidérable que celle dont on a eu la preuve dans les expériences peu différentes entr'elles, que j'ai rapportées à ce ſujet.

Je mêlai donc 6 grains de précipité de platine réduite en poudre, qui provenoient de mes expériences, & qui avoient au coup-d'œil tous les caractères métalliques, avec 24 grains d'or fin & 69 grains d'argent dépouillé également de tout alliage: je fis paſſer à la coupelle ces trois métaux dans une quantité de plomb convenable; je laminai le bouton qui en provint, & après en avoir formé deux cornets, j'en fis le départ avec les ménagemens que deman-

doit la quantité d'argent fin que j'avois employée pour que les cornets d'or se conservassent dans leur entier. Je retirai ensuite, à la faveur de l'esprit de sel, tout l'argent que la dissolution contenoit, & n'attendant alors de l'eau régale qui en étoit résultée, que la platine seule dont la quantité juste m'intéressoit, j'y versai de l'alkali fixe, comme on a vu précédemment que je l'avois fait pour des expériences pareilles, & je procédai à l'évaporation totale de la liqueur; je mêlai 5 gros de chaux de cuivre des affinages avec le dépôt salin que la liqueur me laissa; je fis ensuite entrer ce dépôt pour un sixième dans le flux noir que je composai; je revivifiai ce cuivre; j'en obtins un culot très-net du poids de 3 gros $\frac{1}{2}$ 22 grains, & tenant la petite portion de platine qu'il avoit recueillie : il en contenoit fort peu en effet; à peine m'en donna-t-il un grain réduit en une poudre grise, métallique il est vrai, mais sur laquelle on auroit remarqué un déchet sensible, si on l'eût rassemblée en un globule de platine nette & ayant toute sa ductilité.

Les deux cornets d'or dépendans de cette expérience, & dont j'ai parlé plus haut, avoient retenu un demi-grain de platine, ou à peu-près, sur les 6 grains que j'avois *employés*; on vient de voir que le culot de cuivre m'en restitua un grain; je perdis donc dans cette expérience les trois quarts ou environ de la platine qui y étoit entrée.

On remarquera peut-être que la platine en poudre dont il falloit que je fisse usage, dans la vue de suivre sa décomposition, n'étoit pas assez nette, assez réduite à son état vraiment métallique, pour que je pusse en déduire une perte *réelle* avec autant de précision que je l'ai fait; mais on voudra bien observer que j'ai établi le poids de cette platine en poudre sur le pied de celui qu'elle avoit, comme résultat des premières expériences; qu'on ne sauroit exiger une diminution à l'égard du poids réel de cette platine en poudre que j'ai employée en second lieu, qu'elle ne retombe sur celui du produit en précipité de platine que j'ai d'abord annoncé, & qu'il est assez indifférent pour la perte réelle que souffre ce métal, ou qu'elle

soit égale dans des opérations réitérées, ou qu'elle soit plus considérable à mesure que la platine subit des épreuves, & passe de l'état métallique à celui où elle est mise par l'action violente d'un dissolvant.

Quelque opinion que l'on ait à l'égard de l'effet, soit constamment égal de l'acide nitreux sur la platine, soit plus marqué à mesure qu'on l'a fait précipiter de cet acide pour la soumettre de nouveau à toute son action, il paroît constant, d'après mes expériences, que la platine ductile a éprouvé d'abord un déchet de près des deux tiers de la quantité que j'en avois employée : il paroît certain également que la platine en poudre retirée de l'acide nitreux & dissoute de nouveau par ce même acide, a souffert une perte au moins aussi considérable que celle dont je parle; & par une suite nécessaire de ces déchets successifs sur une quantité déterminée de platine, on voit qu'il ne reste à la fin de la seconde opération, qu'une petite partie du métal employé.

Si l'on présume que j'ai porté un peu trop haut cette perte, par la raison que je n'ai pas fait restituer à l'acide nitreux, malgré les précautions que j'ai prises, toute la platine qu'il contenoit, ou parce que la chaux de cuivre ne s'est pas chargée de la totalité du métal que le dépôt salin receloit, on peut borner le déchet à la moitié, ou aux deux cinquièmes de ce métal; mais je prie qu'on se rappelle dans ce moment, qu'il y a une perte de moitié ou environ sur la platine brute, après sa dissolution par l'eau régale, & lorsqu'elle a été conduite à cet état de ductilité parfaite, que d'habiles Chimistes ont eu le talent de lui procurer; qu'on fasse attention que par mes expériences cette perte, & une plus forte quelquefois, a lieu sur ce métal, après même qu'il est devenu ductile, & qu'on l'a dépouillé d'une matière qui en altéroit la pureté; qu'on observe encore que ce métal attaqué sans cesse par l'acide nitreux, éprouve sans cesse de nouveaux déchets, & toujours aussi considérables qu'il les avoit soufferts avant que d'avoir été mis dans l'état de pureté dont il est susceptible; qu'on remarque enfin qu'en faisant ainsi dissoudre la platine,

même celle qui eſt ductile, par l'acide nitreux, en rétabliſſant enſuite dans l'état métallique ce qu'il en reſte comme précipité, ce métal paroît ſe détruire continuellement, & ne laiſſe bien-tôt, pour peu que ces opérations ſoient réitérées, que de foibles veſtiges de la conſiſtance qu'il avoit.

Lorſqu'on traite les métaux & ſur-tout ceux qui ſont parfaits, on eſt ſi peu accoutumé à des déchets conſidérables, tels qu'on les remarque ſur la platine, qu'il ſeroit difficile de regarder les principes qui la conſtituent, comme auſſi fixes que ceux des autres métaux : en même temps qu'on eſt frappé de ſa grande peſanteur ſpécifique, on eſt étonné des altérations notables qu'elle éprouve par les effets de l'acide nitreux, tandis que d'autres métaux beaucoup moins peſans qu'elle, cèdent facilement, il eſt vrai, à l'action des acides, mais reviennent bien-tôt avec peu de perte & plus purs qu'ils n'étoient à l'état de ſolidité, de liaiſon intime des parties qui les caractériſoit.

On a vu, dans le courant de ce Mémoire, que mes expériences m'ont conduit néceſſairement à faire un grand nombre de réductions, pour revivifier la chaux de cuivre que j'employois, & recueillir par ce moyen les moindres parcelles de platine que l'acide nitreux mêlé d'un peu d'eſprit de ſel avoit laiſſées au fond des capſules, après l'évaporation totale de la liqueur, que le cuivre avoit ſaiſies en reprenant ſon état métallique, & avoit entraînées avec lui au fond des creuſets, où le culot compoſé de cuivre & d'un peu de platine s'étoit formé.

On ſoupçonnera peut-être que ſi j'ai éprouvé, dans ces réductions, des déchets conſidérables ſur la platine, c'eſt uniquement parce que je n'ai pas retiré des différens dépôts, que les liqueurs évaporées m'ont fournis, toute la platine qu'ils contenoient; que les ſcories que j'abandonnois, après l'opération, pouvoient encore receler des parcelles de platine; que les particules exceſſivement attenuées de ce métal pouvoient avoir échappé au cuivre qui ſe revivifioit, & s'être trouvées enſuite trop légères pour ſe précipiter d'elles-mêmes au fond du creuſet à travers du flux noir, quelque fluide qu'on le ſuppoſât.

Quoique j'aie toujours eu l'attention d'employer vingt ou trente fois plus de chaux de cuivre dans mes réductions, que je n'attendois de platine qui s'y feroit réunie, quoique cette chaux fût réduite elle-même en parties de la plus grande ténuité, capables par conféquent de faifir par-tout celles de la platine qu'elles rencontreroient, & que j'euffe tout lieu de croire qu'il n'étoit rien refté dans les fcories qui eût pu rentrer dans l'état métallique; cependant afin de ne laiffer fubfifter aucun doute à cet égard, j'ai tourné mes vues du côté de l'examen de ces mêmes fcories, & je les ai traitées comme fi elles euffent contenu encore la platine que j'en avois retirée.

A la fuite de quelques réductions & après avoir caffé les creufets où elles avoient été faites pour en tirer les culots de cuivre, j'ai recueilli avec foin les fragmens de ces creufets auxquels des portions de fcories reftoient adhérentes, & je les ai mis dans une terrine de grès, en y verfant une quantité d'eau fuffifante : au bout de quelques jours ces fcories fe font ramollies, fe font détachées entièrement des fragmens de creufet & font tombées au fond de la terrine; j'ai fait filtrer enfuite à travers un papier gris, la totalité de l'eau chargée du dépôt des fcories qui s'y étoit formé, & lorfque le papier, ainfi que le dépôt qui étoit refté à fa furface, a eu perdu la plus grande partie de fon humidité, je l'ai fait calciner jufqu'au rouge dans un creufet; j'ai réduit en poudre impalpable dans un mortier ces fcories calcinées, j'y ai mêlé une quantité convenable de chaux de cuivre, & j'ai procédé de nouveau à la réduction de ces matières par le flux noir, en y portant la même attention que j'y euffe donnée pour retirer de ces matières une certaine quantité de platine que je n'euffe pas douté d'obtenir.

Après avoir fait diffoudre dans l'acide nitreux, avec les ménagemens qu'on a déjà vus, le culot de cuivre que je tirai de la première de ces réductions, dans lefquelles j'avois pour objet l'examen des fcories, je remarquai qu'il fe précipita au fond du matras une petite quantité de poudre noirâtre très-légère, laquelle même ne s'y précipita en total qu'après

le refroidiſſement & un aſſez long repos de l'acide nitreux, dans lequel j'avois achevé de faire diſſoudre le culot de cuivre que j'avois obtenu de cette première réduction : j'eus l'attention, en lavant cette poudre légère, de n'en perdre aucune parcelle ; je la fis tomber entièrement au fond d'un petit creuſet, en y plongeant l'extrémité du col du matras, tenu dans un ſens renverſé, & par-là donnant lieu à la chute de toute la poudre répandue dans l'eau que ce matras contenoit: ce ne fut que très-lentement & après un temps conſidérable que la totalité de cette poudre noirâtre ſe dépoſa au fond du creuſet; ce ne fut que peu-à-peu & en frappant légèrement les parois du creuſet, que je parvins à l'y raſſembler en une petite maſſe dont aucune partie ne pût reſter écartée après le recuit. Quand l'eau que le creuſet contenoit encore en eut été égoutée entièrement ou s'y fut imbibée, je plaçai le creuſet entre des charbons ardens, & je fis ſubir à cette poudre un recuit ordinaire.

Je crus trouver au fond du creuſet, après cette opération, une matière pulvérulente & facile à ſe détacher des parois intérieures du creuſet, comme j'y obſervois ordinairement la platine en poudre & en état métallique que je *recueillois*: mais celle-ci étoit adhérente au fond du creuſet; elle y formoit une tache noirâtre & qu'il ne me fut jamais poſſible d'enlever. Alors je ſentis qu'on ne pourroit obtenir ce peu de matière noirâtre dans un état pulvérulent, qu'en la raſſemblant dans une capſule de verre, en l'y faiſant ſécher à un feu doux, en la détachant peu-à-peu par le moyen d'une lame de couteau, & en la faiſant recuire enſuite dans un creuſet, après l'y avoir raſſemblée en un petit monceau : je ſuis parvenu en effet, par ce dernier moyen, à obtenir dans l'état pulvérulent & aſſez bien détaché du creuſet, le peu de matière noirâtre que les ſcories m'ont donné toutes les fois que je les ai traitées par le flux noir; mais je n'y ai rien aperçu de métallique, quoique j'aie examiné attentivement cette poudre à l'aide du microſcope; elle étoit même en ſi petite quantité & d'un poids ſi léger, qu'elle n'auroit fait qu'une portion très-foible

de la petite quantité de platine à laquelle cette poudre avoit appartenu, dans le cas où elle eût repris tous ses caractères métalliques.

Il résulte, comme on voit, de ces opérations réitérées sur les scories, que la portion de platine que j'ai retirée des réductions différentes dont j'ai parlé dans ce Mémoire, étoit toute celle qui avoit conservé ses propriétés métalliques; que les déchets que j'ai annoncés sur la platine dissoute par l'acide nitreux, paroissent aussi réels qu'ils sont extraordinaires dans une matière de la plus grande pesanteur spécifique; que la moitié ou environ de ce métal perd en se décomposant son caractère distinctif, se trouve réduite à des parcelles impalpables, d'une légèreté excessive, & si difficiles à rassembler, qu'à peine en peut-on recueillir une partie en prenant toutes les précautions possibles, pour qu'aucune de ces parcelles n'échappe à l'amas très-petit & toujours prêt à se désunir qu'on est venu à bout d'en former au fond d'un creuset.

Si, d'après ce fait bien constant, on considère qu'une quantité déterminée de platine dissoute à plusieurs reprises par l'acide nitreux, à la faveur de son mélange avec l'or & l'argent, ne cesse point d'éprouver des pertes considérables à mesure qu'on la retire en partie de l'opération du départ, & qu'on soumet la partie retirée du métal à une nouvelle dissolution; si l'on fait attention que les scories de la troisième ou quatrième réduction fournissent la matière noirâtre, très-légère & si difficile à se précipiter dont il vient d'être question, comme les scories de la première réduction l'avoient donnée, & qu'il n'y a de différence à cet égard que relativement aux quantités, alors on sentira que ce n'est point ici l'effet de l'épurement simple d'un métal, mais les suites d'une décomposition & d'une altération si réelle des principes qui constituent cette matière, qu'il n'en subsiste qu'une très-petite partie après quatre ou cinq opérations, & qu'on tireroit la poudre noirâtre des scories d'une dernière épreuve, comme on l'auroit obtenue de toutes les autres réductions qui l'auroient précédée.

Cette matière qui ne cesse point de se décomposer, ne seroit-elle proprement que du fer? alors il ne faudroit supposer que ce métal dans la platine, puisqu'elle éprouve des altérations notables chaque fois qu'elle est dissoute par l'acide nitreux: mais d'un autre côté sa grande pesanteur spécifique semble annoncer un alliage qui a toute une autre densité que le fer. Peut-être la pénétration a-t-elle lieu dans cet alliage singulier, comme je l'ai observée dans ceux qui sont composés d'étain pur & de cuivre rouge; elle concourroit, si elle avoit lieu effectivement, à l'explication de la densité surprenante d'un mélange où le fer paroît certainement dominer, & qui cependant, quant à cette même pesanteur spécifique, doit être mis à côté de l'or.

Mais il n'y a encore à cet égard que de simples conjectures à former. Les expériences dont je viens de rendre compte, la décomposition du métal qu'on y a remarquée, les déchets considérables & toujours renouvelés qui en ont été la suite, pourront donner lieu à des recherches plus profondes que celles que j'ai présentées, & nous procurer enfin des lumières décisives sur un point de physique aussi propre à piquer par lui-même la curiosité, qu'il demande des manipulations délicates, des attentions scrupuleuses, un travail obstiné.

Si je termine donc ce Mémoire par quelques observations sur la platine en elle-même, c'est moins pour en faire connoître la nature dans laquelle il paroît très-difficile de pénétrer, que pour écarter quelques idées qui pourroient se présenter à l'esprit dans l'examen de ce métal, soit relativement à son origine, soit à l'égard des principes qui le constituent ou des matières qui s'y trouvent jointes. Il paroît bien certain que le fer joue le principal rôle dans la platine, tant comme partie constitutive de ce métal, que comme l'accompagnant toujours dans les endroits d'où la platine est tirée. Non-seulement les grains de ce métal sont mêlés avec une grande quantité de sable ferrugineux & dans l'état pulverulent, mais j'ai remarqué souvent que de petits groupes de grains de platine étoient comme soudés ensemble par ce même sable ferrugineux, &

se

se maintenoient en cet état, à moins qu'on ne les frappât pour les désunir.

Il y a toute apparence que les grains de platine se trouvent ainsi groupés, & par masses beaucoup plus fortes que nous ne les voyons, dans les mines desquelles on les tire, & que leur liaison est dûe à ce même sable ferrugineux : aussi les grains de platine qu'on tire de ces groupes ne sont-ils pas aplatis comme presque tous les autres que nous recevons isolés, & annoncent-ils qu'ils ont échappé à la trituration que les Espagnols emploient pour en séparer l'or.

Quelques Observateurs ont soupçonné que la platine étoit un produit de l'art, une suite des opérations que font les Espagnols dans l'exploitation de leurs mines d'or, & que malgré leurs précautions il restoit dans les résidus de leurs travaux, de petites portions de ce métal précieux, que nous trouvons toujours mêlées dans la platine que nous recevons d'eux.

Mais il est plus naturel de présumer que la platine se trouve dans des mines telle, à peu-près, qu'on nous l'envoie; qu'elle est le produit d'un feu souterrain & d'un assemblage de matières différentes, parmi lesquelles le fer domine. En examinant avec attention des grains de platine brute, j'en ai remarqué qui étoient incrustés dans de petits graviers, & y étoient enchâssés avec autant de justesse que l'est un diamant dans son chaton; d'ailleurs tous les grains de platine qui, dans la trituration, n'ont éprouvé aucun choc, conservent une forme qui annonce la fusion; ils sont très-lisses dans toute leur surface; tous leurs bords sont arrondis, & plusieurs d'entr'eux ont la figure de petits rognons, où l'on n'aperçoit aucune aspérité : cet état constant de la platine, avant qu'elle ait été soumise aux opérations de l'art, donne tout lieu de croire qu'il est dû à un feu violent & capable de fondre ce métal avec la portion de fer qu'il contenoit, pendant qu'une autre portion de fer qui ne sera pas entrée dans le mélange, se trouvera réduite à l'état pulvérulent dans lequel nous voyons ce dernier métal.

S'il est certain que parmi les grains de platine on trouve

presque toujours de petites paillettes d'or, & qu'après avoir fait bouillir de l'acide marin sur de la platine brute, on remarque, avec le secours du microscope, qu'un grand nombre des grains de ce métal ont leur surface dorée; il est constant aussi que ces mêmes grains de platine ne recèlent aucune partie d'or intérieurement. Sachant que quelques Naturalistes pensent que des veines de ce métal précieux traversent la platine, & par-là contribuent à sa pesanteur, j'ai choisi, dans les grains de platine, les plus gros que j'ai pu y apercevoir, & qui n'avoient point été aplatis; je les ai divisés en deux parties, & j'ai exposé ensuite sous le microscope ces deux portions du métal du côté par lequel elles s'étoient séparées: la mie de ces grains de platine avoit la couleur naturelle de ce métal, mais je n'y ai remarqué aucunes traces d'or; elles m'auroient aussi bien frappé, s'il y en eût eu quelques-unes, que d'autres petits corps étrangers que j'y aperçus, tels que de très-petits graviers, de petites portions de quartz & une matière noirâtre qui ressembloit assez au sable ferrugineux: j'y ai remarqué aussi quelques soufflures qui, comme on sait, sont les indices assez ordinaires d'une fusion incomplète. Lorsqu'on examine avec attention les deux portions d'un grain de platine divisé, & qu'on les regarde par le côté où la rupture s'est faite, on s'aperçoit que le bord de la surface de ces portions de platine appartient à une espèce de croûte métallique très-mince, dont les grains de ce métal sont revêtus: elle est très-lisse & porte tous les caractères d'un métal qui a été fondu complètement : l'intérieur des grains de platine n'a pas la même netteté; les soufflures qu'on y voit & dans lesquelles une substance noirâtre dérobe l'éclat des parties métalliques, ces soufflures ou petites cavités donnent lieu de croire que quelqu'actif qu'ait été le feu qui a mis la platine en fusion, il n'a pas eu encore assez de violence pour bien fondre le métal, pour le rassembler en masse, & le dégager parfaitement de tout ce qui lui étoit étranger. On remarque en effet que dans la réduction des métaux, l'opération est incomplète, la matière n'est qu'en grenaille dispersée dans les

flux qu'on a employés, si la chaleur n'a pas été assez vive, si la totalité du mélange n'a pas été mis dans la plus grande fluidité : dès-lors on ne doit pas être surpris que la platine résiste à la chaleur de nos meilleurs fourneaux, puisque ceux de la Nature, dont les effets sont si prodigieux, ne paroissent pas encore assez actifs pour bien fondre la platine & réduire en masse ce métal. Quant à la pellicule d'or que le microscope fait apercevoir sur la surface des grains de platine qui ont été exposés à l'action de l'acide marin, il y a tout lieu de croire qu'elle est une suite de l'amalgame du mercure & de l'or, lorsque les Espagnols cherchent à retirer, par voie de trituration, les parcelles d'or que la platine contient ; une portion du mercure chargée du métal précieux, peut alors rester adhérente à la surface de plusieurs des grains de platine, se dissiper, à la faveur d'un recuit, en laissant sur ces grains l'or dont le mercure s'est dépouillé ; & cet or après avoir passé dans l'acide marin, jouira de l'éclat qui lui est naturel.

Cependant les parcelles de ce métal, qu'il est ordinaire de trouver parmi les grains de platine, contiennent encore quelque alliage qui en altère un peu la belle couleur : j'ai reconnu, par l'essai que j'ai fait de ces paillettes d'or, que leur alliage est à peu de chose près d'un sixième, & qu'on peut les regarder en général comme au titre de l'or employé pour les bijoux.

J'ai dit dans un endroit de ce Mémoire *, qu'après avoir obtenu un précipité de platine de la dissolution du cuivre, avec lequel ce métal étoit combiné, & lui avoir donné un recuit, on pourroit lui faire éprouver encore plus ou moins de déchet en le mettant dans l'acide marin, & en tenant pendant quelque temps cet acide en ébullition.

* Page 417.

Je dois avertir premièrement que l'acide marin pris dans l'état ordinaire, n'attaque que foiblement ces précipités de platine, après qu'ils ont été recuits, mais que son action est plus forte sur eux si on les y expose avant qu'ils aient été recuits.

Je ferai observer en second lieu, que l'acide marin déphlogistiqué par la distillation de cet acide sur la manganèse,

attaque vivement, à l'aide de la chaleur, les précipités de platine avant qu'ils aient été recuits; qu'il les attaque également, quoiqu'avec un peu plus de difficulté, lorsqu'on les a fait rougir dans un creuset, & qu'il parvient, en assez peu de temps, à les dissoudre les uns & les autres, ou au moins à les mettre dans un état d'atténuation si complète, que l'acide, en prenant une couleur jaunâtre & un peu foncée, devient transparent après un jour ou deux de repos, sans laisser de dépôt sensible au fond du flacon qui le contient.

Mais il n'en est pas ainsi de la platine ductile, bien nette & laminée; l'acide marin déphlogistiqué ne l'attaque presque point, quoiqu'on le tienne assez long-temps en ébullition; il n'enlève pas même à ce métal le brillant qu'il a acquis en passant entre les rouleaux du laminoir: je n'ai observé en effet qu'une perte très-peu sensible sur le poids des petites plaques de platine laminée, auxquelles j'ai fait subir l'action de l'acide marin déphlogistiqué; elle n'étoit que la mille quatre-vingtième partie du poids de ces petites plaques, & j'ai remarqué qu'elle étoit assez constamment la même.

On voit par ces dernières expériences, dont il convenoit que je fisse mention, que la platine ductile, quoique très-inférieure à l'or à plusieurs égards, a cependant l'avantage sur ce métal précieux de résister tout autrement que lui à l'acide marin déphlogistiqué, puisque cet acide ainsi préparé attaque l'or pur très-sensiblement, le corrode à sa surface, lui enlève par conséquent tout son brillant métallique, & peut lui faire perdre un douzième, & dans certaines circonstances jusqu'à un sixième ou à peu-près de son poids; tandis qu'une lame de platine conserve, comme je l'ai dit, son éclat métallique, & reste presque intacte au milieu de ce même acide déphlogistiqué en ébullition *.

* M. Darcet, dont les lumières & l'exactitude sont connues, ne s'est pas borné à constater par des expériences & d'après les procédés de M. Schéele, l'action bien réelle qu'a sur l'or fin l'acide marin déphlogistiqué; il a annoncé à ce sujet des combinaisons & des remarques qui répandront du jour sur ce point de Chimie intéressant, & prouveront en particulier que cet acide acquiert beaucoup d'énergie à la faveur de certaines de ces combinaisons.

L'érosion qu'éprouve l'or fin dans cette expérience, devient très-remarquable lorsqu'après avoir plié en deux une lame brillante de ce métal, on la fait passer de nouveau ainsi pliée entre les rouleaux d'un laminoir; lorsqu'on a l'attention de maintenir les deux parties de la lame tellement appliquées l'une sur l'autre qu'elles ne laissent point de jour entr'elles, & qu'on expose ensuite la lame, dans cet état, à toute l'action de l'acide marin déphlogistiqué.

Si après l'effet qu'aura produit l'acide sur cette lame d'or ainsi doublée, on la rétablit dans son premier état, en mettant à découvert les deux surfaces de la lame qui étoient appliquées l'une sur l'autre, & que l'acide n'avoit pas pu attaquer, alors on sera frappé de l'éclat que la même lame d'or aura conservé d'une part, tandis que de l'autre elle sera de la couleur d'un jaune-mat un peu terne, & y aura souffert une altération notable par une suite de l'attaque vive de l'acide à laquelle rien ne se sera opposé.

Nota. On a dû remarquer, dans l'exposé que je viens de faire de toutes mes expériences sur la dissolution de la platine par l'acide nitreux, que ce métal a éprouvé plus de déchets lorsque j'ai mêlé de l'alkali fixe avec cette dissolution, & que j'ai traité ensuite, par le flux noir, le dépôt salin qui en est résulté, que quand j'ai fait évaporer simplement la dissolution sans y mêler d'alkali fixe, & que j'ai traité également par le flux noir le résidu qu'elle m'a donné. Ne pourroit-on pas soupçonner, d'après cette observation, que l'alkali fixe qu'on mêle ainsi intimement avec la platine atténuée au dernier point, & si susceptible par elle-même d'altération, a quelqu'action sur elle, & l'a d'autant plus sûrement que ce sel, dans la circonstance dont il s'agit, se trouve combiné en quelque sorte avec elle dans la réduction opérée par le flux noir, & y exerce toute son action sur ce métal, s'il l'attaque réellement, à la faveur du degré de chaleur assez considérable qu'exige la réduction complète, tant de la platine que de la chaux de cuivre destinée à la recueillir !



MÉMOIRE
SUR L'INCLINAISON
DU TROISIÉME SATELLITE DE JUPITER.

Par M. DE LA LANDE.

Lû le 9 Mai 1779. Remis en 1782.

LORSQUE je donnai à l'Académie, en 1762, l'explication du mouvement direct observé dans les nœuds du 4.e Satellite, & dont on cherchoit la cause depuis long-temps, je remarquai que le nœud du 3.e Satellite devoit avoir un mouvement semblable, & qu'il en résultoit nécessairement dans l'inclinaison une variation que j'espérois discuter dans une autre occasion *(a)*: la quantité de cette variation n'étoit pas encore connue par les observations, & lorsque je publiai, en Octobre 1764, la première édition de mon ASTRONOMIE, on ne savoit autre chose sinon que depuis soixante-six ans, cette inclinaison avoit toujours augmenté; mais on ne voyoit point encore jusqu'où pourroit aller cette augmentation. Ce fut une des causes qui me fit proposer à l'Académie d'indiquer pour le sujet du Prix, *la Théorie des Satellites de Jupiter.*

M. Bailly, dans son excellent Ouvrage sur *les Satellites,* ayant cherché les masses des Satellites par les inégalités connues jusqu'alors, pensa que cette inclinaison pourroit bien augmenter jusqu'en 1797 *(b)*, mais en ajoutant qu'il seroit bien fâché qu'on regardât cela comme une prédiction.

M. de la Grange, qui dans le même temps remporta le Prix de l'Académie sur ce sujet, proposoit une hypothèse de cent quatre-vingt-quinze ans, mais en ajoutant aussi qu'il ne prétendoit que donner une idée de la manière dont on pourroit rendre raison de l'augmentation de l'inclinaison *(c)*.

M. Maraldi, qui a perfectionné & approfondi avec autant

(a) Mémoires de l'Académie, 1762, *page 233;* Mém. 1765, *p. 607.*

(b) Essai sur la Théorie des Satellites de Jupiter, 1766, *page 135.*

(c) Recherches sur les inégalités des Satellites, *page 161,* dans le Recueil des Pièces qui ont remporté les Prix, *Tome IX, 1777.*

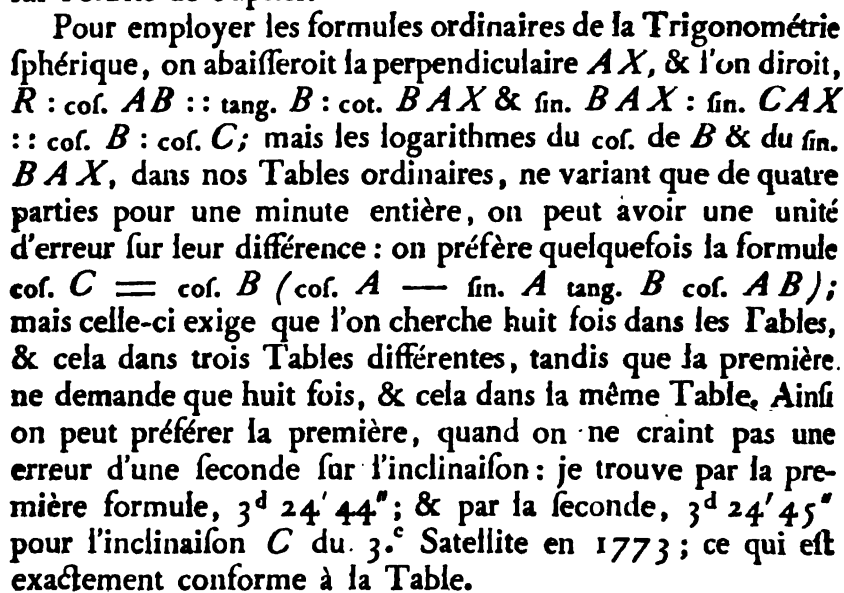
d'assiduité que de pénétration tous les points de la théorie des Satellites, ne tarda pas à s'apercevoir que depuis 1763, l'inclinaison du 3.e cessoit d'augmenter; & quoique les observations de 1769, dans les limites des plus grandes latitudes, eussent assez mal réussi, il vit que l'inclinaison étoit diminuée d'environ 2 minutes *(d)*.

On attendoit avec impatience les observations de la limite suivante, en 1775, pour voir si cette diminution continueroit d'avoir lieu, & si la période d'augmentation avoit réellement fini en 1763; j'ai examiné pour cet effet toutes les observations que j'ai pu rassembler, & je me suis assuré que cette augmentation avoit cessé peut-être même un peu plus tôt.

Lorsqu'en publiant la seconde édition de mon *Astronomie*, en 1771, je voulus y placer une collection de Tables nouvelles pour toutes les Planètes; je demandai à M.rs Wargentin & Maraldi ce qu'ils avoient de plus nouveau sur les Satellites de Jupiter: le premier m'envoya des Tables nouvelles où il employoit des équations empiriques de douze & de quatorze ans pour représenter les mouvemens du 3.e Satellite; je les adoptai, ne pouvant faire mieux: mais à l'égard de l'inclinaison du 3.e Satellite, je préférai l'hypothèse de M. Maraldi, & j'employai une Table où il suppose que l'orbite *BC* du 3.e Satellite se meut sur l'orbite *AB* du 1.er, le nœud *B* faisant tout le tour en cent trente-deux ans, l'angle *B* restant toujours de 12', l'inclinaison du premier étant de 3d 14' sur l'orbite *AC* de Jupiter, & le nœud à 10s 13d 52'. Ainsi la plus grande inclinaison du troisième a été en *A*, 3d 26' en 1763, & la plus plus petite a été en 1697 de 3d seulement dans le nœud opposé *D*; elle sera de même en 1829. Je suppose qu'on veuille chercher pour 1773 l'inclinaison & le nœud *C*; d'après la période de cent trente-deux ans, on a pour le mouvement annuel du nœud *B*, 2d 43' 38",2, ou 27d 16' 22" depuis 1763 jusqu'en 1773.

(d) Mémoires de l'Académie, 1769.

Si l'on ſuppoſe donc que AB, ſur l'orbite du 1.er Satellite, ſoit de $27^d\, 16'\, 22''$, l'angle A de $3^d\, 14'$, & l'angle B de $12'$; on réſoudra le triangle ABC pour trouver l'angle C, inclinaiſon actuelle du 3.e Satellite ſur l'orbite de Jupiter.



Pour employer les formules ordinaires de la Trigonométrie ſphérique, on abaiſſeroit la perpendiculaire AX, & l'on diroit, R : coſ. AB :: tang. B : cot. BAX & ſin. BAX : ſin. CAX :: coſ. B : coſ. C; mais les logarithmes du coſ. de B & du ſin. BAX, dans nos Tables ordinaires, ne variant que de quatre parties pour une minute entière, on peut avoir une unité d'erreur ſur leur différence : on préfère quelquefois la formule coſ. $C =$ coſ. B (coſ. A — ſin. A tang. B coſ. AB); mais celle-ci exige que l'on cherche huit fois dans les Tables, & cela dans trois Tables différentes, tandis que la première ne demande que huit fois, & cela dans la même Table. Ainſi on peut préférer la première, quand on ne craint pas une erreur d'une ſeconde ſur l'inclinaiſon : je trouve par la première formule, $3^d\, 24'\, 44''$; & par la ſeconde, $3^d\, 24'\, 45''$ pour l'inclinaiſon C du 3.e Satellite en 1773; ce qui eſt exactement conforme à la Table.

On peut auſſi ſe ſervir de la formule ſuivante, qui ſe déduit par les triangles ſupplémentaires de celle que j'ai démontrée dans mon *Aſtronomie, art. 3696,*

$$\text{coſ.}^2 \tfrac{1}{2} C = \text{ſin.}\, A\ \text{ſin.}\, B\ \text{coſ.}^2 \tfrac{1}{2} AB + \text{ſin.}^2 \tfrac{1}{2} (A - B).$$

Enfin on peut commencer par chercher le côté AC, qui eſt la libration du nœud & dont la tangente $= \dfrac{\text{tang.}\, AB\ \text{coſ.}\, BAX}{\text{coſ.}\, CAX}$; on dira enſuite, $\text{ſin.}\, C = \dfrac{\text{ſin.}\, AB\ \text{ſin.}\, B}{\text{ſin.}\, AC}$.

On trouve par ces deux méthodes, $3^d\, 24'\, 44'',4$ pour l'inclinaiſon en 1773. Si l'on a cherché l'inclinaiſon C par la première formule, on trouvera la libration AC du nœud, en

en disant, cos. BAX : cos. CAX : : cot. AB : cot. AC, ce qui donnera AC de $1^d\ 32'\ 24''$. Cela s'accorde avec la Table, puisqu'elle marque pour 1773, $10^f\ 12^d\ 20'$, & que le lieu moyen du nœud est à $10^f\ 13^d\ 52'$, lieu du nœud du 1.er Satellite; la différence est en effet $1^d\ 32'$.

Il y a grande apparence que l'action du 2.e Satellite influe beaucoup sur l'inclinaison du 3.e comme je l'ai dit dans mon Mémoire sur ce sujet *(e)*; mais rapportant son effet à l'orbite du 1.er pour l'ajouter avec l'effet que celui-ci produit, on ne s'écarte pas beaucoup des observations, & l'on simplifie beaucoup l'hypothèse & le calcul.

C'est donc cette hypothèse employée dans les Tables, que j'ai comparée avec les durées observées depuis quelques années *(f)*, pour en tirer la confirmation ou la correction de ces mêmes Tables, & j'ai été surpris de leur exactitude.

1773.	8 Août........	$12^d\ 1'\ 17^f$ 14. 41. 6	M. Maraldi, *à Perinaldo.*	I.
	2 Novembre....	11. 49. 3 14. 11. 22	M. Tofino, *à Cadiz.*	II.
	8 Décembre.....	7. 52. 58 10. 9. 59	*à Cadiz.*	III.
1774.	18 Juillet.......	13. 24. 30 14. 59. 40	M. Messier.	IV.
	30 Août........	12. 58. 8 14. 33. 54	*à Cadiz.*	V.
	23 Décembre.....	5. 48. 38 7. 18. 26	M. Messier.	VI.
		6. 14. 26 7. 47. 20	M. Lagrange, *à Milan.*	
1775.	9 Août........	14. 11. 1 16. 9. 17	M. Messier.	VII.

(e) Mémoires de l'Académie, 1765, *page 607.*

(f) Mémoires de l'Académie, 1774, *page 11*; Éphémérides de Vienne, 1778, *page 45*; Éphémérides de Milan, 1776, 1777 & 1778.

1775. 21 Septembre.....	14^d 18′ 8″	16. 22. 45	M. Messier.	VIII.
1776. 26 Février.......	6. 13. 10d	8. 49. 10	M. Reggio, *à Milan.*	IX.
24 Novembre....	14. 10. 20	17. 28. 47	*À Milan, Éphémér. 1778.*	X.
1777. 26 Mars.........	9. 57. 35	13. 24. 40	le P. Fixllmilner, *à Cremsmunster.*	XI.

Voici maintenant la comparaison de ces onze observations, avec la durée de chaque Éclipse tirée des Tables dont je viens de parler : j'y ai ajouté l'erreur des Tables sur le milieu de l'Éclipse.

La onzième observation étant fort près du nœud, ne peut servir qu'à faire voir que le diamètre de l'ombre est fort bien dans les Tables, 1^h 47′ 0″, mais que l'erreur des Tables sur les conjonctions alloit en croissant en 1777.

OBSERV.	DIST. au Nœud.	DEMI-DURÉE observée.	DEMI-DURÉE par les Tables.	CORRECTION des Tables pour la demi-durée.	CORRECTION pour le milieu.
I.	47^d	1^h 19′ 55″	1^h 19′ 29″	+ 0′ 26″	+ 1′ 33″
II.	55	1. 11. 9	1. 11. 0	+ 0. 9	+ 1. 34
III.	58	1. 8. 30	1. 7. 20	+ 1. 10	+ 0. 55
IV.	79	0. 47. 35	0. 47. 39	− 0. 4	− 1. 9
V.	83	0. 47. 53	0. 45. 29	+ 2. 24	− 0. 5
VI.	87	0. 44. 54	0. 44. 19	+ 0. 35	− 1. 8
VII.	66	0. 59. 8	0. 59. 10	− 0. 2	− 0. 29
VIII	62	1. 2. 18	1. 3. 18	− 1. 0	− 1. 6
IX.	50	1. 18. 0	1. 18. 2	− 0. 2	− 1. 56
X.	27	1. 39. 13	1. 38. 18	+ 0. 55	− 2. 35
XI.	14	1. 43. 32	1. 43. 45	− 0. 13	− 3. 15

Les troisième & huitième observations, qui sont pesque

à même diſtance du nœud, donnent deux erreurs preſque égales & en ſens contraire; ce qui ſuppoſe une augmentation à faire dans le lieu du nœud d'environ 1 degré, ou une diminution de 10 à faire au nombre *A* de la Table, avant que de chercher la demi-durée. Cela s'accorde avec ce que M. Wargentin avoit mis dans ſes Tables, lorſqu'il me les envoya en 1770, en m'avertiſſant que ſa Table étoit purement empirique ou faite d'après les obſervations, ſans avoir adopté aucune hypothèſe; cependant les obſervations I & II, comparées avec l'obſervation IX, ne donnant preſque aucune correction pour le nœud, il paroît qu'on peut encore s'en tenir à la Table, même pour le nœud *(g)*.

Les obſervations IV & VI, qui ſont les plus voiſines du nœud, donnent des erreurs fort petites & en ſens contraire; en ſorte qu'il n'y a rien à changer à cet égard dans l'inclinaiſon que donne la Table, ſi ce n'eſt peut-être 20 ſecondes à ôter de l'inclinaiſon, ce qui mettroit à 1762, au lieu de 1763, le terme de la plus grande inclinaiſon.

La cinquième obſervation a une erreur de 2′ 24″; mais M.rs Toſino & Varela nous avertiſſent, dans le Recueil imprimé en 1776, *page 113,* que le temps n'étoit pas clair, *la atmosfera denſa, y el planeta mal terminado :* dès-lors on a dû voir le Satellite plus long-temps éclipſé que dans les obſervations où il fait beau temps, & d'après leſquelles on a conſtruit la Table.

Cette différence eſt ſur-tout ſenſible pour le 3.e Satellite, quand il entre dans l'ombre fort obliquement; on en peut juger par l'obſervation du 23 Décembre 1774, que j'ai rapportée ci-deſſus d'après M. Meſſier, & d'après le P. Lagrange, alors Directeur de l'Obſervatoire de Milan; le milieu du paſſage eſt le même, à 3 ſecondes près, par les deux obſervations; ce qui prouve qu'elles ont été fort bien faites l'une & l'autre; mais il y a 3′ 6″ de moins pour la durée par

(g) Dans le Recueil des Tables de l'Académie de Berlin, on a mis cette Table; mais à 1765 on lit 10ſ 13d 35′, au lieu de 10ſ 14d 11′ : c'eſt une faute d'impreſſion.

M. Messier, parce qu'il est plus jeune, & que sa lunette achromatique est supérieure à un télescope de 2 pieds dont le P. Lagrange se servoit.

La septième observation ne s'accorde pas tout-à-fait avec la huitième, faite quarante-trois jours après, au bout de trois révolutions; mais il faisoit grand jour pour l'émersion : ainsi M. Messier a dû voir le Satellite un peu plus tard, & trouver une durée trop longue, relativement à la huitième observation.

J'ai supposé dans ce Mémoire, les inclinaisons calculées dans l'hypothèse de l'ombre circulaire, quoique j'en aie fait voir le défaut *(h)*; mais M. Maraldi n'ayant point encore adopté cette correction, j'ai voulu parler le même langage que lui.

Je n'ai pas cherché à mettre dans les calculs des demi-durées, une précision plus grande que celle de la Table que j'examine, où les parties proportionnelles peuvent occasionner quelques secondes d'erreur; mais il sera assez temps de faire ces calculs à la rigueur, d'après l'hypothèse que j'ai indiquée, si dans la prochaine limite on trouve le même accord entre les observations & l'hypothèse. D'ailleurs on ne pourra constater ces différences de quelques secondes que quand les observations seront perfectionnées par l'usage des diaphragmes, expliqué dans l'excellent Mémoire de M. Bailly *(i)*: ce n'est que par cette méthode que l'on pourra tenir compte des diamètres des Satellites, & des inégalités dans leur lumière, dans les lunettes & dans les yeux des Observateurs. Jusqu'ici nous supposons que les observations qui ont servi à construire les Tables, & celles qui servent à les vérifier, étant faites avec des lunettes de 18 pieds ou des lunettes achromatiques de 3 pieds $\frac{1}{2}$, ne diffèrent pas sensiblement entr'elles. Si celles-ci sont un peu meilleures, comme on le croit, il en résultera des différences; mais quant à présent il ne paroît pas y avoir de changement à faire dans la Table qui suppose la plus grande

(h) Mémoires de l'Académie, 1763, *page 413*.

(i) Mémoires de l'Académie, 1771.

inclinaiſon du 3.e Satellite $3^{d}\ 26'$ en 1763, la période de cent trente-deux ans, & le mouvement de l'orbite du 3.e Satellite ſur le premier, avec une inclinaiſon de $3^{d}\ 14'$ pour celui-ci ſur l'orbite de Jupiter, & de 12 minutes ſur l'orbite du ſecond.

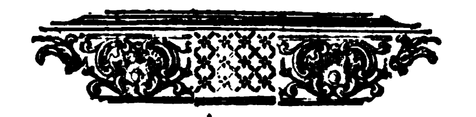
Je finirai ce Mémoire en rapportant quelques obſervations du 3.e Satellite, faites par M. Méchain, comparées avec les Tables pour faire voir le progrès des erreurs. Le ſigne — indique ce qu'il faut ôter du calcul pour l'accorder avec l'obſervation.

1778.	10 Avril..	$7^{d}\ 38'\ 12''$	ſoir.	É.	— $4'\ 52''$.	
	17 Avril..	11. 40. 10	ſoir.	É.	— 4. 28.	
	30 Mai...	8. 9. 32	ſoir.	I.	— 4. 31;	un peu *dout.* à cauſe du grand jour
	30 Mai...	11. 36. 42	ſoir.	É.	— 2. 20;	il paroît foiblem.t
	26 Nov...	2. 55. 50	mat.	É.	— 0. 33.	
1779.	8 Janv...	2. 18. 48	mat.	É.	— 0. 26.	
	19 Février.	10. 57. 9	ſoir.	I.	— 1. 51.	
	27 Mars...	9. 50. 26	ſoir.	É.	— 2. 5,	
	21 Juin...	9. 31. 25	ſoir.	É.	— 3. 32.	
1780.	17 Avril ..	7. 42. 47	ſoir.	É.	— 0. 7;	il y avoit des fumées.
1781.	26 Février.	2. 2. 57	mat.	É.	— 0. 58.	
	6 Mars...	4. 27. 37	mat.	I.	— 1. 4.	
	11 Avril..	0. 25. 41	mat.	I.	— 1. 16.	
	16 Mai...	10. 2. 35	ſoir.	É.	— 0. 15;	il paroiſſoit déjà,
	28 Juin..	9. 51. 1	ſoir.	É.	— 2. 5.	

On peut juger par-là que les équations empiriques, employées par M. Wargentin dans ſes Tables, avec des périodes de douze ans & demi & de quatorze ans, ne ſatisfont pas parfaitement aux obſervations; il penſe en effet qu'il vaudroit autant n'employer qu'une ſeule équation, que l'on changeroit de valeur en différens temps. *Voyez* le *Tome IV* de mon *Aſtronomie, page 690 ; Éphémérides de Berlin, 1781.* Mais cette forme, encore plus empirique ou plus aveugle, ſeroit peu propre à ſatisfaire les Aſtronomes : il faudroit donc employer la théorie ou les obſervations pour démêler mieux

l'influence des trois autres Satellites ſur le troiſième dont nous venons de parler. C'eſt pour cela que j'avois engagé l'Académie de Harlem à propoſer ce ſujet de Prix; mais il n'en a point encore réſulté de théorie ſatisfaiſante.

Ces équations, dont les périodes ſembloient être de douze & de quatorze ans, pourroient venir l'une de l'excentricité, l'autre du mouvement de l'apſide du 3.e Satellite: en effet, quand on établit une première équation provenante de l'excentricité, & dont la période eſt à peu-près égale à celle de Jupiter même, on ſuppoſe cette période toujours uniforme, & les retours de la plus grande équation toujours les mêmes; mais ſi l'apſide change, le retour de la plus grande équation ne tombe plus au même point du ciel; & quand on l'y ſuppoſe fixe, on trouve une différence: cette différence ne croît pas uniformément, parce que l'équation n'eſt pas proportionnelle à la diſtance comptée d'un certain point; on peut alors la repréſenter par une nouvelle équation dont la période ſoit égale à la révolution de l'apſide, ou peut-être à un multiple ou un ſous-multiple de cette révolution. C'eſt ce que je me propoſe de diſcuter quand j'aurai raſſemblé un aſſez grand nombre de bonnes obſervations; en ſuppoſant que Mrs Wargentin, Maraldi, de Lagrange & Bailly, à qui nous devons beaucoup de lumières ſur cette théorie, ne s'en ſeront pas occupés avant moi, & avec plus de ſuccès que je ne pourrois en eſpérer dans mes propres recherches.



MÉMOIRE
SUR LA THÉORIE DE VÉNUS,
OU SUR LES ÉLÉMENS
DE L'ORBITE DE CETTE PLANÉTE,
Déterminés au moyen de nouvelles Obſervations.

Par M. DE LA LANDE.

DEPUIS que j'ai publié de nouvelles Tables de Vénus, en 1770, dans la ſeconde édition de mon *Aſtronomie*, j'ai fait beaucoup d'obſervations propres à les corriger, & on les trouvera dans le IV.e Volume de mon *Aſtronomie*, imprimé en 1781. Mais les conjonctions inférieures de Vénus, étant les circonſtances les plus favorables à ces ſortes de recherches, j'ai commencé par examiner le réſultat de celles qui ſe ſont préſentées depuis quelques années, ſur-tout après avoir vu avec étonnement une erreur de 6 minutes dans les conjonctions des 24 Octobre 1775 & 6 Janvier 1779, obſervées à Paris & à Toulouſe avec ſoin. M. Slop, habile Aſtronome de Piſe, dans ſon troiſième Recueil d'obſervations, publié en 1778, rapporte trois conjonctions inférieures, obſervées avec préciſion, déduites chacune de pluſieurs jours d'obſervations, calculées & réduites au Soleil; & celle que j'avois obſervée en 1776 en étoit une: j'ai voulu ſavoir d'abord ce qui en réſultoit pour la correction de mes Tables, j'y ai employé la méthode extrêmement ſimple, que j'ai publiée dans les Mémoires de l'Académie, pour 1776, à l'occaſion de Mars; & j'ai reconnu que cette erreur extraordinaire provenoit de 2′ ſeulement ſur la longitude vue du Soleil, dont une minute étoit l'erreur de l'équation, & une minute l'erreur de la longitude moyenne; elles conſpiroient toutes les deux en 1776, & ſe multiplioient par la proximité de Vénus à la Terre.

Lû en Novemb. 1779. Remis en 1782.

Temps moyen de la Conjonction à Paris.	*Longit. hélioc. obs. réduite à l'orb.*	*Erreur de mes Tables.*	*Anomalies par mes Tables.*	*Longitudes moyennes,*
1774. 22 Mars 21h 17′ 28″	6f 2d 47′ 19″	+ 1. 1	7f 22d 53′ 52″	6f 2d 7′ 25″
1775. 24 Oct. 2. 34. 1	0. 0. 58. 6	+ 2. 6	2. 22. 26. 29	1. 1. 44. 1.
1777. 1 Juin 2. 32. 53	8. 11. 16. 52	— 0. 34	10. 1. 14. 40	8. 10. 36. 11½.

Première Hypothèſe. L'équation de Vénus étant ſuppoſée de 48′ 30″. Avec le lieu de l'aphélie, tel qu'il eſt dans mes Tables, c'eſt-à-dire avec les anomalies moyennes qui ſont rapportées ci-deſſus, je cherche dans ces mêmes Tables, où la plus grande équation eſt de 48′ 30″, l'équation pour chacune des deux premières obſervations, & je trouve la différence entre le mouvement moyen & le mouvement vrai ou la ſomme des équations 1d 26′ 54″, trop forte de 1′ 5″, c'eſt-à-dire le mouvement vrai trop foible de 1′ 5″. J'augmente le lieu de l'aphélie ou je diminue les anomalies juſqu'à ce que la ſomme des équations ſoit diminuée de 1′ 5″, & je trouve qu'il faut pour cela augmenter la longitude de l'aphélie de 1d 40′; alors j'ai une première hypothèſe qui ſatisfait à l'intervalle des deux premières obſervations, ſoit en temps, ſoit en degrés, c'eſt-à-dire à la différence des longitudes moyennes & à celle des longitudes vraies.

Seconde Hypothèſe. L'équation de Vénus étant ſuppoſée de 48′ 0″, comme dans les Tables de Halley. Avec l'aphélie de mes Tables, je trouve la ſomme des équations trop forte de 11″; j'augmente le lieu de l'aphélie de quelques minutes, & je vois qu'en l'augmentant de 17′, on a la ſomme des équations telle qu'elle eſt par l'obſervation, 1d 25′ 49″: ainſi dans cette ſeconde hypothèſe, il y a 1d 23′ de moins que dans la première pour le lieu de l'aphélie, & 30″ de moins pour la plus grande équation du centre.

Dans chacune de ces deux hypothèſes, je calcule la ſeconde & la troiſième obſervation, où la ſomme des équations doit être 86′ 36″: je la trouve dans la première hypothèſe 89′ 48″, & dans la ſeconde 88′ 27″, moindre de 1′ 21″ que dans la première hypothèſe, mais trop grande encore de 1′ 51″.

En

En conséquence je fais ces deux propositions,

1′ 21″ : 0′ 30″ :: 1′ 51″ : 0′ 41″,
1. 21 : 1ᵈ 23′ :: 1. 51 : 1ᵈ 54′.

Ainsi il faut diminuer encore de 41″ l'équation de M. Halley ou de la seconde hypothèse, & diminuer l'aphélie de 1ᵈ 54′, ou ôter 1ᵈ 37′ de celui de mes Tables, pour accorder le second intervalle aussi-bien que le premier.

Je calcule donc les trois observations dans cette nouvelle hypothèse, en employant les deux Tables d'équations; & faisant une partie proportionnelle pour les 41″, dont la plus grande équation de Halley doit être diminuée, & je trouve trois longitudes vraies qui sont plus petites d'environ 1′ 8″ que les longitudes observées; ce qui m'apprend qu'il faut ajouter 1′ 8″ à mes époques ou à la longitude moyenne de Vénus tirée de mes Tables.

On verra dans la Table suivante la comparaison de ces nouveaux résultats avec mes Tables & celles de Halley & de Cassini.

	Suivant Halley.	*Suivant Cassini.*	*Par mes Tables.*	*Nouveau Résultat.*
Époque pour 1780....	10ˢ 22ᵈ 53′ 0″	10ˢ 22ᵈ 52′ 44″	10ˢ 22ᵈ 52′ 47″	10ˢ 22ᵈ 53′ 55″.
Aphélie pour 1780....	10. 7. 46. 46	10. 8. 21. 0	10. 9. 28. 0	10. 7. 51. 0.
Équation de l'orbite...	48. 0	49. 6	48. 30	47. 19.

Je m'en étois tenu, dans mon *Astronomie (article 1270)*, à faire l'équation de 48′ 30″, n'ayant pas alors d'observations récentes qui fussent bien propres à cette recherche; celles que je viens de rapporter indiquoient qu'il falloit la diminuer au moins d'une minute. Supposant l'équation de 47′ 20″, on a excentricité 0,0068845, ou 4980 en supposant la distance du Soleil de 1000000.

Voilà pourquoi dans la conjonction du 24 Octobre 1775, observée à Paris, à Toulouse, à Pise, je trouve l'erreur de mes Tables d'environ 6′ en moins : cela me parut extraordinaire, parce que sur plusieurs années d'observations, je n'avois jamais vu 2 minutes d'erreur; mais ces 6 minutes étoient une suite de l'erreur sur la longitude héliocentrique

+ 2′ 6″ que l'on a vu ci-dessus, dont une minute pour l'époque & une pour l'équation. Depuis ce temps-là, M. Dagelet a observé la conjonction du mois de Janvier 1779, & il a aussi trouvé l'erreur des Tables — 6′ vers cinq signes d'anomalie; ce qui dépend de la même cause, du moins en partie.

Cette augmentation d'une minute sur l'époque des longitudes, est confirmée par la conjonction supérieure de Vénus, observée à la fin de Juillet 1776 vers le périhélie, où il y avoit une demi-minute de plus que par mes Tables; ce qui fait une minute à ajouter au lieu vu du Soleil.

Quant à la diminution d'une minute que je viens de trouver sur l'équation de Vénus, elle m'est aussi indiquée par les plus grandes digressions de Vénus que j'ai observées au mois de Décembre 1775 & au mois de Mars 1777, dans lesquelles j'ai trouvé qu'il falloit éloigner *Vénus* du Soleil d'environ trois quarts de minute aux environs du périhélie; ce qui doit diminuer l'excentricité, en supposant que la distance moyenne soit exacte. Il faudroit une digression observée vers l'aphélie, comme celle qui est arrivée au mois de Juin 1774, pour établir la conséquence que *je tire* de la digression périhélie; mais il n'y a qu'une seule observation de M. Slop, & elle est à 25 degrés de l'aphélie: on n'en aura qu'au mois de Juin 1782. Au reste, les digressions périhélies s'accordent avec les résultats précédens. A l'égard de l'aphélie, le résultat ci-dessus ne sauroit avoir le même degré de certitude, parce que des trois conjonctions que je viens de calculer, il n'y en a aucune qui soit assez près des apsides; mais on verra bien-tôt que la diminution de l'aphélie est confirmée par d'autres observations.

Mais après avoir déterminé la plus grande équation de Vénus de 47′ 19″ par des conjonctions inférieures, qui sont les observations les plus décisives pour la théorie de cette Planète, j'ai voulu voir si les observations plus anciennes me donneroient à peu-près le même résultat : j'en ai trouvé plusieurs dans les Élémens d'Astronomie de M. Cassini

(page 561); j'en ai choiſi trois, dont une vers le périhélie & deux vers les moyennes diſtances; j'ai calculé le lieu du Soleil par les Tables de la Caille, & j'ai réduit les obſervations en temps moyen.

Temps moyen de la Conjonction.	*Longitude héliocentrique.*	*Anomalie moyenne.*	*Long. de l'Aphélie.*	*Longitude calculée.*
1715. 26 Janv. 8h 32′	4ſ 6d 22′ 47″	5ſ 29d 39′ 40″	10ſ 6d 45′ 41″	4ſ 6′ 22′ 10″
1718. 8 Avr.. 10. 15	6. 18. 40. 42	8. 10. 58. 30	10. 6. 53. 40	6. 18. 40. 57
1719. 10 Nov.. 9. 1	1. 17. 55. 31	3. 11. 41. 11	10. 6. 57. 39	1. 17. 53. 39

Suivant la méthode que j'ai expliquée ci-deſſus, je trouve qu'avec l'équation de mes Tables 48′ 30″, il faut diminuer l'aphélie de 1d 28′ pour que la différence des longitudes vraies, calculées pour la première & la ſeconde obſervation, ſoit égale au mouvement obſervé.

Avec l'équation de M. Halley 48′ 0″, il faut diminuer de 40′ la longitude de l'aphélie pour repréſenter le premier intervalle.

Je calcule dans ces deux hypothèſes le mouvement de Vénus entre la ſeconde & la troiſième obſervation, je trouve dans l'une que le mouvement eſt plus petit de 5″ que par mes Tables, & dans l'autre plus grand de 54″; d'où je conclus par une double proportion, que pour l'augmenter de 2′ 7″ & le rendre égal au mouvement obſervé, il faut augmenter l'aphélie de 15′, & ſuppoſer l'équation de 47′ 27″. J'avois trouvé 47′ 19″ par les obſervations de 1774, 1775 & 1777; cet accord eſt plus grand que je ne l'avois eſpéré.

Calculant les trois longitudes par ces élémens, je les trouve trop petites de 51″; c'eſt ce qu'il faut ajouter aux époques de mes Tables; & comme j'avois trouvé 1′ 18″ vers 1775, il s'enſuit que le mouvement de Vénus a été plus grand de 17″ en cinquante-ſept ans, ou de 30″ par ſiècle que ſuivant mes Tables.

Les conjonctions inférieures de 1689 & 1692, m'ont donné pour équation 46′ 58″. M. Kraft, qui cherchoit les élémens de Vénus par les conjonctions de 1715, 1716 &

1718, trouvoit l'aphélie à 10^s 6^d 44', comme par mes Tables, & l'équation de 49' 6" *(Mémoires de Péterſbourg, tome XVI, page 666);* mais j'ai ſuffiſamment prouvé qu'elle doit être plus petite.

L'équation de Vénus étant aſſez bien déterminée par ces trois calculs de huit conjonctions inférieures à des époques très-différentes, voyons s'il eſt poſſible de déterminer auſſi-bien le lieu de l'aphélie, du moins pour le temps où nous ſommes.

Je me ſuis d'abord ſervi des plus grandes digreſſions obſervées par M. Dagelet & moi, en 1775, 1777 & 1778. Voici une obſervation de chacune, avec l'erreur des Tables déduite des obſervations de pluſieurs jours, aux environs de la plus grande digreſſion. On trouvera les autres dans le IVe volume de mon *Aſtronomie.*

	Temps moyen.	*Longitude obſervée.*	*Err. des Tables.*
1775. 20 Juillet..	3^h 0' 42"	5^s 11^d 38' 59"	+ 10".
1777. 6 Août..	20. 47. 22	2. 29. 23. 44	+ 30.
1778. 7 Nov...	3. 0. 48	9. 1. 51. 0	− 70.

J'ai trouvé que pour faire diſparoître ces erreurs, il falloit ôter de l'aphélie 1^d 20' pour la première, 1^d 2' pour la ſeconde, & 2^d 17' pour la troiſième. J'avois trouvé 1^d 37' pour les trois conjonctions calculées ci-deſſus : il paroît donc par-là qu'il faudroit ôter 1^d 20' de l'aphélie de Vénus, établi dans mes Tables; mais les conjonctions inférieures valent mieux pour déterminer un élément auſſi délicat : un degré d'erreur ſur l'aphélie ne produit que 20" plus ou moins ſur la plus grande élongation, au lieu qu'il fait 2' $\frac{1}{2}$ ſur la longitude géocentrique obſervée dans la conjonction inférieure près du périhélie.

Dans l'eſpace de huit ans que Vénus met à revenir dans la même ſituation, il arrive toujours cinq conjonctions inférieures, comme on le voit dans la Table ſuivante; la première vers l'aphélie, les trois ſuivantes vers les moyennes diſtances, & la dernière vers le périhélie.

	CONJONCTIONS.	ANOMALIE.	LATITUDE.
1	10 Août. . 1772	0^s 8^d	8^d *Austr.*
2	22 Mars... 1774	7. 22	8 *Bor.*
3	24 Octob.. 1775	2. 23	5 *Austr.*
4	1 Juin... 1777	10. 1	0
5	6 Janvier. 1779	5. 7	6 *Bor.*
	9 Août. . 1780		

De ces cinq conjonctions, il y en a quatre où la latitude est assez grande pour qu'on puisse voir Vénus le jour même de sa conjonction avec de bons instrumens: dans les autres, on la peut voir deux jours avant & après.

Aussi M. Dagelet, qui sait distinguer les observations importantes, & qui a l'avantage d'un excellent mural pour les bien faire, a très-bien observé les deux conjonctions de 1779 & 1780, qui n'auront plus lieu d'ici à huit ans; je les ai trouvées aussi dans le Recueil que M. Darquier a présenté à l'Académie en 1781. L'erreur de mes Tables étoit + 6′ dans la première, & — 1′ dans celle de 1780, parce que cette fois l'erreur de l'époque détruisoit en partie celle qui venoit de l'aphélie. Voici deux des observations de M. Dagelet, choisies parmi un grand nombre, aux environs de chaque conjonction, mais qui ne sont pas la conjonction même.

	Temps moyen à Paris.	*Longitude de Vénus.*	*Latit. géocentrique.*
1779. 10 Janv..	23^h 35′ 33″	9^s 14^d 5′ 57″	5^d 44′ 8″B.
1780. 7 Août...	0. 13. 45	4. 19. 56. 42	7. 19. 36 A.

J'ai calculé les longitudes géocentriques par mes Tables corrigées par les autres élémens que j'avois déterminés, j'ai trouvé qu'il falloit ôter 1^d 0′ de l'aphélie pour la première observation, & 57′ seulement pour la seconde. La différence ne suppose que 2″ de mouvement vu du Soleil, & chaque minute de l'aphélie change de 2″ la longitude géocentrique;

ainsi le lieu de l'aphélie en 1780, sera $10^s 8^d 30'$. M. Halley a $43'$ de moins, & M. Cassini $9'$ de moins ou $10^s 8^d 21'$.

A l'égard du mouvement de l'aphélie, je le réduirai à $2^d 15'$ par siècle ou $1' 27''$ par an, en considérant que les Tables de Cassini & de Halley, faites sur des observations de la fin du dernier siècle, s'accordoient pour 1700, à $6'$ près, sur le lieu de l'aphélie, & que les observations que j'ai calculées moi-même ci-dessus ne s'écartent pas de ce résultat.

J'ajouterai que les conjonctions des 28 Janvier 1707 & 31 Août 1708, en rectifiant le lieu du Soleil, donnent pour 1708, $10^s 6^d 33'$; cela ne diffère que de $13'$ du lieu que donnent les élémens que je viens de citer, & les $13'$ ne font que $8''$ sur le mouvement vu du Soleil, quantité insensible dans ces observations.

	Longitude héliocentrique.	Mouvement.
1707. 28 Janv... $18^h 34'$	$4^s 8^d 46' 17''$	$6^s 29^d 14' 45''$.
1708. 31 Août., 0. 30	11. 8. 1. 2	

Ces deux observations s'accordent avec mes Tables, en corrigeant seulement l'équation & en ajoutant $5'$ à l'aphélie, ce qui augmente de $7''$ le mouvement calculé; ainsi on ne peut pas s'écarter beaucoup en ajoutant $13'$ au lieu de l'aphélie & le supposant en 1708, $10^s 6^d 33'$.

Mais les trois autres conjonctions calculées *(page 451)*, donnoient une augmentation de $51''$ à faire aux époques, & une augmentation de $30''$ sur le mouvement séculaire, tandis que celles-ci donnent $1' 37''$ ou une diminution de $43''$, & celles de 1689 & 1692 une diminution de $50''$. Pour satisfaire le mieux qu'il est possible à toutes les sept, en préférant celle de 1689, & sur-tout celle de 1692 qui fut observée avec soin *(Mém. de 1692)*, je me contente d'ôter $42''$ du mouvement séculaire de mes Tables, & je me retrouve entre Cassini & Halley. Voici ce mouvement suivant différens Auteurs & suivant moi; les différences sont peu sensibles, vu le peu d'ancienneté des bonnes observations.

Mouvement séculaire.	
6s 19d 11′ 52″	Halley.
6. 19. 11. 2	Cassini.
6. 19. 12. 22	Hornsby.
6. 19. 12. 12	mes Tables de 1770.
6. 19. 11. 30	nouveau résultat.

Il n'y a que les conjonctions inférieures qui puissent nous donner avec exactitude les vrais mouvemens de Vénus; il n'y en a qu'une dans le dernier siècle qui soit près du périhélie, & elle ne s'accorde point avec les autres; ainsi je ne puis faire mieux, quant à présent, pour la détermination du mouvement des apsides de Vénus.

Avec ces élémens, on ne trouve que quelques secondes d'erreur dans la plupart des observations faites depuis quelques années, ce qui doit venir sur-tout des perturbations *(Mém. 1760, p. 329)* que j'ai négligées, ainsi que l'aberration qui n'est que de 3″ dans les conjonctions inférieures. On ne pourra parvenir à un plus grand degré de précision que quand on aura un plus grand nombre de conjonctions inférieures avec plusieurs observations dans chacune. On trouvera ci-après la Table des équations de Vénus & de ses distances au Soleil, d'après l'excentricité déterminée dans ce Mémoire.

Au reste, les élémens que je viens d'établir, suffisent pour que l'erreur des Tables de Vénus n'aille jamais à une minute, & qu'on puisse s'en servir pour trouver, en cas de besoin, les longitudes en mer, en comparant la Lune avec Vénus. C'est une des raisons qui m'ont fait donner à la théorie de cette Planète une attention spéciale.

Le résultat des recherches contenues dans ce Mémoire est renfermé dans les deux Tables suivantes; on y trouvera les époques des moyens mouvemens, soit de Vénus, soit de son aphélie, pour les dix-huit années qui vont suivre; ensuite la nouvelle Table des équations & des distances au Soleil.

Les autres Tables de Vénus, favoir les époques du nœud, la Table des Latitudes & celle des moyens mouvemens pour les jours du mois, n'exigeant aucun changement, j'ai cru que je pouvois renvoyer à celles qui font dans la feconde édition de mon *Aftronomie*, publiée en 1771 en trois Volumes *in-4.°* & dont le quatrième a paru en 1781.

C'eft ici la première fois qu'on a donné une théorie de Vénus, établie fur des obfervations détaillées; & dans la fuite les Aftronomes qui voudront perfectionner les Tables de cette Planète, trouveront dans ce Mémoire des points de comparaifon que Képler, Caffini & Halley ne nous avoient point laiffés quand ils ont publié leurs Tables aftronomiques.

Époques de VÉNUS pour le refte du fiècle.

ANNÉES	VÉNUS.	APHÉLIE.
1783	$9^s\ 7^d\ 16'\ 21''$	$10^s\ 8^d\ 34'\ 21''$
1784	4. 23. 39. 59	10^s 8. 35. 48
1785	0. 8. 27. 28	10. 8. 37. 15
1786	7. 23. 14. 57	10. 8. 38. 42
1787	3. 8. 2. 25	10. 8. 40. 9
1788	10. 24. 26. 2	10. 8. 41. 36
1789	6. 9. 13. 31	10. 8. 43. 3
1790	1. 24. 1. 0	10. 8. 44. 30
1791	9. 8. 48. 29	10. 8. 45. 57
1792	4. 25. 12. 6	10. 8. 47. 24
1793	0. 9. 59. 35	10. 8. 48. 51
1794	7. 24. 47. 4	10. 8. 50. 18
1795	3. 9. 34. 33	10. 8. 51. 45
1796	10. 25. 58. 9	10. 8. 53. 12
1797	6. 10. 45. 38	10. 8. 54. 39
1798	1. 25. 33. 7	10. 8. 56. 6
1799	9. 10. 20. 36	10. 8. 57. 33
1800	4. 25. 8. 5	10. 8. 59. 0

ÉQUATION de l'orbite de VÉNUS.

	ANOMALIE MOYENNE DE VÉNUS.												
Otez	0s —		Is —		IIs —		IIIs —		IVs —		Vs —		Otez
Degrés.	M. S.	Diff.	M. S.	Diff.	M. S.	Diff.	M. S.	Diff.	M. S.	Diff.	M. S.	Diff.	
0	0. 0	49"	23. 29	43"	40. 49	24"	47. 19	1"	41. 10	25"	23. 51	44"	30
1	0. 49	49	24. 12	42	41. 13	24	47. 20	1	40. 45	26	23. 7	44	29
2	1. 38	49	24. 54	41	41. 37	23	47. 19	2	40. 19	26	22. 23	44	28
3	2. 27	49	25. 35	41	42. 0	23	47. 17	3	39. 53	27	21. 39	44	27
4	3. 16	49	26. 16	41	42. 23	21	47. 14	3	39. 26	28	20. 55	45	26
5	4. 5	49	26. 57	40	42. 44	11	47. 11	4	38. 58	29	20. 10	46	25
6	4. 54	49	27. 37	40	43. 5	20	47. 7	5	38. 29	29	19. 24	46	24
7	5. 43	49	28. 17	39	43. 25	20	47. 2	6	38. 0	30	18. 38	46	23
8	6. 32	48	28. 56	39	43. 45	18	46. 56	7	37. 30	31	17. 52	46	22
9	7. 20	49	29. 35	38	44. 3	18	46. 49	8	36. 59	32	17. 6	47	21
10	8. 9	49	30. 13	38	44. 21	17	46. 41	9	36. 27	32	16. 19	47	20
11	8. 58	48	30. 51	37	44. 38	16	46. 32	10	35. 55	32	15. 32	47	19
12	9. 46	47	31. 28	37	44. 54	15	46. 22	10	35. 23	34	14. 45	48	18
13	10. 33	48	32. 5	36	45. 9	14	46. 12	11	34. 49	34	13. 57	48	17
14	11. 21	48	32. 41	35	45. 23	14	46. 1	12	34. 15	35	13. 9	48	16
15	12. 9	47	33. 16	35	45. 37	13	45. 49	12	33. 40	35	12. 21	48	15
16	12. 56	48	33. 51	34	45. 50	12	45. 37	14	33. 5	36	11. 33	49	14
17	13. 44	47	34. 25	33	46. 2	11	45. 23	15	32. 29	37	10. 44	49	13
18	14. 31	46	34. 58	34	46. 13	10	45. 8	15	31. 52	37	9. 55	49	12
19	15. 17	46	35. 32	32	46. 23	9	44. 53	17	31. 15	38	9. 6	49	11
20	16. 3	46	36. 4	31	46. 32	9	44. 36	17	30. 37	38	8. 17	49	10
21	16. 49	46	36. 35	31	46. 41	8	44. 19	17	29. 59	39	7. 28	49	9
22	17. 35	46	37. 6	30	46. 49	7	44. 2	19	29. 20	39	6. 39	50	8
23	18. 21	45	37. 36	30	46. 56	6	43. 43	20	28. 41	40	5. 49	50	7
24	19. 6	45	38. 6	29	47. 2	5	43. 23	20	28. 1	40	4. 59	49	6
25	19. 51	44	38. 35	28	47. 7	4	43. 3	21	27. 21	41	4. 10	50	5
26	20. 35	44	39. 3	28	47. 11	3	42. 42	22	26. 40	41	3. 20	50	4
27	21. 19	44	39. 31	26	47. 14	3	42. 20	22	25. 59	42	2. 30	50	3
28	22. 3	43	39. 57	26	47. 17	2	41. 58	24	25. 17	43	1. 40	50	2
29	22. 46	43	40. 23	26	47. 19	0	41. 34	24	24. 34	43	0. 50	50	1
30	23. 29		40. 49		47. 19		41. 10		23. 51		0. 0		0
Ajoutez	XIs +		Xs +		IXs +		VIIIs +		VIIs +		VIs +		Degr.

LOGARITHMES des distances de VÉNUS au SOLEIL.

Degrés d'anom.	ANOMALIE MOYENNE DE VÉNUS.												
	0ˢ		Iˢ		IIˢ		IIIˢ		IVˢ		Vˢ		
	Logarith.	Diff.	Logarith.	Diff.	Logarith.	Diff.	Logarith.	Diff.	Logarith.	Diff.	Logarith.	Diff.	
0	4,862318	1	4,861924	26	4,860845	44	4,859359	53	4,857856	45	4,856746	26	30
1	4,862317	2	4,861898	26	4,860801	46	4,859306	52	4,857811	45	4,856720	25	29
2	4,862315	2	4,861872	28	4,860755	46	4,859254	52	4,857766	45	4,856695	25	28
3	4,862313	3	4,861844	28	4,860709	46	4,859202	52	4,857721	44	4,856670	23	27
4	4,862310	4	4,861816	30	4,860663	47	4,859150	52	4,857677	43	4,856647	23	26
5	4,862306	5	4,861786	29	4,860616	47	4,859098	52	4,857634	43	4,856624	22	25
6	4,862301	6	4,861757	31	4,860569	47	4,859046	52	4,857591	43	4,856602	22	24
7	4,862295	6	4,861726	31	4,860522	48	4,858994	52	4,857548	42	4,856580	20	23
8	4,862289	8	4,861695	32	4,860474	48	4,858942	52	4,857506	41	4,856560	19	22
9	4,862281	8	4,861663	33	4,860426	49	4,858890	51	4,857465	41	4,856541	19	21
10	4,862273	9	4,861630	33	4,860377	49	4,858839	52	4,857424	40	4,856522	18	20
11	4,862264	11	4,861597	34	4,860328	49	4,858787	51	4,857384	40	4,856504	17	19
12	4,862253	11	4,861563	35	4,860279	49	4,858736	52	4,857344	39	4,856487	16	18
13	4,862242	12	4,861528	35	4,860230	50	4,858684	50	4,857305	38	4,856471	15	17
14	4,862230	13	4,861493	36	4,860180	50	4,858634	51	4,857267	38	4,856456	14	16
15	4,862217	13	4,861457	37	4,860130	50	4,858583	51	4,857229	37	4,856442	13	15
16	4,862204	15	4,861420	37	4,860080	51	4,858532	50	4,857192	36	4,856429	13	14
17	4,862189	15	4,861383	38	4,860029	50	4,858482	50	4,857156	36	4,856416	11	13
18	4,862174	17	4,861445	39	4,859979	51	4,858432	50	4,857120	35	4,856405	11	12
19	4,862157	17	4,861306	39	4,859928	51	4,858382	49	4,857085	35	4,856394	10	11
20	4,862140	18	4,861267	39	4,859877	52	4,858333	50	4,857050	33	4,856384	8	10
21	4,862122	18	4,861228	41	4,859825	51	4,858283	49	4,857017	33	4,856376	8	9
22	4,862104	20	4,861187	41	4,859774	52	4,858234	48	4,856684	33	4,856368	7	8
23	4,862084	20	4,861146	41	4,859722	51	4,858186	48	4,856951	31	4,856361	6	7
24	4,862064	21	4,861105	42	4,859671	52	4,858138	48	4,856920	31	4,856355	5	6
25	4,862043	22	4,861063	43	4,859619	52	4,858090	48	4,856889	30	4,856350	5	5
26	4,862021	23	4,861020	42	4,859567	52	4,858042	47	4,856859	29	4,856345	3	4
27	4,861998	24	4,860978	44	4,859515	52	4,857995	47	4,856830	29	4,856342	2	3
28	4,861974	25	4,860934	44	4,859463	52	4,857948	46	4,856801	28	4,856340	2	2
29	4,861949	25	4,860890	45	4,859411	52	4,857902	46	4,856773	27	4,856338	1	1
30	4,861924		4,860845		4,859359		4,857856		4,856746		4,856337		0
	XIˢ		Xˢ		IXˢ		VIIIˢ		VIIˢ		VIˢ		

MÉMOIRE
SUR LA POPULATION DE PARIS,
ET SUR
CELLE DES PROVINCES DE LA FRANCE,
Avec des Recherches qui établissent l'accroissement de la Population de la Capitale & du reste du Royaume.
DEPUIS LE COMMENCEMENT DU SIÈCLE.

Par M. MORAND.

Lû à la rentrée publique du 14 Avril 1779.

DANS le Volume de nos Mémoires pour l'*année 1771*, j'ai donné une récapitulation (année par année) des baptêmes, mariages, mortuaires & enfans-trouvés de la ville & des faubourgs de Paris, depuis le commencement du siècle jusques & compris 1770. Ce sommaire, précédé de quelques remarques appropriées au sujet, & qui tendent à l'éclaircir, ayant été agréable à l'Académie, je me suis engagé à suivre ce travail, à donner de temps en temps le résumé général des années subséquentes, en l'accompagnant de réflexions dans le cas où, au bout d'un certain temps, il résulteroit de ce recensement quelque connoissance importante *(a)*.

Parmi les observations que le premier tableau m'a donné occasion de présenter sur cet objet, une des principales, en ce qu'elle intéresse le sentiment naturel de l'homme pour sa propre conservation, est la durée de la vie, plus grande dans nos pays qu'on ne l'avoit estimé communément, malgré ce qu'on pouvoit en présumer de la température excessivement variable de notre climat. Dès 1760, M. de Parcieux *(b)*

(a) Conformément à ce que j'ai proposé dans mon premier Mémoire de 1771, *page 845*, je donnerai pour le Volume de 1781, la récapitulation depuis 1771 jusques & compris 1780.

(b) Addition à l'Essai sur les Probabilités de la durée de la vie humaine, *in-4.° Paris, 1760.*

avoit bien avancé *qu'il n'est pas si rare qu'on le croit ordinairement, de trouver ici, comme ailleurs, des gens très-vieux (c), & toujours plus de femmes que d'hommes (d).* Ce que nous avons remarqué dans notre tableau général sur le grand nombre de vieillards, semble ajouter quelque chose & quelque évidence à l'observation de M. de Parcieux, flatteuse sans doute pour tous les hommes en particulier, dont elle autorise un plus grand nombre, quoique toujours infiniment petit, à espérer ces années de grâces & de faveur, qui constituent ce qu'on appelle *le dernier âge de la vie (e).*

En continuant mes recherches, principalement en les rapprochant de celles qui ont été faites par d'autres que moi, je n'ai pas été peu frappé d'une induction qui intéresse grandement le corps de la Société; & si cette induction se confirme, ou si elle résulte incontestablement de supputations exactes (comme il semble qu'il y a lieu de le penser), elle n'est pas moins importante que la première: l'Académie jugera si elle mérite d'occuper une place dans la rédaction du travail qu'elle m'a confié, & dont je lui donne aujourd'hui la continuation.

Depuis Diodore de Sicile, tous les Historiens de

(c) On sait que la Société royale de Londres a aussi reconnu, après des recherches dont on ne peut guère suspecter l'exactitude, qu'il ne mouroit, par année commune, qu'une personne sur quarante-deux.

(d) Dans l'espace de vingt-deux années, depuis 1745 jusques & compris 1766, le nombre des mortuaires des femmes n'est que de 191753 au lieu de 213487, qui est celui des hommes. M. de Buffon en conclut, qu'à Paris, les femmes vivent plus que les hommes, dans la raison de 213487 à 191753, c'est-à-dire un neuvième de plus, à très-peu-près, ou que sur dix années de vie courante, les femmes ont un an de plus que les hommes.

(e) A ce que j'ai rapporté dans mon premier Mémoire sur la longue vie, *page 844*, j'ajouterai ici un nouvel exemple frappant dans une même famille, à Metz en Lorraine; il a été publié dans les Gazettes d'Agriculture & du Commerce, *année 1779, n.° 7, fol. 564.*

De sept frères & sœurs, dont cinq garçons & deux filles,

Le 1.er de ces enfans,	garçon, avoit	74 ans.
2.e	fille,	75.
3.e	garçon,	78.
4.e	fille,	79.
5.e	garçon,	81.
6.e	garçon,	83.
7.e	garçon,	91.
Faisant entr'eux sept		561 ans.

Dans l'intervalle de ces deux années 1777 & 1779, la fille âgée de 75 ans, & le garçon de 83 ans, sont morts; les autres jouissoient alors d'une bonne santé.

l'Antiquité, Strabon & un grand nombre de Savans, ont prétendu que l'espèce humaine a souffert de très-grandes réductions; un des génies du siècle de Louis XV (car il est permis à un Observateur de crayonner sur ses tablettes jusqu'aux rêves des grands hommes), Montesquieu, portoit les choses plus loin; ne tenant point compte des recrutemens de population, ni de leur possibilité, il pensoit que la terre se dépeuploit tous les jours, au point qu'en supposant cette diminution d'habitans sur la surface du globe soutenue pendant dix siècles, la terre finiroit par n'être plus qu'un désert: ces opinions sont connues de toutes les personnes instruites, & rappelées dans plusieurs Ouvrages *(f)*.

Dans ces derniers temps, quelques Écrivains semblent ajouter foi à ces présages singuliers, & les ont étayés de quelque vraisemblance: ils soutiennent, par exemple, pour la France, que depuis le *Projet de la Dixme Royale*, attribué à M. de Vauban, & dont il a paru une édition *in-12* & une *in-4.°* imprimée en 1707, la population du royaume est diminuée de plus de trois millions d'habitans. Dans une Brochure, publiée en 1760 *(g)*, on a avancé comme démontré, que les pays les plus riches de l'Europe se dépeuplent visiblement. L'Auteur de l'article curieux sur la *Population*, qu'on trouve dans l'*Encyclopédie*, publié en 1765 *(h)*, après avoir remarqué que, depuis le siècle dernier, la Monarchie est augmentée de plusieurs grandes provinces, prétend que ses sujets sont moins nombreux d'un cinquième, qu'ils ne l'étoient avant la réunion de ces provinces à la Couronne. Un état raisonné de la population de Londres & de celle de Paris, inséré dans un de nos Journaux périodiques en 1772 *(i)*, a conduit l'Auteur de cette recherche *(k)* à opiner, comme ceux qui viennent d'être cités, que la popu-

(f) Lettres Persanes. L'Ami des hommes.

(g) Traités sur divers sujets intéressans de Politique & de Morale, du Commerce & du Luxe, *p. 216.*

(h) M. Damilaville.

(i) Gazette d'Agriculture, du Commerce & de Finance, 11 Avril, *page 229*; 14 Avril, *page 236*; 18 Avril, *page 245*.

(k) M. Auffray, des Académies de Metz & de Marseille.

lation de toute l'Europe diminue, & qu'elle ne ſoutient nullement la comparaiſon avec celle qui exiſtoit il y a ſeulement un ſiècle: à la ſuite d'un tableau compoſé pour Londres & pour Paris, d'une ſuite d'années égales pour l'une & pour l'autre de ces deux Capitales, tant en naiſſances qu'en morts, vient un réſultat qui n'eſt à l'avantage ni de la population de Londres, ni de la population de Paris *(l)*. Cette dernière ſeule nous intéreſſe eſſentiellement; c'eſt à elle ſeule que je m'arrête, d'autant plus que pour ce qui eſt de Paris, les ſupputations de l'Académicien de Metz, & les conſéquences qu'il en a tirées, ſont reſtées conſignées dans ce Journal, ſans avoir été contredites juſqu'à préſent: elles acquièrent dès-lors une certaine force, & ſont ſuppoſées avouées. Antérieurement M. l'abbé Expilly s'étoit déjà élevé contre cette aſſertion. M. de Parcieux, dont les ſupputations n'étoient cependant relatives principalement qu'à deux claſſes d'hommes, Roturiers & Religieux, avoit ſoupçonné l'accroiſſement de la population de la Capitale de la France. Les perſonnes qui ſe ſont occupées de ce genre de ſpéculation, & celles chargées de certaines parties d'adminiſtration, ſont autoriſées à penſer qu'il n'y a rien de moins vrai que ce dépériſſement de population dans Paris. Seroit-il indifférent de déſabuſer ou de ne point déſabuſer l'univerſalité des Citoyens ſur un fait de cette nature? Il eſt ſans contredit un ſujet d'encouragement ſi la population ſe ſoutient, encore plus ſi elle augmente: quel ſujet de découragement, au contraire, ſi cette population s'affoiblit ſenſiblement ſans ſe relever, particulièrement après quelque calamité ou quelqu'époque, propre à faire ſoupçonner des émigrations ou un défaut de reproduction, capable de faire renaître l'idée d'une dépopulation ſoutenue! Et ce dernier

(l) D'après un état depuis 1759 incluſivement, juſqu'en 1772 excluſivement, comparé avec un état de naiſſances & de morts, en 1682, il compte mille habitans de perdus par an depuis 1682, & prétend que depuis treize ans, la population de Paris perdoit chaque année dix-huit cents ſoixante-deux perſonnes; enfin, il trouvoit alors douze cents naiſſances de moins, & deux mille deux cents quatre-vingt-cinq morts de plus; & la population, eſtimée ſelon lui à ſept cents mille habitans, diminuée d'un huitième.

ſentiment ne laiſſe pas que d'avoir des partiſans. Commençons donc par jeter les yeux autour de nous; examinons d'abord ſi cette manière de voir les variations & les altérations de notre population de Paris, ſe vérifie dans quelque point; portant enſuite nos regards dans les provinces, examinons s'il eſt bien certain que notre génération, en s'épuiſant dans ſa reproduction, annonce ces approches, entrevues de ſi loin, de la première vieilleſſe du monde entier, & particulièrement celle du royaume de France.

En s'attachant uniquement à conſidérer ſous des aſpects généraux, les ſignes auxquels on pourroit reconnoître cette deſtruction, rien ne paroît les appuyer: quant à la Capitale, par exemple, ſes limites reculées à deux repriſes différentes depuis un ſiècle, afin d'y ajouter d'abord au quartier Saint-Sulpice & au quartier de Richelieu, deux villes nouvelles; deux autres, de nos jours, à celui de la Ville-l'Évêque & à la Chauſſée d'Antin, ſont réputées par quelques perſonnes un ſigne d'accroiſſement de population *(m)*. À l'égard des provinces, on pourroit en tirer la même induction de l'épuiſement des forêts & de la rareté des bois de chauffage, à la vérité réſultats du luxe des particuliers & de l'inattention du Gouvernement à replanter les bois, mais néanmoins ſuites également évidentes d'une grande population *(n)*.

Ces préſomptions générales ſont plus que plauſibles, plus

(m) Ce n'eſt pas que nous prétendions que l'on puiſſe conclure complètement de cette nouvelle étendue de ſuperficie, couverte d'habitations: ſans doute la recherche de logemens commodes & ſpacieux, entre ſeule pour beaucoup dans ces accroiſſemens d'étendue de local; mais peut-on diſconvenir que ces logemens n'emportent un plus grand état de maiſon, en augmentation de domeſtiques, dont la plupart en ſe mariant, ont néceſſairement augmenté la population! Il eſt en même temps difficile de croire, que depuis un ſiècle le nombre des Artiſans, des petits Marchands & autres, ne ſoit pas doublé; l'accroiſſement des Corps & Communautés, de ſiècle en ſiècle, eſt une choſe hors de doute.

(n) M. de Buffon dans ſon Supplément au *tome IV* de l'hiſtoire du Cabinet du Roi, fait judicieuſement la remarque ſuivante, qui ſe rapporte abſolument à notre idée; *plus*, dit ce Savant: *plus les hommes ſe multiplieront, plus les forêts diminueront.*

fortes du moins que les conjectures de la dépopulation du royaume; elles sont incontestablement beaucoup moins fautives que les combinaisons sur lesquelles plusieurs Écrivains se sont appuyés ; elles ne doivent cependant être ici d'aucune considération ; aussi les négligerons-nous entièrement : un point de cette conséquence demande à être porté jusqu'à l'évidence, autant que la chose en est susceptible. La discussion par laquelle je vais essayer de mettre tout le monde indistinctement en état de juger, n'entraînera pas de longs détails ; c'est entièrement une affaire de calcul. Pour lever tout soupçon de préoccupation de ma part, je m'abstiendrai d'y faire rien entrer de mon travail particulier; il me suffira de remplir les fonctions d'Historien, c'est-à-dire que je m'en tiendrai à rassembler les premières autorités que j'ai prises au hasard, à mesure qu'elles se sont présentées jusqu'à l'année dernière, & sans en avoir choisi aucune par préférence.

Des différentes manières de juger l'accroissement ou le décroissement de population d'une ville *(o)*, celle qui procède par l'augmentation & la diminution du nombre des naissances dans une période de temps fixe, nous semble la plus aisée aujourd'hui, la plus sûre, la meilleure *(p)*; & précisément le tableau des naissances & des mortuaires de Paris, depuis le commencement du siècle, présente dès actuellement pour cette Capitale,

(o) M. de Parcieux, dans son Addition, a fait connoître une façon très-simple, dont s'y prenoit un Curé de Normandie, pour former une liste de mortalités : le Dictionnaire historique, géographique & politique des Gaules & de la France, par M. l'abbé Expilly, (tome V, imprimé en 1768, au mot *Population*), le projet d'une Dixme royale, *in-4.° 1707, page 187*, ont donné différens modèles de dénombremens que l'on peut consulter. Aux états de naissances & de morts, pour les provinces, il seroit bon d'ajouter un dénombrement, ou du moins le nombre des Paroisses, dont sont composés les cantons qui donnent matière à ces états.

(p) Peut-être aussi l'examen suivi & comparé, en différens temps, de la consommation d'une grande ville, telle que Paris, quoique bien sujette à variations, auroit quelque utilité ; nous insérerons ici un état de ce genre, pour, dans la suite, servir de terme de comparaison avec d'autres.

État

Capitale, des résultats de nature à intéresser les Citoyens de tous les ordres. On verra tout-à-l'heure qu'ils sont tout-à-fait opposés, soit aux annonces, soit aux supputations sinistres dont nous avons parlé au commencement de ce Mémoire. En donnant une notice chronologique de quelques-uns de ces résultats, nous avons pour but de substituer à ce système de dépopulation, un tableau plus vrai & plus agréable pour les générations qui succèderont à la nôtre : ce tableau, auquel j'ai cru pouvoir m'arrêter après avoir compté les voix, montre que la population du royaume, qui, par des circonstances telles que celles que l'on sait arriver de temps en temps dans les grands États, pourroit avoir été languissante, peut-être

---

État de consommation de toute espèce de Vivres, dans Paris, en 1664.

1800000 setiers de blé.
900 setiers de sel.
77000 bœufs.
120000 veaux.
420000 moutons.
14400 cochons.
33977 morues.
32590 barils de harengs.
3250 barils de saumon salé.
1340 barils de maquereaux salés.
41315 voies de { charbon de bois. / charbon de terre.
4 à 500000 voies de bois.
3212000 setiers d'avoine.
10000200 bottes de foin & de paille.
5004519 livres de suif.
160000 rames de papier pour l'impression.
280000 rames de { papier pour écriture. / cartes à jouer. / cartes de Géographie. / estampes.

J'ai cru pouvoir adopter cet état, publié par M. l'abbé Expilly, sans néanmoins garantir en aucune manière son exactitude : d'anciens écrits fugitifs renfermoient une note sur le même objet ; quelque peu d'authenticité que puisse avoir une pareille note, prise dans ces sources, je placerai ici celle que je trouve dans un Almanach : il y est dit, qu'il se consomme à Paris, année commune,

900 muids de sel.
12800 muids de blé.
77000 bœufs.
120000 veaux.
240000 moutons.
32400 cochons.
37978 morues.
32560 barils de harengs.
3250 barils de saumon salé.
1340 barils de maquereaux salés.
41315 muids de { charbon de bois. / charbon de terre.
500000 voies de bois.
33212 muids d'avoine.
10000000 bottes de foin.
200000 bottes de paille.

même altérée jusqu'au commencement de ce siècle, à peu-près *(q)*; ce tableau montre, dis-je, que la population du royaume s'accroît aujourd'hui sensiblement, ou tout au moins qu'elle ne diminue certainement pas dans le moment actuel, comme le prétendent quelques personnes. Par exemple, le dénombrement de Paris, commencé sous Colbert *(r)*, porte la population de cette Capitale à sept cents vingt mille personnes *(s)*: ce même nombre ne se retrouve peut-être pas aujourd'hui; mais la diminution des morts & l'augmentation des naissances, établies par notre tableau depuis environ une quarantaine d'années *(t)*, font disparoître l'idée de continuité de dépopulation.

(q) Comme elle l'est quelquefois passagèrement, selon la rigueur des hivers, selon les mauvaises années ou des constitutions épidémiques, selon l'affluence de la province & des pays étrangers, selon enfin des évènemens particuliers : c'est ainsi que par le tableau de 1710, on trouve une différence au moins d'un cinquième de naissances, sur les naissances des années précédentes; non-seulement, la population avoit perdu un cinquième sur la reproduction, mais encore presque le double par la mortalité, & un quart de moins de mariages, dont le nombre, ainsi que celui des naissances, présente toujours, dans Paris, moins de variations d'une année à l'autre, que le nombre des morts. Depuis le commencement de nos dernières expéditions maritimes, qui expatrient nombre de sujets, dont la plus grande partie ne reviendra point, on doit s'attendre à voir une différence marquée dans notre population.

(r) En 1682, & rendu public peu d'années après la mort de ce Ministre, en 1694.

(s) Avant ce dénombrement vrai, & généralement adopté aujourd'hui, le nombre des habitans de Paris semble avoir été évalué à un million, on ignore sur quel fondement; il est porté à ce taux par le Père Bonssingault, Supérieur & Chanoine régulier, dans un Ouvrage intitulé le *Guide universel des Pays-bas, in-12, troisième édition, 1672, page 358*. L'abbé de Saint-Pierre, & depuis lui plusieurs Écrivains, le font monter à huit cents mille, & ils ajoutent qu'il meurt, année commune, dix-huit à dix-neuf mille personnes, sur vingt environ qui naissent. Le Maire, auteur de l'Ouvrage intitulé *Paris, ancien & nouveau, tome I, page 6, état présent de la ville de Paris, en 1685*, a aussi adopté ce nombre de morts dans Paris.

(t) En établissant la base de ces recherches sur les états des mortuaires, il est indispensable de ne pas soupçonner que ces Tables, dans leurs commencemens, n'étoient ni si exactes, ni aussi complètes que depuis environ quarante ans, qu'elles ont été augmentées de quelques articles & de quelques développemens; il est plus sûr conséquemment de ne partir que de l'année 1721, & même encore, à l'exemple de M. de Buffon, pour approcher de plus près de la mortalité moyenne,

L'évaluation de M. l'abbé Expilly, portée à six cents mille habitans de Paris, vers l'année 1760 *(u)*, se trouve peu différente des supputations de M. de Buffon, qui fixe ce nombre à six cents cinquante-huit mille ; & attendu que la mortalité moyenne est actuellement reconnue de vingt mille par an *(x)*, cet Académicien porte le nombre des personnes vivantes dans la Capitale, à sept cents mille *(y)* : il trouve en même temps que la force de cette Capitale, pour le maintien de sa population, a depuis cent ans augmenté d'un quart *(z)*.

Un Magistrat, distingué par ses lumières, & non moins recommandable par les fonctions dont il a été chargé successivement pour le Roi, en Auvergne & dans le Lyonnois,

---

il est plus sûr de ne partir que de 1745, où ces listes ont été détaillées dans des divisions intéressantes.

(u) Dictionnaire historique, géographique & politique des Gaules & de la France, tome V, imprimé en 1768, *page 400*, au mot *Paris*.

(x) Sept cents vingt mille si la mortalité moyenne est de vingt mille par an, en comptant trente-cinq vivans pour un mort : quelques Écrivains, en jugeant du nombre des vivans par celui des morts, avancent que ce rapport est de 32 ou 33 à 1 ; selon M. de Buffon, il est de 35 à 1, de manière que, suivant cet Académicien, Paris contient trente-cinq fois dix-huit mille huit cents ou six cents cinquante-huit mille personnes, tandis que, d'après le premier rapport de trente-deux vivans pour un mort, Paris ne contiendroit que six cents un mille six cents personnes.

(y) Histoire Naturelle, Supplément, tome IV, Probabilités de la durée de la vie, *in-4.° page 283*. Je dois ajouter ici une remarque sur le nombre total des naissances portées dans les états annuels, publiés jusqu'à ce jour. L'article des Enfans-trouvés renferme un double emploi, que j'ai trouvé moyen de réformer : parmi les enfans reçus dans cet Hôpital, & portés sous ce titre, la plupart ont été baptisés, soit à Paris, soit dans les Campagnes d'où ils ont été envoyés ; ce nombre particulier, dont la distinction commencera sur les états à l'année 1780, doit être diminué sur la totalité des naissances de la ville de Paris, pour les années antérieures, où le nombre des Enfans-trouvés s'est accrû sensiblement : on peut évaluer ce nombre à quinze cents, année commune, qu'il faut conséquemment soustraire des résultats relatifs à la population générale de la Capitale, pour les années précédentes.

(z) En comparant les vingt premières années, depuis 1721 jusqu'en 1766, avec les dix dernières, il en résulte, selon le même Savant, qu'entre la dernière époque, comparée avec la première, il y a une différence d'un trente-sixième en augmentation.

où j'ai vu sa mémoire en honneur, quoique n'étant plus dans ces provinces, s'étoit occupé de la même recherche bien antérieurement à mon premier Mémoire : le tableau de mortalité, faisant partie de mon travail, a fixé l'attention de l'homme en place, toujours dirigée vers l'utilité. Il a publié, sous le nom de M. Maudre, dans le Mercure de Mai 1777, des réflexions dont le résultat entièrement d'accord avec ce que nous dirons dans un instant relativement aux provinces du royaume, dédommage clairement des tristes impressions données par l'Académicien de Metz & de Marseille. Le savant Magistrat qui n'a pas voulu se nommer, après avoir distrait de son calcul six Paroisses de Paris, comprises dans les états de 1770 & 1771, qui ne l'étoient point dans les états précédens, trouve que dans les autres Paroisses dont la ville de Paris étoit alors composée, la population s'est accrue d'environ un dix-septième dans le courant d'un siècle, & que le nombre des morts est diminué d'environ un vingt-deuxième. L'auteur de nouvelles recherches & considérations sur la population de la France, estime le nombre des personnes vivantes à Paris, évalué par les naissances, à six cents soixante-dix mille, à peu-près *(a)*.

Quel que puisse être cet accroissement de population dans Paris, le premier mouvement qu'inspire naturellement ce genre de prospérité de la Capitale du royaume, est d'abord suspendu par une opinion assez généralement reçue; & on peut dire que cette opinion est raisonnable, si l'on trouve la preuve que cet accroissement de population de la Capitale en particulier, existe en quelque chose aux dépens de nos provinces, où la multiplicité des bras & le nombre des Cultivateurs sont d'une conséquence bien autre que celui des habitans de Paris. En effet pour peu que nos campagnes se ressentissent, dans la plus petite proportion, de l'émigration annuellement répétée qui vient repeupler cette foule d'Employés divers, de Domestiques, d'Ouvriers de l'un & de l'autre sexe, de

(a) Chapitre VI, page 69.

petits Marchands forains *(b)*, que nous mettons en action dans la Capitale, il est hors de doute que cette seule colonie de citadins, loin d'être pour nous, comme elle l'est pour l'Étranger qui n'y est pas intéressé, un sujet d'admiration, ne seroit bien véritablement pour la suite des temps qu'un sujet d'alarmes. Quelques Cours souveraines ont éprouvé ce sentiment; peut-être y ont-elles été fondées momentanément : dans leur Juridiction, elles se sont occupées des moyens d'obvier aux suites inévitables d'un pareil malheur. Le Parlement de Dijon dans des remontrances du 9 Janvier 1767; le Parlement de Bordeaux, dans le dispositif d'un arrêt du 27 Février 1765, se sont plaints de la dépopulation qui se faisoit sentir dans leur ressort : ce dernier Parlement a ordonné en conséquence de trois en trois ans, un recensement dans toutes les villes de son ressort, de tous les habitans de leurs juridictions, soit hommes, soit femmes, maisons religieuses, pensionnaires, domestiques de ces maisons, hôpitaux & établissemens de charité, manufactures, maisons de forces, domestiques qui y sont employés; en un mot l'opinion répandue de dépopulation, a donné lieu à des ouvrages utiles sur les causes de ce mal trop généralement regardé comme avéré, & (dans le cas où il seroit constaté), sur les moyens d'en arrêter le progrès. Les observations faites de tous côtés, & soigneusement à ce qu'il paroît, rassurent sur le point de fait, en supposant même que la population de la Capitale soit de deux ou trois mille sujets de moins que le taux auquel on l'a porté : ces observations *(c)* prouvent

(b) Le nombre seul de sujets en service à Paris, très-difficile à reconnoître en tout temps, ne peut que s'être multiplié considérablement, il se montoit il y a environ vingt ans (d'après les rôles de la Capitation) à trente-sept ou trente-huit mille, & se trouvoit en 1754 (d'après M. l'abbé Expilly, *tome V*) de quarante-trois mille six cents quatre-vingt-dix-neuf : M. Maissance porte ce même nombre en 1754, à trente-sept ou trente-huit mille, *chapitre VII, question VII, page 114.*

(c) En 1770, feu M. l'abbé Terray, Contrôleur général des Finances, pour avoir une connoissance à peu-près exacte & certaine du nombre des habitans du royaume, demanda, de la part du feu Roi, à M.^{rs} les Intendans, les états des naissances, mariages & morts de

que la population des provinces est augmentée dans une progression marquée; ce qui d'abord tranquillise sur le grand nombre de sujets qui quittent les campagnes pour venir à Paris. Si l'on se rappelle maintenant cette dévastation spontanée des habitans de la terre, supputée par quelques Écrivains à son dernier période dans dix siècles, & qui doit faire régner de proche en proche sur toute la surface du globe le plus profond silence, il est clair que la France n'en présente point l'annonce: l'aurore du siècle d'Auguste n'en sera point, dans l'histoire à venir, la première époque; au contraire, tandis que pour la ville de Londres & pour une partie de l'Angleterre, la population a éprouvé, d'après les calculs de quelques Observateurs, un déchet sensible *(d)* depuis un temps assez soutenu, pendant ce même temps, la différence des naissances aux morts, qui va toujours en croissant à Paris & dans les provinces, laisse apercevoir que la population & de la Capitale, & de tout le royaume, est considérablement augmentée.

Quoique mon travail embrasse uniquement le tableau de la population de Paris, il y a un rapport trop direct, une dépendance trop réelle entre cette population de la Capitale & la population du reste du royaume, pour que je puisse me dispenser en passant de les rapprocher l'une de l'autre; cette recherche de comparaison intéresse d'ailleurs évidemment l'humanité entière, & la félicité publique; on ne doit pas être surpris que depuis quelques années, plusieurs Citoyens estimables s'occupent de cette spéculation: je ne ferai encore

toutes les généralités; ils ont été publiés soigneusement dans la Gazette du Commerce, où ils forment un ensemble des plus intéressans pour des recherches, qui, de même que ces différens états, ne peuvent que se perfectionner avec le temps: il n'est point indifférent de faire remarquer, que le nombre des morts des enfans peut être soupçonné supérieur à celui porté dans ces états; il est permis de présumer les Curés de campagnes inexacts à en tenir registre, l'exrait mortuaire des enfans n'étant d'aucunes conséquence dans les actes de la société civile, & étant rarement demandé.

(d) D'après le docteur Price, entr'autres, dans son Essai sur l'état de Londres & sa population, & dans son Traité des payemens réversibles, contredit, à la vérité, par plusieurs Écrivains. *Voyez l'état présent de la population d'Angleterre & du pays de Galles.*

usage que de leurs recherches & de leurs travaux; il ne sera aucunement nécessaire que j'y ajoute du *mien*.

Un Ouvrage, dans lequel l'induction de population augmentée dans les provinces se trouve développée *(e)*, mérite d'autant plus d'entrer en considération, que l'Auteur, à portée de connoître trois riches provinces de France, ne s'est attaché dans son travail qu'aux faits essentiels qui assurent le nombre des habitans dans chacune de ces provinces, & qu'il a soigneusement compensé tout ce qui pouvoit jeter de l'incertitude sur l'inexactitude de ses calculs, pour chaque généralité sur laquelle il a fait ses opérations; généralités d'Auvergne, de Lyon & de Rouen. Du nombre des naissances, mariages & morts en dix ans de temps dans toutes les villes, bourgs & paroisses de ces généralités, M. Maissance a composé une année commune; il s'est procuré en même temps des dénombremens complets d'habitans, *tête par tête*, d'un grand nombre de villes, de bourgs & de paroisses de ces mêmes généralités *(f)*; en soixante-deux ans, il a trouvé la population augmentée de plus d'un onzième dans le total de cent vingt-huit paroisses *(g)*; de ses supputations, il conclut que jamais

(e) Recherches sur la population des généralités d'Auvergne, de Lyon & de Rouen, & de quelques provinces & villes du royaume, avec des réflexions sur la valeur du blé, tant en France qu'en Angleterre, depuis 1674, par M. Maissance, Receveur des Tailles de l'élection de Saint-Étienne; *Paris, in-4.° 1766.* Cet Ouvrage se trouve cité avec les éloges qu'il mérite dans le Supplément au tome IV de l'Encyclopédie, imprimé en 1776, au mot *Population*.

(f) Cette manière de compter tête par tête, semble plus sûre pour ce qui s'appelle dénombrement, à l'effet de connoître simplement la population, que par feux ou par familles, dont l'énumération est toujours sujette à beaucoup de difficultés, d'infidélités, de longueurs, de dépenses, & même d'inconvéniens; d'ailleurs, le nombre des naissances dans une ville, pris sur l'année commune, donne une base certaine pour connoître le nombre de ses habitans, & peut tenir lieu de dénombrement.

(g) Il remarque, d'après M. Malouin, que les mois de Juillet, Mai, Juin & Août, sont les dates les plus fréquentes de grossesses, & que ceux qui le sont moins communément, sont d'abord Novembre; ensuite Mars, Avril & Octobre.

Dans son estimation de la durée moyenne de la vie de vingt-cinq à vingt-six ans, il approche du sentiment de M. l'abbé Expilly; M. de Kersoboom, en Hollande, M. Halley, Anglois, d'après les Tables de Breslau en Silésie, ont

la population n'a été si grande dans le royaume, & que les Écrivains politiques *(h)* qui ont assuré, depuis quelques années, une dépopulation, n'en ont apporté aucune preuve.

Cette conséquence de M. Maissance, appuyée sur des recherches dans trois généralités seulement, pourra, il faut l'avouer, ne pas être regardée décisive pour tout le reste du royaume, mais elle se trouve confirmée par les relevés de morts & de naissances dans beaucoup d'autres provinces : je me contenterai d'en placer ici quelques-uns.

Le dénombrement, fait en 1759, des habitans d'Avignon, & rapporté par M. l'abbé Expilly *(i)*, montre une augmentation considérable, en le comparant avec celui qui avoit été fait en 1739.

D'après un semblable examen dans le Berri, cette seule province, où il n'y a ni industrie ni commerce, & qui est dans l'intérieur du royaume, s'est trouvée, de 1729 à 1762, augmentée en population d'un dixième ou environ.

Des recherches, faites il y a environ dix ans, sur la population du Dauphiné, ont prouvé que dans cette province, qui comprend une étendue d'à peu-près six cents soixante lieues quarrées, il y avoit à la fin du siècle dernier cinq cents soixante-douze mille trois cents dix-huit habitans; & que dans l'année 1764, on en comptoit six cents trente-quatre mille six cents quarante-un (sans y comprendre la principauté d'Orange) ce qui présente une augmentation bien marquée : en 1769, on a trouvé six cents quarante-cinq mille cinq cents soixante & six pour total d'habitans.

La Gazette d'Agriculture du 30 Mars 1773 *(k)*, porte, qu'il

---

porté la vie moyenne des hommes à quatre-vingt-quatre ans. Il est indispensable d'observer, avec plusieurs Écrivains, que les principes pour évaluer la durée de la vie moyenne, ne doivent pas être les mêmes pour tous les pays ; que cette estimation peut varier, à raison d'un pays que l'on habite, à raison de la fortune aisée ou mal aisée, &c. qu'enfin, il ne faut pas prendre une moyenne proportionnelle à volonté, & au hasard.

(h) M. de Mirabeau, dans l'ouvrage intitulé l'*Ami des hommes*.

(i) Au mot *Feu*, *tome III*, *page 124;* cette ville, enclavée dans la France, peut faire nombre parmi les exemples.

(k) Article de Poitiers, du 20 Mars, *page 204*.

qu'il eſt prouvé, par les regiſtres de pluſieurs paroiſſes de campagne du Poitou, que la population y étoit augmentée aſſez conſidérablement depuis environ douze ans: il y eſt remarqué que cet accroiſſement ſuppoſoit un accroiſſement de ſubſiſtances, & que néanmoins il y avoit eu de mauvaiſes récoltes; d'où l'on infère ou que la culture s'eſt bien étendue, ou que l'aiſance s'eſt répandue dans ces cantons.

Un état des baptêmes, mariages & ſépultures de pluſieurs paroiſſes de Bourgogne, recueilli par M. de Buffon *(l)*, fait voir dans chacun de ces endroits, plus de naiſſances que de morts; dans un endroit, près d'un tiers ou près d'un quart de plus; dans un autre, un cinquième, un neuvième à peu-près.

Enfin les relevés de différentes provinces du royaume, qui ont commencé à être publiés ſucceſſivement depuis l'année 1774 dans la Gazette d'Agriculture, & dont nous ferons quelque uſage à la ſuite de la récapitulation des naiſſances & mortuaires de Paris, depuis 1771 juſqu'en 1780, *(m)*, achèvent de conſtater également dans tout le royaume une ſupériorité marquée du nombre des naiſſances ſur celui des morts; ils fourniſſent conſéquemment la preuve d'une population augmentée, non-ſeulement dans la capitale, mais encore dans la totalité de ces provinces en général *(n)*; accroiſſement déjà aperçu en 1768, par M. l'abbé Expilly, auquel on a cru pouvoir reprocher, d'avoir porté, mal-à-propos, cet accroiſſement à trois ou quatre millions depuis deux ſiècles.

Dès 1561, ſous Charles IX, on comptoit vingt millions d'habitans en France, ils ont été évalués à ce taux juſqu'à la révocation de l'Édit de Nantes; le dénombrement fait à la fin du ſiècle dernier, & l'Ouvrage intitulé *Projet de la Dixme royale*, ne le portoient plus qu'à dix-neuf millions quatre-vingt-quatorze mille cent quarante-ſix habitans; cependant, d'autres Écrivains en ont encore réduit le nombre à ſeize millions;

(l) Supplément. tom. IV, *p. 286*.

(m) V. Note *a* p. 459 de ce Mém.

(n) Il n'eſt pas indifférent d'obſerver, que cela eſt également reconnu par les Savans d'Angleterre, qui ont tourné leurs ſpéculations ſur la France. *Eſſai ſur la Population de l'Angleterre, &c. par le Doct. Wales.*

c'étoit une idée reçue dès 1726, ce qui, ſans doute, a fait naître l'idée de dépopulation; M. l'abbé Expilly le ſuppoſe de vingt-deux millions quatorze mille trois cents cinquante-ſept, & de vingt-un millions au moins *(n)*. Les différens tableaux de notre population, auſſi curieux qu'intéreſſans, dont j'ai parlé, & ſur leſquels j'ai fixé mon attention, me paroiſſent donner une grande vraiſemblance à cette ſupputation de M. l'abbé Expilly, à l'eſtimation de M. de Buffon, qui trouve en France vingt-un millions ſix cents ſoixante-douze mille ſoixante-dix-ſept perſonnes, & peut-être encore aux réſultats des rapports des Intendans des Généralités, d'après leſquels la population du royaume monte à vingt-quatre millions de perſonnes; ce nombre, en même-temps, s'accorde avec les réſultats trouvés par M. Moheau, dont l'avis eſt que l'on doit compter dans toute la France vingt-trois millions cinq cents mille ou vingt-quatre millions d'habitans en France *(o)*: le docteur Price, eſtime auſſi que la population de la France ne peut pas être au-deſſous de vingt-cinq millions, & il obſerve que les naiſſances excèdent, tous les ans, les morts d'un ſeptième: tous ces réſultats, preſque ſemblables, donnent une certitude raiſonnée qu'il exiſte annuellement dans les provinces du royaume, un accroiſſement quelconque de population (qui peut être à peu-près d'un neuvième en ſoixante-quatorze ans) ſelon l'eſtime de M. Moheau *(p)*.

Ainſi, à juger pour l'inſtant, ſoit par différentes eſtimations, ſoit par pluſieurs provinces priſes ſéparément, il eſt tout au moins plus que prouvé, & c'eſt eſſentiellement mon objet,

(n) Dictionnaire hiſtorique, géographique & politique des Gaules & de la France, au mot *Feu*, *page 123*, tome III, imprimé en 1764.

(o) Depuis la lecture de ce Mémoire, du 14 Avril 1779, les Papiers publics ont fait mention du Tableau préſenté au Roi, par M. l'abbé Expilly, le 4 du mois d'Août, dans lequel l'état des habitans de la France, eſt, à ſon eſtime, de plus de vingt-quatre millions dans les trente-deux Généralités, & le nombre des habitans de Paris, à ſix cents mille. *Annales politiques, tome VI, n.° XLIV; Mercure de France, Septembre, 1779, page 235.*

(p) Chapitre XIII, *page 273.*

que la dépopulation du royaume n'est point une chose de fait, qu'elle n'a été estimée par les personnes qui l'ont annoncée, que d'après quelque province en particulier, où la chose a pu ou dû être ainsi. En un mot, il paroît d'un autre côté, que depuis environ quarante ou cinquante ans, le nombre des personnes vivantes, à Paris, est augmenté.

Voudroit-on dans ce moment ne regarder l'induction d'une population augmentée dans le royaume, à un point qui ne s'étoit pas encore vu, ou qui n'avoit pas été remarqué, que comme une assertion hardie ou forcée, comme un aperçu dénué de toute l'évidence qu'il seroit naturel d'y desirer, pour donner lieu à des recherches certaines, pour servir utilement de base à des spéculations politiques? Voudra-t-on douter de l'exactitude des opérations employées à reconnoître cet accroissement de population? Soit, on conviendra même, comme l'observe judicieusement M. de Buffon, qu'en travaillant, & en raisonnant sur cette matière, on est sujet à se tromper, & même à tirer de fausses inductions des rapports que présentent les tableaux de mortalité *(q)*: mais on ne peut se refuser à une conséquence bien simple, savoir, que de tout l'ensemble, dont nous ne donnons ici que l'esquisse générale, (même en prenant le terme moyen de la plus

(q) Il est difficile d'établir une règle de proportion entre le nombre des vivans & celui des morts; la règle de trente-cinq vivans contre un mort, est trop foible pour les habitans de la campagne, & ne peut être généralement adoptée pour connoître la population réelle & existante de Paris: un Écrivain, qui ne s'est point nommé, a donné, dans la Gazette d'Agriculture, *année 1777, n.° 80*, comme un moyen sûr, une règle de proportion entre le nombre des naissances & celui des habitans existans; il rapporte plusieurs exemples, par lesquels il se propose de prouver que cette proportion est de 1 à 26, sur la totalité du royaume & d'une grande province, contre le sentiment de plusieurs Auteurs qui estiment cette proportion à 28.

Le Rédacteur de cette Feuille périodique, observe à ce sujet, que la recherche faite par M. de Buffon, pourroit servir de preuve; que cette proportion de 1 à 28 est effectivement celle qui approche le plus de la vérité; en effet, poursuit le Rédacteur, dans les paroisses dénombrées par M. de Buffon, & citées précédemment s'est trouvé neuf mille trois cents quarante-trois habitans de tout sexe & de tout âge: l'année commune des naissances dans les mêmes paroisses monte à 336; ce

forte & de la plus foible supputation *(r)*) il résulte une somme considérable de probabilités *(s)*, qui rend plus que problématique l'opinion de dépopulation dans le royaume; en un mot, il est permis d'adopter par préférence des observations nombreuses, & multipliées de tous côtés, qui, par des résultats presque d'accord, établissent uniformément un accroissement de population, dont le dire de plusieurs Écrivains éloignoit toutes les idées.

---

nombre, multiplié par 28, donne 9408, ce qui approche beaucoup des neuf mille trois cents quarante-trois habitans existans réellement dans lesdites paroisses. Il semble néanmoins qu'il y auroit lieu de croire que la règle de vingt-huit habitans contre une naissance, est en général trop forte, du moins à en juger par les recherches faites par l'Académie de Dijon, en 1770, sur la population de Bourgogne; cette Compagnie s'étant procuré le relevé des naissances, des morts & des mariages, & le dénombrement exact des habitans de cinquante paroisses, prises indifféremment dans neuf bailliages de la province, elle a trouvé que l'année commune des naissances de ces cinquante paroisses, multipliée par 25 $\frac{1}{4}$, donnoit, à 7 près, le nombre des habitans compris dans les dénombremens.

(r) Une population nombreuse qui paroît d'abord devoir être regardée comme la première de toutes les richesses d'un État, seroit-elle effrayante, seroit-elle une charge, car les deux contraires sont mis en question! l'augmentation des habitans d'un royaume, est-elle l'annonce de la prospérité d'un État, comme la diminution semble être une preuve de la pauvreté d'une Nation! ces discussions sont étrangères au Physicien, je les abandonne aux personnes capables de les rapporter fructueusement à des systèmes d'administration. Afin d'aider à juger, par la suite des temps, des différences dignes de remarque, dans la population des provinces, j'ai jugé utile de consigner dans mon nouveau travail, un dénombrement des habitans des provinces du royaume, en 1726; on le trouvera à la suite de la récapitulation des baptêmes, mariages & mortuaires de Paris, depuis 1771 jusques en 1780 inclusivement: ce dénombrement, rapproché de l'état que je ferai suivre (dans le même volume pour l'année 1781) de la population des provinces du royaume, pendant les années 1776 & 1777, & dont on a fait une année commune, donnera, dans tous les temps, un point de comparaison intéressante.

(s) Cette population, telle qu'elle est établie par les Intendans, a engagé un Écrivain dans une supputation curieuse, dont le résultat peut mériter d'être mis ici, en opposition avec le sentiment de M. de Montesquieu. En supposant pour l'instant, que la population ainsi augmentée, pût s'accroître dans une même proportion, sans être troublée par une guerre longue, pénible, en pays éloigné de nos foyers, par quelqu'épidémie universelle, &c. L'Auteur trouve que cette population se trouveroit doublée en moins de deux siècles & demi.

Une découverte auſſi intéreſſante pour la ſociété, je veux dire cette génération multipliée, reconnue par pluſieurs perſonnes à la fois, ſe rapporte dans ſon principe & dans ſa continuité, à quelques cauſes générales, dignes d'exciter la curioſité. Il ne peut être qu'utile d'en reconnoître l'enchaînement pour les entretenir & les étendre s'il ſe peut ; cette recherche eſt d'autant plus intéreſſante, qu'en remontant aux ſources, deſquelles peut dériver ſenſiblement l'accroiſſement de population dans un royaume, on trouve pour la France des motifs plus que ſuffiſans, pour conclure, avec fondement, que l'aſſertion de population augmentée, & celle de diminution de mortalité depuis près de cinquante ans, non-ſeulement à Paris, mais même dans les provinces, ne ſont point de pures chimères. On ne doit pas ſe diſſimuler ici pluſieurs chefs d'une ſeule & même objection, qui infirment la vérité de cette population augmentée, de cette diminution de mortalité, de cette longævité, ſoit dans les provinces, ſoit dans la capitale : Comment, diront quelques perſonnes, comment, ſur-tout pour Paris, accorder ces trois faits comme inconteſtables, avec la dépravation exceſſive des mœurs, avec le luxe, la débauche, qui règnent dans les capitales ? Pour les provinces eſt-il plus facile de concilier les faits avec la misère qui y eſt répandue généralement: Car ſans oſer convenir de ces maux, parce qu'ils ſont trop fâcheux, il n'eſt cependant pas poſſible de nier ici les apparences pour les premiers reproches, & de paſſer ſur le bruit public pour le dernier. Comment enfin, ſe perſuader de cette population vivace dans Paris, à laquelle on objecte encore quelquefois la conſtitution délicate, valétudinaire de la génération actuelle, nullement comparable, ſelon le dire de quelques perſonnes, en force & en vigueur, aux habitans de cette même capitale, dans le ſiècle dernier, ou tout au moins, fort inférieure aux habitans de la campagne.

Ces différens fléaux réunis, ſuffiſent pour faire ſouffrir un dépériſſement notable dans l'eſpèce, & pour répandre au moins un doute très-fondé ſur la réalité de l'eſpèce de fait

physique relatif à la population, dont nous croyons pouvoir nous féliciter avec des Écrivains estimables; les observations que ces vices fournissent contre les conclusions de ce Mémoire, ne sont point sans valeur, elles méritent, par cette raison, d'être traitées & approfondies sérieusement.

La discussion, dont quelques-unes sont susceptibles, n'est pas de ma compétence; le sujet ne pouvoit manquer de se trouver du goût de quelques personnes en état de s'en acquitter mieux que je ne pourrois le faire; il vient d'être traité, d'une manière intéressante, par M. Moheau *(t)*; d'ailleurs, ce qui touche le physique sur ce point, doit seul m'occuper; je ne suis à portée d'assigner que les causes de santé, qui ont pu concourir à tout ce qui en forme les apanages, & que mon état me met à même d'apprécier. L'Auteur de la lettre qui m'a été adressée dans le Mercure de France, en 1777, M. Moheau, dans l'Ouvrage qu'il vient de publier, & d'autres Auteurs, en ont déjà aperçu plusieurs; je crois pouvoir y en ajouter quelques-unes, qui ne se sont point encore présentées à l'idée des personnes qui ont fourni leurs vues sur ce sujet; cet article peut former à part la matière d'un Mémoire, j'attendrai, pour le communiquer dans nos Séances particulières, que la publication de celui-ci ait mis l'objet à même d'être encore plus éclairci, infirmé ou constaté de nouveau par quelques observations ultérieures, dont je n'ai pas de connoissance quant à présent.

(t) Qui satisfait en grande partie aux questions importantes, politiques, morales & physiques, dépendantes de cette recherche particulière, & qui peuvent servir de base à une opinion vraisemblable sur les causes générales de la population.

OBSERVATION SUR UN ACIDE GLACIAL,

Obtenu par la diſtillation d'un mélange d'Acide nitreux fumant & de Charbon embraſé & réduit en poudre.

Par M. CORNETTE.

MRS LAVOISIER & BUCQUET, ont préſenté à l'Académie, il y a quelques jours, un flacon d'huile de vitriol glacial, retiré à un très-grand feu, de la décompoſition du nitre par le colcotar. Comme les expériences que je préſente aujourd'hui, quoique faites d'une manière différente, paroiſſent ſe rapprocher beaucoup de celle de ces Académiciens, je crois devoir mettre cette note en tête de cette Obſervation, déclarant ne vouloir point leur enlever l'honneur de leur découverte, mais prenant occaſion de-là, de faire part à l'Académie d'un travail fait depuis long-temps ſur cet objet, que je ne comptois pas lui communiquer ſitôt.

OBSERVATION.

J'AI parlé dans le Mémoire que j'ai lû l'année dernière à l'Académie, ſur le Sel ammoniacal nitreux, de la diſtillation de l'acide nitreux ſur le charbon; j'ai démontré que cette ſubſtance ne ſouffroit pas d'altération marquée de la part de cet acide, puiſqu'après cette opération elle avoit conſervé ſa couleur noire, & ſon inflammabilité : comme je ne m'étois ſervi pour faire cette expérience que du charbon ordinaire, je réſolus quelque temps après de la répéter de nouveau, mais avec du charbon bien ſec, c'eſt-à-dire, avec du charbon embraſé réduit en poudre ſur le champ, & de l'acide nitreux fumant, préparé ſelon la méthode de Glauber, perſuadé que je retirerois de cette ſeconde expérience, faite de cette manière,

quelques résultats différens de la première: le succès surpassa mes espérances, car je ne m'attendois pas à obtenir d'un pareil mélange, un produit semblable à celui que je vais décrire.

Je mis dans une cornue de verre un gros de charbon ainsi préparé, sur lequel je versai une once d'acide nitreux fumant; ce mélange s'échauffa beaucoup, & fit monter le thermomètre de 25 degrés au-dessus de la glace, la température étant ce jour-là à 10; je plaçai cette cornue sur un bain de sable, au col de laquelle j'ajustai une alonge ou cylindre de verre, dont l'extrémité entroit dans un récipient qui pouvoit contenir environ dix pintes d'eau; je laissai ce mélange en digestion du soir au matin, pour que le charbon fût mieux pénétré par l'acide; pendant ce court espace de temps, ce dernier s'étoit un peu coloré, & avoit dissout une petite portion de charbon; je procédai ensuite à la distillation par une chaleur fort douce, il se dégagea presque aussitôt beaucoup de vapeurs rutilantes, qui obscurcirent les vaisseaux; je conduisis le feu avec beaucoup de ménagement, afin de mieux examiner ce qui se passeroit pendant cette distillation; lorsque l'acide fut passé entièrement, ce que je reconnus facilement par l'éclaircissement de l'alonge, j'aperçus qu'il s'élevoit du fond de la cornue, une poudre blanche très-fine & très-subtile, qui, en s'attachant à ses parois, formoit la cristallisation la plus belle & la plus agréable qu'on puisse voir; une partie étoit disposée en longues aiguilles, & l'autre représentoit des rinceaux, charmans par leur arrangement: je me hâtai de déluter les vaisseaux, parce que je commençois à m'apercevoir, à la vérité un peu trop tard, que cette matière se liquéfioit facilement par la chaleur plus forte que j'avois donnée, & qu'elle se confondoit avec la liqueur contenue dans le récipient; je recueillis de cette substance, à l'aide d'un tube de verre, le plus qu'il me fut possible, que je renfermai dans un flacon très-sec, car autrement elle se seroit convertie en liqueur; je passai de l'eau distillée sur l'autre portion qui étoit restée dans l'alonge, & que je n'avois pu détacher,

détacher, il se fit aussi-tôt un bouillonnement assez considérable avec dégagement de vapeurs d'acide nitreux, & cette dissolution, faite dans de justes proportions, rendit sur le champ l'eau d'une belle couleur bleue, comme celle qui résulte d'un mélange d'acide nitreux & d'eau, ainsi que l'ont démontré plusieurs habiles Chimistes; je fis évaporer dans une capsule de verre, la portion qui avoit été dissoute, elle laissa dégager, dans les premiers momens, une forte odeur d'acide nitreux, mais il me parut que cet acide y adhéroit fort peu, puisqu'à peine la liqueur fut-elle bien échauffée, qu'il ne s'en dégagea plus aucune. Je continuai l'évaporation jusqu'à la consomption presque totale de l'humidité, il me resta au plus cinq ou six gouttes de liqueur très-acide, sans odeur, que je reconnus pour de l'acide vitriolique, par la combinaison que j'en fis avec les cristaux de soude: cet acide glacial, contenu dans le flacon, se liquéfie très-facilement à une douce chaleur, & offre un spectacle assez agréable; le flacon, qui est clair & transparent, se remplit aussi-tôt de vapeurs rouges, & les vapeurs disparoissent presqu'entièrement lorsque cette substance a repris sa solidité. Il y a plus de deux ans que M. de Lassone a été témoin de cette expérience, & il y a au moins dix-huit mois que M. le Comte de Milly, de cette Académie, se trouvant à Versailles, je la lui répétai avec le même succès: cet acide glacial, exposé sur les charbons ardens, se dissipe en vapeurs blanches, s'échauffe & bouillonne avec l'eau, & si on le combine dans cet état de siccité avec l'alkali fixe, on en retire bien à la vérité du tartre vitriolé, mais il se trouve toujours mêlé avec un peu de nitre; je crus donc, d'après cet examen, pouvoir regarder cet acide comme un acide vitriolique glacial, uni à une portion d'acide nitreux, mais rendu ainsi glacial par le gaz ou l'air fixe qui s'étoit dégagé du charbon. Ce qui étaye ma conjecture, c'est qu'en employant séparément de l'acide nitreux très-pur, ou de l'huile de vitriol, on n'en obtient point; preuve non équivoque que le concours de l'acide nitreux est essentiel à la production de cet acide; il est donc visible que cette huile de vitriol glacial que l'on

obtient dans cette opération, ne doit être attribuée qu'à de l'acide vitriolique qui altéroit préliminairement l'acide nitreux fumant que j'avois employé, & dont il est toujours altéré de quelque manière qu'il soit préparé, à moins qu'il ne fût rectifié: cependant, pour m'assurer davantage de ce fait, je résolus de faire l'expérience suivante; je chauffai sur le charbon resté dans la cornue, & qui étoit encore un peu chaud, l'acide que j'avois obtenu, il étoit assez fumant, & paroissoit très-propre pour l'expérience que j'avois projetée; un instant après le mélange, une portion du charbon, par le contact de cet acide, s'embrasa dans la cornue; j'avoue que je fus un peu effrayé de cet embrasement si subit, & que dans l'incertitude où j'étois de voir arriver une explosion, je balançai si je devois jeter la cornue, mais la curiosité l'emporta, & ma crainte s'évanouit promptement, car peu de temps après l'ignition cessa. Je ferai observer que tout cela se passa sans mouvement, & que la chaleur fut très-peu considérable; je procédai à la distillation avec un appareil semblable à celui de la première expérience, mais il ne s'attacha point aux parois de l'alonge de cet acide glacial, parce que l'acide nitreux que j'avois employé ne contenoit plus d'acide vitriolique, & en avoit été dépouillé entièrement dans cette première distillation; le charbon resté dans la cornue me parut différer un peu du précédent, il étoit divisé par petites masses, & la portion qui avoit été en contact avec les parois de ce vaisseau, en avoit pris le luisant & le poli: il est donc constant que la production de cet acide ne dépend que de l'acide vitriolique contenu dans l'acide nitreux, & que lorsqu'il en est dépouillé il n'en fournit plus. Mais réfléchissant sur ce qui venoit de se passer dans cette experience, je crus devoir examiner si l'acide nitreux coopéroit essentiellement à la production de cet acide, ou si avec de l'acide vitriolique seul je pourrois obtenir les mêmes résultats; je répétai pour cet effet une expérience déjà connue, indiquée dans la préface du Manuel de Chimie de M. Baumé, c'est-à-dire, je distillai de l'acide vitriolique concentré sur du charbon

en poudre; les résultats furent les mêmes que ceux indiqués par cet habile Chimiste, mais je ne retirai point de cette expérience l'acide glacial, qui avoit été l'objet de mes recherches. Je fis cette expérience de plusieurs manières, tantôt j'employai moins de charbon, tantôt des matières phlogistiques d'une autre nature, mais je ne retirai rien qui pût répondre à mon but; quoique cette expérience ne m'ait point réussi, elle me conduisit à en faire une autre, dans la vue de m'assurer si le charbon lui-même contribuoit essentiellement à la formation de cet acide glacial, ou si avec l'acide nitreux seul & l'acide vitriolique, je pourrois également en obtenir.

Je mis dans une cornue de verre quatre gros d'acide nitreux fumant, & autant d'huile de vitriol concentré, les vapeurs rutilantes furent aussi-tôt absorbées par l'acide vitriolique, & l'acide nitreux, qui étoit très-coloré, devint, par le mélange, clair & limpide; la distillation ne m'offrit rien de particulier, & quoique j'eusse poussé le feu sur la fin avec assez de violence, il ne se fit aucune sublimation aux parois de l'alonge; il me resta dans la cornue environ les trois quarts de l'acide vitriolique que j'avois employé, n'ayant souffert aucune altération; l'acide qui étoit dans le récipient ayant été redistillé de nouveau sur du charbon en poudre, me fournit en très-bonne quantité de l'acide glacial, absolument semblable à celui que j'avois obtenu dans les expériences précédentes; on peut se procurer de cet acide en assez grande quantité, si l'on veut procéder à la distillation dans les proportions de deux gros de charbon, d'un gros d'acide vitriolique concentré, & de trois gros d'acide nitreux fumant; il me restoit encore pour compléter ce travail, une expérience à faire, c'étoit de m'assurer si d'autres matières inflammables que le charbon pourroient convenir également à la production de cet acide glacial; le soufre fut la substance que j'employai, parce qu'étant composé lui-même d'acide vitriolique dans l'état de siccité, je crus qu'il pourroit favoriser cette expérience, & me conduire à quelques nouvelles découvertes.

Je mis dans une cornue de verre deux gros de fleurs de ſoufre avec deux onces d'acide nitreux fumant, je plaçai cette cornue ſur un bain de ſable que je chauffai par degrés, il s'éleva d'abord beaucoup de vapeurs rutilantes qui obſcurcirent bientôt le récipient, je ménageai le feu, & je continuai la diſtillation fort lentement; lorſque la moitié ou environ de l'acide fut paſſée, je délutai le balon, je verſai la liqueur qu'il contenoit dans un flacon de criſtal; cet acide, de jaune qu'il étoit, avoit pris une couleur verte, & avoit entraîné avec lui quelques particules ſulfureuſes qui nâgeoient à ſa ſurface; je continuai la diſtillation juſqu'à ſiccité, l'acide qui paſſa enſuite n'avoit pas acquis la même couleur verte que le premier, il étoit légèrement citrin, & paroiſſoit n'avoir ſouffert aucune altération; le ſoufre reſté dans la cornue avoit perdu un peu de ſa couleur, il étoit encore très-acide, & laiſſoit dégager une forte odeur d'acide ſulfureux *volatil*: comme cette expérience avoit été faite avec de l'acide nitreux mêlé d'acide vitriolique, je réſolus de la répéter de nouveau avec de l'acide nitreux très-pur, afin de m'aſſurer ſi l'acide ſulfureux que le ſoufre avoit laiſſé dégager provenoit ou de l'acide vitriolique contenu dans l'acide nitreux, ou de la décompoſition du ſoufre lui-même; mes doutes furent bientôt éclaircis, car j'obtins du réſidu de cette nouvelle opération, la même odeur d'acide ſulfureux volatil, comme je l'avois eu à l'expérience précédente, ce qui me prouva que l'acide nitreux agiſſoit ſur lui, & le décompoſoit en partie. Je ſuis parvenu, en répétant à pluſieurs repriſes cette opération, à décompoſer preſque totalement le ſoufre, l'acide nitreux ſe chargeoit à chaque cohobation d'acide ſulfureux volatil, & j'ai toujours obtenu conſtamment de ſa combinaiſon avec l'alkali végétal, du ſel ſulfureux de Stalh.

Il réſulte de ces expériences, 1.° que l'acide glacial que l'on obtient de cette opération, n'eſt autre choſe que de l'acide vitriolique qui altéroit préliminairement l'acide nitreux; 2.° que l'acide nitreux lui-même contribue eſſentiellement à la formation de cet acide glacial, puiſque les deux ſubſtances,

employées séparément, ne peuvent point en fournir; 3.° enfin, que c'est du gaz qui se dégage du charbon, & même de celui contenu dans l'acide nitreux, d'où me paroît dépendre la forme concrète que prend cet acide.

OBSERVATION
SUR LE VITRIOL DE MERCURE.

Par M. CORNETTE.

Les Chimistes entendent par Vitriol de Mercure, la combinaison de l'acide vitriolique avec cette substance métallique; mais pour que cette combinaison puisse se faire, elle exige l'action de l'acide vitriolique concentré & bouillant sur le mercure; pour le préparer, on met dans une cornue de verre vingt-quatre onces d'acide vitriolique concentré, sur une livre de mercure coulant; j'ai observé que cette quantité d'acide étoit trop forte, puisque je suis parvenu à faire cette opération avec vingt onces seulement; on fait chauffer par degrés ce mélange, il s'élève d'abord quelques vapeurs blanches, qui ont une forte odeur d'acide sulfureux volatil, il se passe ensuite dans la cornue un bouillonnement ou effervescence assez vive, qui continue à se faire jusqu'à l'entière dissolution du mercure : il se dégage, pendant tout le temps de cette opération, beaucoup d'acide sulfureux volatil, sous forme de gaz, dont une grande partie se dissout dans l'eau, & de laquelle j'ai retiré des cristaux de sel sulfureux de Stalh, en la saturant d'alkali fixe; enfin, il reste au fond de la cornue une masse blanche saline, que l'on appelle *Vitriol de mercure.*

Présenté en 1779. Lû le 14 Juin 1781.

Quelques Chimistes ont avancé que ce sel, exposé dans une cornue, à une chaleur très-forte, se décomposoit, que la plus grande partie du mercure se réduisoit en mercure coulant, & qu'une très-petite partie seulement se sublimoit. Quelque déférence que j'aie pour les Auteurs de cette assertion,

je crois ne devoir pas être entièrement de leur avis, l'expérience m'a démontré que les choſes ſe paſſoient différemment, car j'ai obſervé que ce ſel, expoſé à un feu violent, ſe ſublimoit preſque en entier, & qu'une très-petite partie ſeulement étoit décompoſée.

J'ai mis dans une cornue de verre une demi-once de vitriol de mercure, je l'ai expoſé à un feu violent & capable de faire rougir la cornue, la plus grande partie de ce ſel s'eſt ſublimée au pourtour de ce vaiſſeau, ſans avoir ſouffert aucune altération, il ne s'étoit ſeulement élevé qu'une petite quantité de poudre griſe, qui n'avoit plus beſoin que du frottement pour paroître en mercure coulant, mais il n'en étoit point paſſé dans le récipient que j'avois adapté au col de ce vaiſſeau: j'ai répété quatre fois cette expérience, mais toujours avec les mêmes réſultats, c'eſt-à-dire, que toujours la quantité de vitriol de mercure ſublimé, a excédé en poids celui du mercure revivifié; d'une demi-once de ce ſel métallique, j'ai obtenu conſtamment trois gros de matière ſaline ſublimée, & une poudre griſe, qui, comme je l'ai déjà dit, n'avoit plus beſoin que du frottement pour paroître en mercure coulant; cette expérience, répétée à l'appareil pneumato-chimique, a donné un peu de gaz déphlogiſtiqué & beaucoup d'air acide ſulfureux. Je me ſuis aſſuré, par d'autres expériences que j'ai faites ſur les précipités de mercure, que ſi l'on ſe ſert pour faire le vitriol de mercure, des précipités que l'on obtient de ſa diſſolution, par l'acide nitreux, avec l'alkali fixe ou volatil, il ne paſſe point de mercure coulant, comme à l'expérience précédente, car tout le ſel qui eſt réſulté de cette combinaiſon, s'eſt ſublimé en entier; je crois cependant qu'il eſt des cas où cette expérience pourroit offrir quelques variétés, mais il me ſemble auſſi que cette différence pourroit bien dépendre de la nature des vaiſſeaux, des quantités qu'on auroit employées, & même encore des moyens que l'on auroit pratiqués pour la conduite de cette opération.

MÉMOIRE

Sur la décompofition, par l'acide marin, de plufieurs Sels vitrioliques & nitreux, à bafe métallique.

Par M. CORNETTE.

LES Chimiftes conviennent affez généralement que l'acide marin a par-deffus les autres acides, la propriété de décompofer certains Sels à bafe métallique; à cet égard, on a borné fon action aux métaux blancs, tels que l'argent, le plomb, le mercure & le régule d'antimoine; mais je crois qu'on n'a point cherché à examiner fi l'acide marin étendroit plus loin fon pouvoir, & s'il feroit fufceptible de produire les mêmes altérations fur les autres fels métalliques : les expériences que j'ai faites fur cette matière, m'ont mis à portée de découvrir, que prefque tous les autres fels métalliques étoient foumis à la même loi, & que fi ce phénomène n'a point été aperçu par *Kunckel,* ou par les autres Chimiftes qui ont fuivi fa doctrine, c'eft que ces fortes de décompofitions préfentent plus de difficultés, & exigent, pour y parvenir, des moyens différens de ceux qui ont d'abord été employés.

Lû à l'Académie à l'Affemblée publique le 14 Avril 1779. Relû le 14 Juin 1780.

Les Chimiftes varient encore beaucoup fur les propriétés de l'acide marin, les uns, confidérant la difficulté que cet acide éprouve à fe combiner avec le phlogiftique, ont penfé qu'il n'avoit point ou prefque point d'action fur lui; d'autres, ne calculant la force des acides, que d'après leur pefanteur fpécifique, ont avancé, que fi l'acide vitriolique avoit une action plus marquée fur les corps que les autres acides, cela ne pouvoit dépendre que de ce qu'il étoit fufceptible d'une concentration plus grande: j'ai déjà démontré dans plufieurs Mémoires, que l'acide marin avoit une vraie action fur le phlogiftique, & qu'employé dans le plus grand état de concen-

tration, & tel qu'il eſt dans la liqueur fumante de Libavius, il ne le cédoit en rien à l'acide vitriolique, même le plus concentré: j'ai auſſi prouvé, que quoique l'acide marin ſoit le plus léger des acides minéraux, il n'eſt cependant pas le plus foible par ſon énergie, puiſqu'il décompoſe tous les ſels neutres à baſe d'alkali fixe & volatil; je vais de plus faire connoître que ce même acide, appliqué dans un état de concentration, a pareillement la propriété de décompoſer, preſque ſans exception, tous les ſels à baſe métallique.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Sur l'Or.

LES Chimiſtes connoiſſent tous le peu d'action que les acides minéraux, employés ſéparément, ont ſur ce métal, lorſqu'il a ſon éclat métallique, mais on ſait que lorſqu'il eſt dans l'état de chaux, c'eſt-à-dire, que lorſqu'il a été diſſout & précipité par une ſubſtance alkaline quelconque, il devient dès-lors ſoluble indiſtinctement dans tous les acides; cette diſſolution cependant n'eſt qu'apparente, car il ſe précipite lorſqu'il eſt expoſé à un léger degré de chaleur: j'ai fait précipiter de l'or diſſout dans l'eau régale par de l'alkali volatil, ce précipité, bien édulcoré, s'eſt très-bien diſſout dans l'acide vitriolique affoibli, & dans l'acide nitreux très-pur; ces deux diſſolutions étoient d'un jaune clair, je les ai ſoumiſes à l'évaporation, dans l'eſpérance d'obtenir du vitriol & du nitre aurifère, mais je n'ai pas tardé à m'apercevoir, ainſi que l'a fort bien remarqué M. Lévis, que l'or n'adhéroit que très-foiblement à ces deux acides, puiſqu'il s'eſt précipité entièrement à la première impreſſion de la chaleur, ce qui nous feroit ſoupçonner, avec M. Tillet, que l'or même en chaux n'eſt point diſſout dans les acides, mais qu'il y eſt plutôt dans un état de ſuſpenſion: cette idée paroît conforme à la remarque qu'a faite M. Schœffer dans ſon Mémoire ſur le Départ, imprimé dans le Recueil de l'Académie de Stockolm, *Tr. fr. p. 299*, que l'eau-forte, dans le départ,
peut

peut dissoudre une portion d'or, mais qu'il faut pour cela qu'elle soit très-concentrée, & contenue dans des vaisseaux bien bouchés, car, dit-il, aussi-tôt que l'on vient à secouer une eau-forte, qui a ainsi dissout de l'or, & lorsqu'elle prend le contact de l'air, l'or se précipite.

Le peu d'adhérence que l'or a avec les acides, ne m'ayant pas permis d'obtenir les sels que je m'étois proposé de faire, on sent bien qu'il ne m'a pas été possible de tenter, avec l'acide marin, les expériences que j'avois projetées.

Deuxième Expérience.

Sur la Platine.

Le précipité de platine, par l'alkali fixe, présente à peu-près le même phénomène que l'or, relativement à l'acide vitriolique, la dissolution s'en fait très-bien dans cet acide, mais le métal n'y reste point, & se précipite entièrement pendant l'évaporation; il n'en est pas de même de l'acide nitreux, la platine y adhère davantage, car la chaleur n'a point altéré cette dissolution, de laquelle j'ai retiré un sel en petits cristaux rougeâtres, à peu-près comme des grains de sable.

J'ai fait diverses expériences pour tâcher de faire tenir la platine à l'acide vitriolique, afin de me procurer du vitriol de platine; le procédé qui m'a le mieux réussi, a été d'employer le précipité de platine obtenu par l'alkali minéral, ce qui m'a mis à portée de faire une expérience, dont M. Margraff nie la possibilité: ce célèbre Chimiste, dans sa Dissertation sur la Platine, deuxième volume de ses Opuscules, *Tr. fr. page 253*, dit que l'alkali minéral ne précipite point la platine dissoute dans l'eau régale; ce phénomène a lieu pourtant jusqu'à un certain point, puisqu'on est maître d'obtenir, à volonté, un précipité abondant, ou une liqueur claire & limpide. Voici en quoi consiste cette manipulation: si l'on verse sur une dissolution de platine affoiblie, de l'alkali minéral en liqueur, il ne se fera point de précipité, parce

qu'à mesure qu'il se forme il est redissout par le gaz ou air fixe qui se dégage de l'effervescence qui résulte de ce mélange, au lieu que si l'on emploie une dissolution de platine saturée & bien rapprochée, il se forme sur le champ un précipité très-abondant, & qui, faute d'eau, ne peut se redissoudre dans la liqueur ; on parvient facilement à le dépouiller par le lavage des substances salines qu'il contient, pourvu, toutefois, qu'on ait eu l'attention de l'exposer quelque temps à l'air, afin de faciliter le dégagement du gaz : quoi qu'il en soit, le précipité de platine, obtenu de cette manière, est plus soluble dans les acides, & paroît y adhérer davantage que le précipité ordinaire; je suis parvenu à faire avec ce précipité un vitriol de platine, très-déliquescent à la vérité, mais suffisant cependant pour faire mon expérience.

Sur une partie de vitriol & de nitre de platine, j'ai versé trois parties d'acide marin fumant, cet acide étoit très-pur, il pesoit neuf gros vingt-quatre grains, dans une bouteille qui contenoit juste une once d'eau distillée; la dissolution de ces sels s'est très-bien faite dans cet acide bouillant, & lui a communiqué une couleur jaune, comme celle d'une dissolution d'or. La liqueur où étoit le vitriol de platine, refroidie, a donné un sel un peu déliquescent, & qui avoit l'acide marin pour base, tandis que le nitre de platine a refusé de donner des cristaux, parce qu'il s'étoit formé de l'eau régale qui est le vrai dissolvant de ce métal.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Sur le Vitriol & le Nitre cuivreux.

JE ne m'arrêterai point ici à décrire les moyens dont je me suis servi pour obtenir ces sels, car il n'est aucun Chimiste qui ne sache que pour dissoudre le cuivre par l'acide vitriolique, il faut employer ce dernier concentré & bouillant; je ferai seulement observer à l'égard du nitre cuivreux, que c'est une erreur de penser que ce sel ne cristallise point : j'en conserve depuis plus de six ans en cristaux bien distincts, la plupart

ſont alongés & de forme carrée, & d'autres en lames plates: ce ſel attire puiſſamment l'humidité de l'air, & ne peut ſe maintenir en bon état que dans une bouteille bien bouchée; le procédé pour le faire criſtalliſer eſt ſimple, il conſiſte à prendre une diſſolution de cuivre par l'acide nitreux, de la mettre dans une cornue de verre, & de diſtiller juſqu'à la diminution des trois-quarts ou environ de l'humidité, de laiſſer enſuite refroidir ce vaiſſeau ſans le déluter; pour l'ordinaire, on obtient de cette manière, de très-beaux criſtaux bleus, ſemblables à ceux dont je viens de parler; ſi au contraire on fait évaporer la diſſolution de cuivre à l'air, on aura beaucoup de peine à la faire criſtalliſer, par la raiſon qu'ayant beſoin d'être très-rapprochée pour fournir des criſtaux, elle en attire l'humidité, & dès-lors la liqueur étant trop étendue, la criſtalliſation ne peut plus avoir lieu, à moins qu'on opère dans un temps où l'air ſoit ſec & froid.

Le vitriol & le nitre cuivreux ſe diſſolvent très-promptement & à froid dans l'acide marin; ſi ſur deux gros de chacun de ces ſels on ajoute ſix gros d'acide, cette quantité ſera ſuffiſante pour que la diſſolution ſoit complète; il ſe paſſe dans l'inſtant aſſez de froid pour faire deſcendre le thermomètre de pluſieurs degrés; pour le vitriol de cuivre il n'a été que de cinq, tandis que le nitre cuivreux l'a fait deſcendre de huit degrés, la température étant ce jour-là à 10 au-deſſus de la glace. Si l'on fait bouillir ces diſſolutions, l'acide marin prend ſur le champ une couleur verte, & l'on obtient du refroidiſſement des liqueurs des criſtaux d'un vert clair, & figurés en aiguilles abſolument ſemblables à ceux qui réſultent de la combinaiſon du cuivre par l'acide marin; ce ſel ſe conſerve très-bien dans les vaiſſeaux fermés, j'en ai même tenu pendant aſſez long-temps expoſé à l'air ſans qu'il ſe ſoit humecté ſenſiblement, & que les criſtaux euſſent perdu leur conſiſtance: ces deux expériences prouvent donc que l'acide marin a plus de diſpoſition à ſe combiner avec le cuivre que n'en ont les autres acides, quoique quelques Chimiſtes aient avancé le contraire, & il a encore à cet égard la ſupériorité

ſur l'acide nitreux, qui, de quelque manière que je l'aie traité avec le vitriol de cuivre, n'a jamais pu le décompoſer.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Sur le Vitriol de Mars & le Nitre martial.

LA même expérience répétée ſur le vitriol de mars, a eu le même ſuccès, l'acide marin s'eſt emparé du fer, & en a chaſſé l'acide vitriolique; cette diſſolution évaporée m'a donné de beaux criſtaux cubiques, ſemblables à ceux que je me ſuis procuré de la combinaiſon immédiate du fer avec l'acide marin. Le plus grand nombre des Chimiſtes avancent que ce ſel n'eſt point ſuſceptible de criſtalliſation, mais c'eſt encore une erreur que l'expérience peut détruire, & je puis aſſurer qu'il criſtalliſe très-bien & avec aſſez de facilité. Ce ſel eſt d'une couleur verte, mais il ſe ternit bientôt à la ſurface, & ſe convertit en liqueur s'il eſt quelque temps expoſé à l'air. La diſſolution du fer par l'acide marin, n'a pas l'inconvénient de la diſſolution du fer par les autres acides, elle a cela de particulier qu'elle ſe conſerve en bon état & ſans donner aucun dépôt.

Le nitre martial a préſenté plus d'obſtacle pour ſa décompoſition, je ſuis cependant porté à croire qu'elle auroit également lieu comme le vitriol de mars, s'il étoit poſſible de l'avoir ſous forme concrète & criſtalline. Je fonde mon opinion ſur ce qu'en diſtillant la diſſolution de fer, rapprochée avec l'acide marin, il s'eſt dégagé beaucoup d'air *nitreux*, & il eſt toujours paſſé dans le récipient de l'eau régale, & ſur ce qu'ayant fait une fois deſſécher la matière, ſans cependant la décompoſer, j'ai obtenu de ſon mélange, avec l'acide marin, un magma rempli de petits criſtaux cubiques que j'ai reconnu pour du ſel marin martial.

L'acide nitreux paroît également avoir plus de priſe ſur le fer que l'acide vitriolique, car le vitriol de mars eſt décompoſé par cet acide; il agit ſur lui avec efferveſcence, & la

liqueur prend ſur le champ une couleur rouge. Cette diſſolution évaporée ne donne plus de criſtaux, mais une matière déliqueſcente analogue à la diſſolution du fer par l'acide nitreux, car j'ai fait beaucoup de tentatives pour obtenir du nitre martial criſtalliſé, mais je n'ai jamais pu y parvenir.

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

Sur le Vitriol & le Nitre de Zinc.

TROIS gros d'acide marin diſſolvent à froid un gros de vitriol de zinc, la diſſolution eſt d'un jaune clair, ſoumiſe à l'évaporation elle ne donne plus de criſtaux, mais elle ſe convertit en un magma comme celui qui réſulte de la combinaiſon de l'acide marin avec ce demi-métal, car ce ſel ne criſtalliſe point. Il eſt viſible, d'après cette expérience, que ſi le vitriol de zinc n'avoit ſouffert aucune altération par l'acide marin, ce ſel auroit conſervé la propriété de criſtalliſer; mais cette difficulté que j'ai éprouvée, & l'examen du réſidu de l'évaporation, m'autoriſe à penſer que le vitriol de zinc a été décompoſé par cet acide. Je ſuis d'autant plus fondé à le croire, que le nitre de zinc traité de même avec l'acide marin, a donné des réſultats en tout ſemblables à ceux de l'expérience précédente. Le nitre de zinc eſt déliqueſcent, il criſtalliſe en longues aiguilles, & on peut le conſerver pendant quelque temps ſi on le renferme dans une bouteille bien bouchée.

Je ferai obſerver que l'acide marin l'emporte encore, à cet égard, ſur l'acide nitreux, car ce dernier n'a point décompoſé le vitriol de zinc, & ne lui a point ôté la propriété de criſtalliſer.

Toutes ces expériences ſe trouvent oppoſées au ſentiment de M. Pott qui a avancé dans ſa Diſſertation ſur le Zinc, que la diſſolution de ce demi-métal n'a aucune prédilection pour les acides vitrioliques & marins.

SIXIÈME EXPÉRIENCE.

Sur le Vitriol & le Nitre cobaltique.

L'ACIDE vitriolique affoibli, n'agit pas ſur le régule de Cobalt, il faut qu'il ſoit concentré & bouillant; & même il eſt néceſſaire que cette diſſolution ſoit faite dans une cornue. On retire de la combinaiſon de cet acide, avec le cobalt, deux eſpèces de criſtaux, (ainſi que l'a remarqué M. Baumé) dont les uns ſont blancs, petits & cubiques, & d'autres plus gros & de couleur fauve.

Si l'on verſe ſur le vitriol cobaltique de l'acide marin, cet acide ſe colore auſſi-tôt en vert, & l'intenſité de cette couleur augmente par la chaleur. Ce ſel ſe diſſout très-bien dans cet acide, on retire de l'évaporation de la liqueur de petits criſtaux verdâtres diſpoſés en aiguilles, & qui attirent puiſſamment l'humidité de l'air. Ces criſtaux ſont les mêmes que ceux qui ſont formés par la combinaiſon immédiate de l'acide marin & du régule de cobalt.

L'acide nitreux diſſout le régule de cobalt avec effervеſcence & ſans le ſecours de la chaleur, j'ai même été obligé d'affoiblir mon acide avec l'eau diſtillée pour qu'elle fût moins forte. La diſſolution étoit de couleur cramoiſi-ſale, elle m'a donné par l'évaporation des criſtaux roux & formant des priſmes carrés longs, mais aucuns n'étoient diſpoſés en aiguilles. Ce ſel ſe diſſout très-bien dans l'acide marin, & lui communique ſur le champ une couleur verte. Je ferai remarquer que dans toutes les diſſolutions de cobalt, faites par l'un ou l'autre acide, l'acide marin prend toujours cette couleur; on peut la faire diſparoître & reparoître à volonté: ſi l'on fait chauffer le mélange, la couleur diſparoît, & ſi l'on ajoute un peu d'acide marin elle reparoît ſur le champ. Comme le régule de cobalt eſt ſoluble également dans l'eau régale que dans l'acide nitreux, on ſent bien qu'on a plus de peine à obtenir des criſtaux de ſel marin cobaltique.

Cependant ayant fait bouillir le nitre cobaltique avec l'acide marin, & ayant fait rapprocher la liqueur, j'ai vu avec plaisir qu'une portion du nitre cobaltique avoit été décomposée, car j'ai reconnu les mêmes cristaux que ceux qui me servoient d'objet de comparaison, c'est-à-dire que ceux que j'avois obtenus de la dissolution du régule de cobalt par l'acide marin.

J'ai fait aussi une nombreuse suite d'expériences sur l'étain & le bismuth. La difficulté que l'on éprouve à dissoudre l'étain par les acides vitrioliques & nitreux, & l'impossibilité de former des sels d'étain avec ces deux acides, ne m'ont pas permis d'essayer l'acide marin. Je pense cependant qu'ils auroient été décomposés comme les autres par cet acide, si l'on considère que l'acide marin est le seul vrai dissolvant de l'étain, & celui qui fournit, avec ce métal, un sel cristallisable.

Le bismuth ne se dissout point dans l'acide vitriolique, quelque concentré qu'il soit, il le calcine si on l'expose à une chaleur violente, & la masse qui reste dans la cornue n'est point ou presque point soluble dans l'eau. On parvient cependant à en faire une combinaison plus intime lorsqu'on l'emploie très-divisé, & tel qu'il a été précipité de sa dissolution dans l'acide nitreux par l'alkali fixe, je pris une certaine quantité de bismuth ainsi précipité & non lavé, que je versai sur de l'esprit de vitriol bouillant, il se fit une effervescence, mais qui ne fut occasionnée que par une portion d'alkali qui étoit restée avec la poudre. La chaux de bismuth fut par ce moyen totalement dissoute, & la liqueur en refroidissant laissa déposer des cristaux que je nommerai *vitriol de bismuth*.

J'ai fait bouillir de l'acide marin sur du vitriol, & du nitre de bismuth, mais quelque tentative que j'aie pu faire, je n'ai pu parvenir à le décomposer; le nitre de bismuth s'est bien dissout à froid dans l'acide marin, il a formé une dissolution claire qui a eu de la peine ensuite à cristalliser. Mais

ayant rapproché un peu la liqueur, une grande partie de l'acide marin s'eſt diſſipé, & j'ai retiré des criſtaux de nitre de biſmuth, comme ceux que j'avois eu auparavant. Cette expérience paroît confirmer l'opinion de M. Monet, lorſqu'il avance, dans ſon Traité ſur la Diſſolution des métaux, que le biſmuth eſt indifférent aux acides, qu'il ne marque pas plus de prédilection pour l'un que pour l'autre, & que s'il y avoit un acide qu'il dût préférer, ce ſeroit l'acide du nitre, comme étant celui qui le diſſout le mieux.

Il réſulte de ces expériences, que l'acide marin conſerve ſur les ſels à baſe métallique, la même propriété que ſur ceux à baſe d'alkali fixe & volatil, & qu'à tous égards, il doit avoir la prééminence ſur les autres acides, puiſqu'il agit avec plus d'énergie qu'eux ſur tous les ſels.



OBSERVATION

OBSERVATION
SUR LES DIFFÉRENS SELS
Que l'on retire par la lixiviation des cendres du Tamaris, pris & coupé en différens lieux.

Par M. CORNETTE.

C'ÉTOIT autrefois un axiome en Chimie, que toutes les Plantes incinérées fournissoient de l'alkali fixe par leurs lixiviations dans l'eau. Ce sentiment a été long-temps adopté par les modernes, lorsqu'enfin M. Montet, de la Société Royale des Sciences de Montpellier, découvrit que cette loi n'étoit pas générale, & que plusieurs Plantes faisoient exception à cette règle. Ce fut le tamaris qui lui fit faire cette remarque; il prouva par des expériences bien faites, que cette plante brûlée, au-lieu de donner, par l'incinération, de l'akali fixe, comme on avoit toujours cru jusqu'alors, ne fournissoit au contraire que du sel de Glauber, ainsi qu'on peut s'en assurer par la lecture du Mémoire de ce Chimiste, inséré parmi ceux de l'Académie, pour l'année 1757. Présenté en 1779. Lû le 14 Avril 1780.

Favorisé par la circonstance, je crus devoir profiter de mon séjour à Montpellier, pour répéter les expériences de M. Montet; ce n'étoit point que je doutasse de leur réalité, puisque d'autres Chimistes que moi les avoient faites; mais soit qu'ils n'aient pu préparer eux-mêmes leurs cendres, soit qu'ils n'aient pu varier leurs expériences sur différens tamaris, il paroît qu'ils se sont bornés à suivre en tout point l'observation de M. Montet, en avançant, comme lui, que les cendres de cette plante lessivée, ne sont point alkalines, & qu'elles ne donnent que du sel de Glauber, sans s'étendre davantage sur la nature des différens sels que l'on en retire.

Mon principal but, en entreprenant ce travail, n'a donc pas tant été de m'assurer si cette plante incinérée fourniroit

par la lixiviation de l'alkali, que d'examiner si le sel de Glauber étoit le seul & unique sel contenu dans ces cendres, & de déterminer si cette plante prise à des distances éloignées de la mer, donneroit toujours le même sel, ou si elle n'offriroit pas des variétés dépendantes du sol où elle auroit été cultivée.

Sur la fin du mois d'Août 1778, je fis couper en différens endroits une assez bonne quantité de tamaris, une partie avoit été prise dans les environs d'Aiguemortes & de Maguelonne, pays situé sur les bords de la mer; l'autre partie avoit été cueillie à quelque distance d'un village appelé *Grabelz*, éloigné à trois lieues au moins de la mer. Je fis brûler avec soin, & séparément ces plantes que j'avois fait dessécher auparavant, & lorsqu'elles furent totalement converties en cendres, je fis sur chacune les expériences suivantes:

Je soumis à l'ébullition, dans une suffisante quantité d'eau distillée bouillante, ces cendres ainsi préparées, je les lessivai à plusieurs reprises, afin d'extraire tout le sel qu'elles contenoient. Les liqueurs filtrées passèrent claires & limpides, elles avoient toutes une saveur salée amère, mais elles n'avoient rien de caustique, car elles ne laissoient sur la langue aucune impression d'alkalicité : soumises à l'évaporation, je retirai de celles d'Aiguemortes & de Maguelonne, plusieurs espèces de sels; 1.° beaucoup de sélénite; 2.° une bonne quantité de sel de Glauber; 3.° du sel marin; 4.° enfin, du sel marin à base terreuse. Cependant ayant eu occasion depuis peu de répéter cette expérience sur des cendres de tamaris qui avoit été coupé aux environs de Maguelonne, j'ai retiré de celles-ci, outre les sels dont je viens de parler, une petite quantité de tartre vitriolé, ce que je n'avois point aperçu dans ma première expérience. Cette différence pourroit peut-être bien provenir aussi de l'âge ou de la saison dans laquelle on aura cueilli cette plante, car Boulduc a assez bien fait connoître que la bourache qui ne donne que du tartre vitriolé, prise dans un âge tendre, fournit du nitre dans un âge plus avancé.

La lessive des cendres de *Grabelz*, évaporée, me donna également beaucoup de sélénite; mais autant les autres cendres m'avoient donné de sel de Glauber, autant celles-ci me fournirent de tartre vitriolé, de sorte que je retirai presque tout de ce dernier sel, à l'exception cependant d'une bien petite quantité de sel de Glauber, qui cristallisa sur la fin, & qui se trouvoit mélé de sel marin, & de sel marin à base terreuse. On peut déduire, ce me semble, de cette expérience, que le sel de Glauber n'est point un sel particulier au tamaris, & même je crois pouvoir être en droit d'avancer que si cette plante étoit ramassée à des distances très-éloignées de la mer, elle ne donneroit plus aucun indice de ce sel; c'est ce que je vais faire connoître par l'expérience suivante.

Aussi-tôt mon arrivée à Paris, je cherchai à me procurer du tamaris; M. Chalard, Apothicaire de M. le Duc d'Orléans, & amateur zélé de la Chimie, voulut bien seconder mes vues, & me fit remettre la quantité de tamaris qu'il me falloit pour faire mon expérience. Cette plante avoit été cueillie sous ses yeux au jardin des Apothicaires; je la brûlai avec soin, & après avoir fait calciner la cendre pendant quelque temps, je la lessivai dans l'eau distillée bouillante. La liqueur filtrée soumise à l'évaporation, me donna comme aux autres expériences beaucoup de sélénite, mais je ne retirai plus de celle qui me restoit que du tartre vitriolé, & sans aucun indice de sel de Glauber; ce qui prouve, comme je l'ai déjà remarqué, que les sels des plantes peuvent varier beaucoup, selon le terrein où elles auront été cultivées *.

Les expériences que je viens d'exposer sur les cendres de tamaris, m'autorisent à penser, que M. Montet, & après

* Quoique cette expérience soit, pour le fond, différente de celle de M.rs du Hamel & Cadet, sur l'alkali végétal que fournit le kali ou varech, lorsqu'il est cultivé dans des endroits éloignés de la mer, néanmoins j'ai cru devoir en faire mention, afin de rendre à ces habiles Chimistes ce qui leur appartient, me réservant d'entrer sur cet objet dans un plus long détail, dans un Mémoire que je lirai dans son temps à l'Académie, sur cette question, *Si les sels neutres des plantes entrent dans la végétation sans se décomposer !*

lui le Chevalier du Coudray, ont été induits en erreur, lorſqu'ils ont avancé que ces cendres qui de tout temps ont été employées avec ſuccès en Languedoc & en Provence pour le lavage des eaux mères du ſalpêtre, ne contribuoient en rien à la régénération de ce ſel; ils penſoient qu'elles ne produiſoient d'autre avantage que celui de dégraiſſer les eaux mères, & à faciliter l'extraction du nitre qu'ils prétendoient exiſter tout formé dans ces eaux. Pluſieurs Chimiſtes avoient déjà adopté cette opinion, mais il me ſemble qu'ils n'ont été trompés que parce qu'ils n'ont pas bien connu les différens ſels que l'on en retire, & les effets qu'ils ſont capables de produire. En effet, de ce que l'on n'obtient point par la lixiviation des cendres du tamaris aucun indice d'alkalicité, doit-on en conclure qu'elles ne contribuent point à la régénération du ſalpêtre? c'eſt ce que l'expérience ne confirme point.

Je pris deux onces de cendres de *Grabelz*, ſur leſquelles je verſai une demi-once d'eau-mère du nitre, je délayai ce mélange avec ſuffiſante quantité d'eau tiède, & après quelque temps de digeſtion, je filtrai la liqueur, ſoumiſe à l'évaporation dans une capſule de verre, juſqu'à la diminution des trois quarts ou environ; elle me donna par le refroidiſſement de beaux criſtaux de nitre priſmatique. On m'objectera peut-être que l'eau-mère que j'avois employée, provenant des travaux des ſalpêtriers, contenoit encore du nitre, & que cette expérience n'eſt point ſuffiſante pour établir mon aſſertion. Pour détruire cette objection, j'ai fait l'expérience ſuivante.

Je fis artificiellement du nitre à baſe terreuſe, c'eſt-à-dire, je ſaturai une quantité donnée d'acide nitreux, avec de la craie en poudre; je mêlai de cette liqueur, ainſi préparée & filtrée, avec la même quantité de cendres de tamaris de *Grabelz*, & j'obtins, comme à l'expérience précédente, une bonne quantité de nitre priſmatique.

J'ai répété la même expérience avec les cendres de tamaris coupé aux environs d'Aiguemortes & de Maguelonne,

le ſuccès n'a pas été le même, car je n'ai pu retirer de ces mélanges aucun indice de nitre priſmatique.

Il réſulte des expériences que je viens de rapporter, qu'il n'eſt point indifférent de ſe ſervir, pour le lavage des eaux-mères du ſalpêtre, des cendres de tamaris, de l'une ou de l'autre eſpèce; il eſt aiſé de ſentir, pour les raiſons que nous avons déjà données précédemment, que celles qui contiennent du tartre vitriolé, ſont infiniment plus avantageuſes, & qu'elles produiſent, à l'égard des eaux-mères, le même effet que ſi elles étoient alkalines. En 1775, j'avois déjà avancé dans un Mémoire qui a concouru au Prix que l'Académie a propoſé ſur le ſalpêtre, & que j'ai publié depuis, que c'étoit relativement aux doubles décompoſitions qui ſe paſſent pendant la lixiviation & l'ébullition des eaux ſalpêtrées, que l'on ne trouvoit jamais dans les eaux-mères ce ſel, ni tartre vitriolé, ni ſel de Glauber; la circonſtance exigeoit que je ne m'étendiſſe pas davantage ſur cet objet, mais ce que j'en ai dit étoit bien ſuffiſant, ce me ſemble, pour prouver que je connoiſſois déjà l'action des doubles affinités, & la décompoſition que le nitre à baſe terreuſe & le ſel marin à baſe terreuſe, exerce ſur le tartre vitriolé & le ſel de Glauber. J'avois annoncé en 1774, un Mémoire plus étendu ſur cette matière que j'ai relû, il y a quelque temps, à l'Académie, & dans lequel j'ai démontré que non-ſeulement le ſel marin à baſe terreuſe décompoſe le tartre vitriolé, mais qu'il a auſſi la faculté de décompoſer le nitre lui-même, circonſtance qui explique pourquoi on retire toujours du ſel marin juſqu'au dernier moment de l'évaporation de la liqueur qui tient le ſalpêtre en diſſolution.



DESCRIPTION D'UN ASTÉRÉOMÈTRE OU INSTRUMENT

Destiné à trouver graphiquement l'heure du lever & du coucher d'un Astre, dont on connoît la déclinaison & l'instant du passage par le Méridien.

Par M. JEAURAT.

Lû à l'Académie le 17 Fév. 1776.

LA néceſſité de faire promptement les Calculs aſtronomiques de l'état du ciel, nommés *Connoiſſance des Temps* ou *Connoiſſance des mouvemens céleſtes*, m'a fait naître l'idée d'abréger la durée des calculs, & ſur-tout de ceux qui n'exigent pas une grande préciſion; or, la détermination de l'heure du lever & du coucher des Aſtres eſt preſque toujours dans ce cas, & alors l'Aſtéréomètre que je propoſe, ſuffit pour cet effet; & quand il eſt orienté par rapport à l'heure du paſſage au Méridien, & par rapport à la déclinaiſon de l'Aſtre, il préſente à la fois & à vue les inſtans du lever & du coucher demandés, ſans avoir beſoin d'additionner & de ſouſtraire l'arc ſemi-diurne de l'heure du paſſage de l'Aſtre par le Méridien; l'occaſion que j'ai eu de m'entretenir de ce nouvel inſtrument, avec M. le Marquis de Courtanvaux, à Montmirail, m'a procuré l'agréable ſurpriſe de recevoir de cet Honoraire de l'Académie Royale des Sciences, l'inſtrument conſtruit de ſa propre main, & l'inſpection de la figure ſuffit preſque pour indiquer la conſtruction de mon Aſtéréomètre, ainſi je vais me borner à l'explication ſuccincte que voici.

L'Aſtéréomètre conſiſte en trois pièces, qui toutes trois peuvent être de carton, ou de bois, ou de cuivre, ſelon le plus ou le moins de ſolidité qu'on veut lui donner, mais

étant conſtruit partie en bois & partie en cuivre, il a toute l'exactitude qu'on peut deſirer.

La première pièce *AadD*, eſt rectangulaire & parallélogramique; elle contient deux rainures parallèles *EF, HG*, deſtinées à recevoir une couliſſe *IKLM*, que je nomme ſeconde pièce; de plus, cette première pièce a un enfoncement circulaire *MNOP*, deſtiné à ſervir d'emplacement à la troiſième & dernière pièce.

Selon feu M. le Marquis de Courtanvaux, les deux premières pièces doivent être d'un vieux bois entièrement à l'abri du déverſement; quant à la troiſième & dernière pièce dont il va être parlé, il paroît indiſpenſable qu'elle ſoit en cuivre ſi on veut qu'elle ſoit bonne & durable.

La troiſième & dernière pièce *MNOP* eſt un plateau circulaire & mobile ſur ſon centre *C*, qui ſe place dans l'enfoncement *MNOP* qui a été, comme on l'a dit, pratiqué dans la première pièce *AadD*, ce plateau circulaire & mobile ſur ſon centre a ſa ſuperficie ſupérieure, d'araſement au niveau *EFG.h*, ſur lequel gliſſe à volonté la couliſſe ou ſeconde pièce *IKLM*; de plus la circonférence du cercle tracé ſur la ſuperficie de la troiſième pièce mobile *MNOP* eſt diviſée en vingt-quatre parties égales, qui repréſentent les vingt-quatre heures de la journée, & chacune des heures eſt ſous-diviſée en minutes ou de deux en deux ou de cinq en cinq minutes, ſelon qu'on le juge à propos; ces diviſions ſont naturellement les arcs ſemi-diurnes des Aſtres.

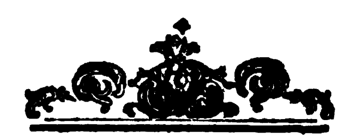
Au point *N*, milieu de *FG* ſur la première pièce *AadD*, eſt un index fixe qui ſert à orienter convenablement le cercle mobile *MNOP*, c'eſt-à-dire, qu'on doit faire cadrer l'heure du cercle mobile qui répond au paſſage donné de l'Aſtre par le méridien avec l'index fixe *N*.

D'une autre part, on marque ſur les plates-bandes ſupérieures *Aa*, *Hd* de la première pièce, la gradation des déclinaiſons qui ſervent à placer la couliſſe, eu égard à la déclinaiſon donnée de l'Aſtre.

Ayant donc orienté le cercle mobile, ou la troiſième pièce

PMNO, de manière que l'heure du passage de l'Astre réponde à l'index fixe *N*, & ayant fait glisser la seconde pièce *IKLM* dans les coulisses *EF*, *hG*, de manière à ce que les extrémités *K* & *L* du bizeau *KL*, répondent à droite & à gauche aux divisions de la déclinaison donnée. Alors le bizeau *KL* traverse les divisions des heures marquées sur la troisième pièce précisément en *M* à l'heure du lever, & en *O* à l'heure du coucher demandé. D'où l'on voit que la manière de mouvoir cet instrument se réduit à orienter le cercle mobile, par rapport à l'heure du passage de l'Astre par le méridien, & la seconde pièce *IKLM*, par rapport à la déclinaison donnée de ce même Astre.

Pour ce qui concerne la manière de graduer l'échelle des déclinaisons, tant australes que boréales, le mécanisme en est tout simple, & la table des arcs semi-diurnes qu'on suppose toute calculée, présente naturellement le tableau de la graduation demandée (*Connoissance des Temps, année 1782, p. 306*). Par exemple, supposons qu'à 30 degrés de déclinaison australe, on ait sous la latitude de Paris un arc semi-diurne *NS* de $3^h\ 20'$, ou de 50 degrés, dont le complément *SV* est de 40 degrés; alors on marquera 30 degrés de déclinaison australe en faisant *VX* égale au sinus de 40 degrés du cercle; donc *cN*, ou *cP* est le rayon, & c'est ainsi qu'on graduera l'échelle des déclinaisons, requise sur ledit instrument.

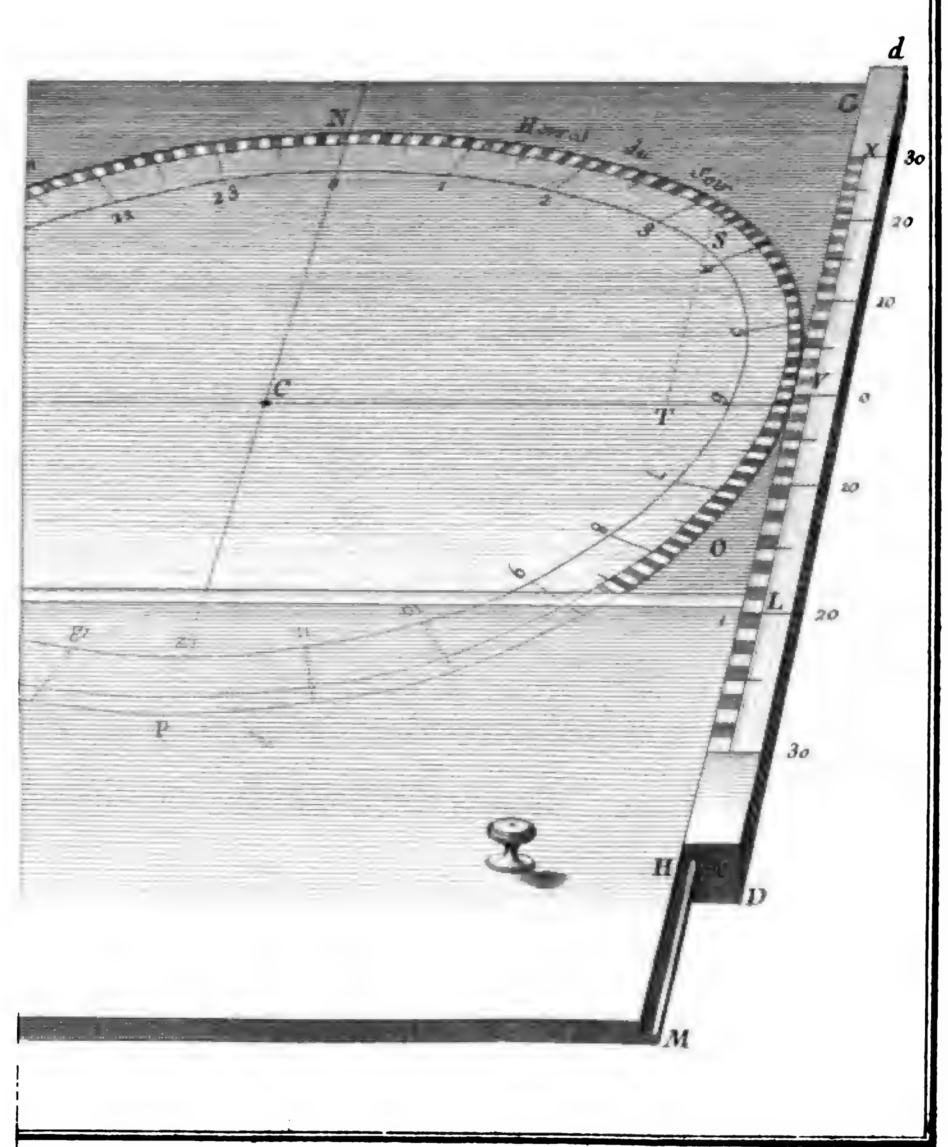


DÉTERMINATION

ASTÉRÉOMETRE

alculer le Lever et le Coucher des Astres

clinaison et l'heure du passage au Méridien.



Y. le Gouaz Sc.

DÉTERMINATION

De la position de soixante-quatre Étoiles des Pléïades, & Observation de l'Opposition de Jupiter, du 12 Mars 1779.

Par M. JEAURAT.

LES Étoiles du cou du Taureau, qui forment un amas qu'on nomme *constellation des Pléïades*, sont pour la plupart si petites, qu'on n'en peut distinguer que neuf avec la foible lunette du quart-de-cercle mural que j'ai chez moi; encore les six plus fortes, savoir Électra, Taïgeta, Maïa, Alcïone, Atlas & Pleïone, ne sont-elles que de la troisième & même de la quatrième grandeur: aussi n'a-t-on, d'ancienne date, la position exacte & précise que de huit de ces Étoiles; on réduit même communément la constellation entière à six Étoiles principales, parmi lesquelles on distingue Alcïone, qu'on regarde comme la principale de toutes, & à laquelle on rapporte ordinairement toutes les autres.

Lû à la rentrée du 17 Avril 1779.

Dans ce Mémoire, je détermine, avec la précision la plus scrupuleuse, les neuf Étoiles des Pléïades que j'ai pu voir avec la lunette de mon instrument mural: & de ces neuf positions dépendent celles de cinquante-cinq autres Étoiles, pour lesquelles j'ai été forcé d'avoir recours à un télescope de trente-deux pouces de foyer. Ainsi, moyennant ce bon télescope, j'ai pu augmenter mon catalogue des Étoiles des Pléïades, jusqu'à la concurrence de soixante-quatre Étoiles déterminées pour le 1.er Janvier 1779: & ce que je puis dire en faveur de la peine que j'ai prise à cet égard, c'est que ce sera au plus si on peut reprocher une minute d'erreur à la position des plus petites Étoiles que je n'ai pu comparer exactement avec les plus belles & les plus remarquables.

Le quart-de-cercle mural où ont été faites mes principales obſervations, eſt celui que feu M. de la Hire a placé en 1682 à l'Obſervatoire dans le plan du méridien : il fut aidé alors des ſoins de M. Picard, qui mourut l'année ſuivante; & ce fut M. de la Hire qui prit lui-même les hauteurs correſpondantes, néceſſaires pour bien placer cet inſtrument dans le plan du Méridien.

C'eſt à ce mural de M. de la Hire que j'ai comparé, comme on le verra par mes obſervations qui ſuivent, neuf Étoiles des Pléïades avec deux autres du Taureau : & mes comparaiſons, faites conſtamment & un grand nombre de fois avec un bon inſtrument, ont d'ailleurs été heureuſement confirmées par des hauteurs abſolues, par des hauteurs correſpondantes, & par l'obſervation des différences d'aſcenſions droites obſervées & priſes en particulier par M. Caſſini fils, le 3 Janvier 1779. Ces obſervations déciſives de M. Caſſini ſeront publiées dans l'*Hiſtoire céleſte*, à laquelle il travaille avec tant d'activité, d'aſſiduité & de capacité : & les miennes vont être détaillées ici, avec les conſéquences que j'en déduirai.

Pour juger du changement de poſition qui pourroit être arrivé dans quelques-unes des Étoiles des Pléïades, ainſi que du mouvement propre des Étoiles fixes en longitude, on pourra comparer mon catalogue & ma carte avec le catalogue & la carte des Pléïades, publiés par M. le Monnier, *pages 34 & 35 de ſon catalogue des Étoiles zodiacales*, réduites à l'année 1755.

Remontant plus haut, on pourra recourir à la *carte* des Pléïades, dreſſée par le premier des Caſſini; cette carte, publiée dans les Mémoires de l'Académie, *année 1708, page 302*, a été dreſſée pour l'époque du 10 Août 1708, époque où la Lune éclipſa pluſieurs des Étoiles des Pléïades. Quant aux anciennes poſitions fixées dans ce Mémoire de M. Caſſini, *page 299*, elles ſont pour l'année 1697, ainſi il y a un intervalle d'environ quatre-vingt-deux ans entre l'époque des longitudes de M. Caſſini & la mienne du 1.er Janvier 1779.

Rétrogradant encore & remontant au célèbre Képler. Ce fameux Aſtronome a donné quatre Cartes céleſtes particulières, gravées en manière noire, dont une eſt la carte des Étoiles des Pléïades; ces cartes ſont à la ſuite de ſon Traité d'Optique, imprimé à Londres en 1653; ce livre que j'ai eſt rare, mais on le trouve dans beaucoup de Bibliothèques choiſies. On voit par la carte des Pléïades, que Képler comptoit dans cette conſtellation ſix Étoiles principales, & vingt-ſix autres beaucoup plus petites; le tout formant un enſemble général, qui, autant qu'on peut juger à vue, ne diffère pas ſenſiblement de celui qui exiſte actuellement; mais cette carte eſt trop petite, pour qu'on puiſſe juger exactement d'un petit déplacement ou d'un mouvement qui ſeroit lent.

En récapitulant les connoiſſances ſucceſſivement acquiſes, quant à la conſtellation des Pléïades, on voit que les comparaiſons les plus certaines ſont celles de mes longitudes avec celles qui précédemment ont été déterminées avec préciſion: or, huit de celles de M. Caſſini pour 1697, & trois de M. l'Abbé de la Caille pour 1750, ſont dans ce cas; mais j'ai du doute ſur l'époque de M. Caſſini, & je n'en ai point pour celle de M. de la Caille. L'époque de M. Caſſini eſt-elle le commencement, le milieu ou la fin de l'année 1697? car dans ce doute, l'intervalle des temps entre l'époque des longitudes de M. Caſſini & les miennes, eſt de quatre-vingt-un ou de quatre-vingt-un & demi, ou de quatre-vingt-deux années; au lieu que l'intervalle entre l'époque de M. de la Caille & la mienne eſt décidément & certainement de vingt-neuf années.

Ainſi, ſelon la comparaiſon faite des longitudes de M. l'Abbé de la Caille avec les miennes, & pour une révolution certaine de vingt-neuf années, j'ai trouvé que:

Le mouvement en longitude pour les Étoiles fixes, eſt de	+ 24′ 25″
Tandis qu'on fait depuis long-temps ce mouvement pour vingt-neuf années, de	+ 24. 20. 1.

D'autre part, la comparaison des longitudes de M. Cassini avec les miennes, dans le cas où l'intervalle des temps seroit

De quatre-vingt-un ans . . . . donnera pour vingt-neuf années	+ 24′	23″
De quatre-vingt-un ans & demi . donnera pour vingt-neuf années	+ 24.	14.
De quatre-vingt-deux ans . . . donnera pour vingt-neuf années	+ 24.	5.

On peut donc conclure de ces résultats, que le mouvement des Étoiles fixes en longitude, adopté depuis long-temps, ne peut différer du vrai de plus de dix secondes de degrés, en trente ans : ce qui est une précision aussi grande qu'on puisse l'espérer quant à présent, puisque quinze secondes de degrés ne répondent qu'à une seconde de temps, & si je faisois une conjecture à cet égard, c'est que ce mouvement est plus grand qu'on ne le croit, d'environ cinq secondes en trente ans.

Dans les comparaisons que j'ai faites, j'ai rejeté comme on le verra, celles que m'auroient données Pleïone, parce qu'il y a, pour cette Étoile, ou une erreur, ou un mouvement particulier: & dans le cas où le mouvement particulier que je soupçonne auroit lieu, il se feroit, circulairement, à ce que je présume, d'orient en occident, autour de la principale Étoile nommée *Alcïone*, & d'environ un degré dans l'espace à peu-près de cent ans; c'est-à-dire, que ce mouvement autour d'Alcïone, approche de celui des Étoiles fixes, mais qu'il se fait dans un sens contraire.

Quant à l'opposition de Jupiter, du 12 Mars 1779, dont mes observations terminent ce Mémoire, le temps a été des plus favorables : Jupiter & β de la Vierge qui étoient fort près l'une de l'autre, ont été comparées ensemble au méridien quatorze jours de suite, & entr'autres le 12 Mars, environ sept minutes avant l'instant même de l'opposition. Mes observations sont donc complètes, & toutes confirmées les unes par les autres. De plus β de la Vierge a été direc-

tement comparée avec le Soleil, le 28 Mars, jour où l'Étoile étoit seulement moins haute que le centre du Soleil de 2' 13",5. Enfin, de mes calculs il résulte que les tables qui, cette fois-ci, ont le plus approché de l'observation, sont celles de M. Cassini, & que celles qui s'en sont le plus éloignées, sont celles de M. Halley; d'ailleurs celles de M. Wargentin, & les miennes, n'ont différé entr'elles que de 27 secondes, quoique très-différentes quant à la forme & quant au fond; nos erreurs en longitude, sont:

Pour les tables de M. Cassini, de — 1' 3", l'anomalie moyenne étant de......................	11ˢ 9ᵈ 46' 35".
Pour mes tables, de........ + 4. 5, l'anomalie moyenne étant de......................	11. 9. 59. 56.
Pour les tables de M. Wargentin, *Astronomie de M. de la Lande*, de ..... + 4. 32, l'anomalie moyenne étant de	11. 9. 40. 26.
Pour les tables de M. Halley, de + 7. 4, l'anomalie moyenne étant de......................	11. 9. 26. 32.

Car l'opposition de Jupiter avec le Soleil est arrivée le 12 Mars 1779,

à 12^h 9' 28" temps vrai . . } du méridien de l'Observ. royal de Paris.
à 12. 19. 20. temps moyen }

La longitude géocentrique de Jupiter étant alors de $5^s\ 22^d$ 18' 26".

Voici présentement les observations mêmes, telles qu'elles ont été faites, ainsi que les calculs qu'elles ont procurés, & dont il a été déduit les résultats qui viennent d'être cités.

OBSERVATIONS des neuf plus belles Étoiles des Pléïades, comparées au Méridien avec deux Étoiles du Bélier, & à l'Observatoire avec le quart-de-cercle mural de M. de la Hire.

30 Novembre 1778.

NOMS des ÉTOILES.	TEMPS des passages à la PENDULE.			TEMPS vrai des passages au SOLEIL.			HAUTEURS de L'INSTRUMENT.		
	H.	M.	S.	H.	M.	S.	D.	M.	S.
Petite Étoile.	8.	57.	27	9.	17.	6 ½	63.	47.	0.
α du Bélier..	9.	6.	32	9.	26.	11 ½	63.	39.	40.
Celeno	10.	43.	11	11.	2.	50 ½	64.	48.	50.
Électra.....	10.	43.	16	11.	2.	55 ½	64.	39.	30.
N........	10.	43.	31	11.	3.	10 ½	65.	21.	20.
Taïgeta.....	10.	43.	35	11.	3.	14 ½	65.	0.	42.
Maïa......	10.	44.	11 ½	11.	3.	51	64.	55.	13.
Mérope	10.	44.	44	11.	4.	23 ½	64.	25.	0.
Alcïone....	10.	45.	52 ½	11.	5.	32	64.	39.	52.
Atlas.......	10.	47.	32 ½	11.	7.	12	64.	37.	17.
Pleïone	10.	47.	33 ½	11.	7.	13	64.	42.	0.

Suite des Observations faites au Quart-de-cercle mural de M. de la Hire, dont la division de l'Instrument hausse les Hauteurs de 5' 22".

4 Décembre 1778.

NOMS des ÉTOILES.	TEMPS des passages à la PENDULE.	TEMPS vrai des passages au SOLEIL.	HAUTEURS apparentes & non corrigées de la RÉFRACTION.
	H. M. S.	*H. M. S.*	*D. M. S.*
Petite Étoile.	8. 41. 54	8. 59. 48	63. 41. 38.
α du Bélier. .	8. 50. 59	9. 8. 53	63. 34. 18.
Celeno.	10. 27. 38	10. 45. 32	64. 43. 28.
Electra.	10. 27. 43	10. 45. 37	64. 34. 8.
N.	10. 27. 58	10. 45. 52	65. 15. 58.
Taïgeta.	10. 28. 2	10. 45. 56	64. 55. 20.
Maïa	10. 28. 38½	10. 46. 33	64. 49. 51.
Mérope	10. 29. 11	10. 47. 5	64. 19. 38.
Alcïone	10. 30. 19½	10. 48. 14	64. 34. 30.
Atlas.	10. 31. 59½	10. 49. 54	64. 31. 55.
Pléïone.	10. 32. 0½	10. 49. 55	64. 36. 38.

Suite des Observations faites au Quart-de-cercle mural de M. de la Hire.

9 Décembre 1778.

NOMS des ÉTOILES.	TEMPS des passages à la PENDULE.			TEMPS vrai des passages au SOLEIL.			HAUTEURS VRAIES corrigées de la RÉFRACTION, suivant celle de M. Cassini.		
	H.	M.	S.	H.	M.	S.	D.	M.	S.
Petite Étoile.	8.	22.	31 ½	8.	37.	57 ½	63.	41.	9.
α du Bélier. .	8.	31.	36 ½	8.	47.	2 ½	63.	33.	49.
Celeno.	10.	8.	15 ½	10.	23.	41 ½	64.	43.	1.
Electra.	10.	8.	20 ½	10.	23.	46 ½	64.	33.	41.
N.	10.	8.	35 ½	10.	24.	1 ½	65.	15.	31.
Taïgeta.	10.	8.	39 ½	10.	24.	5 ½	64.	54.	53.
Maïa	10.	9.	16	10.	24.	42	64.	49.	25.
Mérope	10.	9.	48 ½	10.	25.	14 ½	64.	19.	18.
Alcïone. . . .	10.	10.	57	10.	26.	23	64.	34.	4.
Atlas.	10.	12.	37	10.	28.	3	64.	41.	29.
Pleïone	10.	12.	38	10.	28.	4	64.	36.	12.

Suite

Suite des Observations faites au Mural de M. de la Hire.
On a supposé la hauteur de l'Équateur de 41d 9' 46".

3 Janvier 1779.			
NOMS des ÉTOILES.	TEMPS des passages à la PENDULE.	TEMPS vrai des PASSAGES, &c.	DÉCLINAISONS APPARENTES.
	H. M. S.	H. M. S.	D. M. S.
Petite Étoile.	6. 45. 31	6. 47. 34	22. 31. 23.B.
α du Bélier..	6. 54. 36	6. 56. 39	22. 24. 3.
Celeno.....	8. 31. 15	8. 33. 18	23. 33. 15.
Electra.....	8. 31. 20½	8. 33. 23	23. 23. 55.
N.........	8. 31. 35	8. 33. 38	24. 5. 45.
Taïgeta	8. 31. 39	8. 33. 42	23. 45. 7.
Maïa......	8. 32. 15½	8. 34. 18	23. 39. 39.
Mérope	8. 32. 48	8. 34. 51	23. 14. 34.
Alcïone....	8. 33. 56½	8. 35. 59	23. 24. 18.
Atlas......	8. 35. 36½	8. 37. 39	23. 31. 43.
Pléïone	8. 35. 37½	8. 37. 40	23. 26. 26.

Suite des Observations faites au Mural de M. de la Hire. La correction d'Aberration & de Nutation en déclinaison est de — 2 secondes.

15 Janvier 1779.									
NOMS des ÉTOILES.	TEMPS des passages à la PENDULE.			TEMPS vrai des PASSAGES, &c.			DÉCLINAISONS VRAIES.		
	H.	M.	S.	H.	M.	S.	D.	M.	S.
Petite Étoile.	5.	59.	13	5.	55.	30	22.	31.	21. B
α du Bélier..	6.	8.	18	6.	4.	35	22.	24.	1.
Celeno.....	7.	44.	57	7.	41.	14	23.	33.	13.
Electra.....	7.	45.	2	7.	41.	19	23.	23.	53.
N........	7.	45.	17	7.	41.	34	24.	5.	43.
Taïgeta.....	7.	45.	21	7.	41.	38	23.	45.	5.
Maïa......	7.	45.	57½	7.	42.	14½	23.	39.	37.
Mérope....	7.	46.	30	7.	42.	47	23.	14.	32.
Alcïone....	7.	47.	38½	7.	43.	55½	23.	24.	16.
Atlas......	7.	49.	18½	7.	45.	35½	23.	21.	41.
Pléïone....	7.	49.	19½	7.	45.	36½	23.	26.	24.

Ascensions droites déduites des Observations précédentes.

NOMS des ÉTOILES.	ASCENSIONS DROITES pour le 1.er Janvier 1779. EN TEMPS.	ÉN DEGRÉS, non corrigée.	EN DEGRÉS, mais corrigée de l'aberration & de la nutation.
	H. M. S. T.	*D. M. S.*	*D. M. S.*
Petite Étoile. .	1. 45. 38. 30	26. 24. 30	26. 24. 38.
α du Bélier. . .	1. 54. 45. 0	28. 41. 17	28. 41. 25.
Celeno	3. 3. 41. 44	52. 55. 26	52. 55. 27.
Electra	3. 31. 46. 48	52. 56. 50	52. 56. 51.
N.	3. 32. 1. 50	53. 0. 27	53. 0. 28.
Taïgeta.	3. 32. 5. 50	53. 1. 27	53. 1. 28.
Maïa.	3. 32. 42. 25	53. 10. 36	53. 10. 37.
Mérope.	3. 33. 15. 6	53. 18. 41	53. 18. 42.
Alcïone.	3. 34. 23. 47	53. 35. 57	53. 35. 58.
Atlas.	3. 36. 4. 0	54. 1. 0	54. 1. 1.
Pléïone.	3. 36. 5. 9	54. 1. 17	54. 1. 18.

Longitudes & Latitudes déduites des Observations précédentes, pour le 1.er Janvier 1779, & comparaison de ses résultats avec ceux qu'a donnés M. Cassini, pour l'année 1697. Mémoires de l'Académie, année 1708, page 299.

NOMS des ÉTOILES.	LONGITUDES En 1697.	LONGITUDES En 1779.	LATITUDES En 1697.	LATITUDES En 1779.
	S. D. M. S.	*S. D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*
Pleïone.....	1. 26. 10. 50	1. 27. 17. 47	3. 57. 30 B.	3. 58. 1 B.
Maïa.......	1. 25. 27. 50	1. 26. 35. 42	4. 21. 40	4. 21. 52.
Atlas.......	1. 26. 8. 30	1. 27. 16. 26	3. 53. 30	4. 53. 29.
Celeno	1. 25. 12. 35	1. 26. 20. 36	4. 19. 54	4. 19. 0.
Taïgeta.....	1. 25. 20. 40	1. 26. 28. 50	4. 29. 10	4. 29. 11.
Alcïone.....	1. 25. 46. 27	1. 26. 54. 38	4. 1. 3	4. 1. 25.
Electra.....	1. 25. 11. 10	1. 26. 19. 36	4. 9. 34	4. 9. 39.

De la Table précédente, il résulte naturellement la détermination du mouvement des Étoiles, depuis l'année 1697 jusqu'à celle de 1779 : or, si les positions données par M. Cassini, *Mémoires de l'Académie, année 1708, page 299,* sont, comme on doit le croire, pour le 1.er Janvier 1697, alors les mouvemens indiqués dans la Table *qui suit*, répondent exactement à un intervalle de quatre-vingt-deux années. Voici donc la Table de ces mouvemens pour quatre-vingt-deux années, ou peut-être pour quatre-vingt-un ans & demi.

NOMS des ÉTOILES.	MOUVEMENS DES ÉTOILES DES PLÉIADES pour quatre-vingt-deux ans, ou peut-être pour quatre-vingt-un ans & demi.			
	EN LONGITUDE.	EN ASCENSION droite.	EN LATIT.	EN DÉCLIN.
Pléïone...	+ 1d 6' 57"	+ 1d 11' 9"	+ 0' 31"	+ 15' 42"
Maïa.....	+ 1. 7. 52	+ 1. 11. 37	+ 0. 12	+ 15. 53.
Atlas.....	+ 1. 7. 56	+ 1. 11. 40	− 0. 1	+ 15. 59.
Celeno....	+ 1. 8. 1	+ 1. 12. 2	− 0. 54	+ 15. 1.
Taïgeta...	+ 1. 8. 10	+ 1. 12. 17	+ 0. 1	+ 15. 53.
Alcïone...	+ 1. 8. 11	+ 1. 11. 55	+ 0. 22	+ 16. 4.
Electra....	+ 1. 8. 26	+ 1. 12. 10	+ 0. 5	+ 16. 11.

Pour conclure, d'après cette Table, le mouvement des Étoiles en longitude, je laiſſe de côté le mouvement de Pléïone, parce que ce mouvement s'écarte un peu de celui des ſix autres Étoiles, ſoit par erreur dans cette Étoile, ſoit parce qu'elle a peut-être un mouvement qui lui eſt particulier. Voici donc le moyen mouvement que je conclus des obſervations de Maïa, d'Atlas, de Celano, de Taïgeta, d'Alcïone & d'Électra.

Mouvement en longitude + 1d 8' 6".

Or, ſi ce mouvement eſt

Pour quatre-vingt-un ans..... on aura pour vingt-neuf ans + 24' 23".
Pour quatre-vingt-un ans & demi, on aura pour vingt-neuf ans + 24. 14.
Pour quatre-vingt-deux ans.... on aura pour vingt-neuf ans + 24. 5.

D'une autre part, ſi on compare mes longitudes d'Électra, d'Atlas & d'Alcïone, avec celle de feu M. l'abbé de la

Caille, pour 1750, on trouvera que le mouvement en vingt-neuf ans, eſt pour

Electra de + 24′ 10″
Atlas . . de + 24. 30.
Alcïone de + 24. 35.

& alors le moyen mouvement en longitude & pour une révolution certaine de vingt-neuf ans, eſt de + 24′ 25″.

Ce qui s'accorde auſſi-bien que faire ſe puiſſe avec ce que m'ont donné les obſervations de M. Caſſini, & auſſi avec le mouvement adopté juſqu'à préſent; ſavoir, + 24′ 20″,1 pour une révolution de vingt-neuf années.

Quant à Pléïone à qui je ſoupçonne un petit mouvement particulier, autour d'Alcïone, voici la quantité dont paroît être ce mouvement en quatre-vingt-un ans de temps.

Mouvement particulier & douteux en quatre-vingt-un ans.

Pour Pléïone, { − 1′ 9″ en longitude.
+ 0. 31. en latitude.

Au reſte, d'après les obſervations que je viens de donner, & d'après celles que j'ai faites d'ailleurs avec un bon téleſcope de trente-deux pouces de foyer, j'ai dreſſé le catalogue qui ſuit; & ſi les plus petites Étoiles ne ſont placées ici qu'à une minute près du vrai, au moins on pourra les reconnoître toutes & les trouver facilement avec une lunette, pourvu qu'elle ſoit plus forte que celle qu'on adapte ordinairement aux inſtrumens muraux placés dans le plan du Méridien. Voici donc ce catalogue de ſoixante-quatre Étoiles des Pléïades, & j'ai réduit ce catalogue au 1.er Janvier 1786, afin de le rapprocher de l'époque des volumes de la Connoiſſance des Temps, déjà publiés en faveur des Marins qui ont beſoin de ces volumes environ trois ans avant l'époque des phénomènes annoncés.

Catalogue des ſoixante-quatre Étoiles des Pléïades, pour le 1.er Janvier 1786.

1.° Étoiles qui ſont à l'occident d'Alcïone, ou qui paſſent avant Alcïone par le Méridien.

NOMS des ÉTOILES.	GRANDEUR.	ASCENSION DROITE		DÉCLIN. boréale.	Différence avec η ou d'Alcïone.		
		En temps.	En degrés.		EN ASCENSION DROITE En temps.	EN ASCENSION DROITE En degrés.	En DÉCLINAIS.
		H. M. S.	D. M. S.	. M. S	M. S.	M. S.	M. S.
1.	5.	3. 30. 58	52. 44. 14	23. 40. 58	Occ. — 3. 52	— 57. 58	+ 15′ 24″. N.
2.	5.	3. 31. 13	52. 48. 4	23. 48. 18	— 3. 37	— 54. 8	+ 22. 44 N.
3.	7.	3. 31. 42	52. 55. 14	23. 25. 48	— 3. 8	— 46. 58	+ 4. 14 N
4.	6.	3. 31. 45	52. 56. 4	23. 37. 48	— 3. 5	— 46. 8	+ 12. 14 N.
5.	7.	3. 31. 46	52. 56. 14	23. 41. 48	— 3. 4	— 45. 58	+ 16. 14 N.
6. *g.* Celeno.	3.	3. 32. 8	53. 1. 41	23. 34. 31	— 2. 42	— 40. 31	+ 8. 57 N.
7. *b.* Electra.	3.	3. 32. 13	53. 3. 5	33. 25. 11	— 2. 37	— 39. 7	— 0. 23 S.
8.	6.	3. 32. 27	53. 5. 24	23. 33. 8	— 2. 23	— 36. 48	+ 7. 34 N.
9. *n.*	8.	3. 32. 28	53. 6. 42	23. 7. 1	— 2. 22	— 35. 30	+ 41. 27 N.
10. *e.* Taïgeta.	3.	3. 32. 32	53. 7. 42	23. 46. 23	— 2. 18	— 34. 30	+ 20. 49 N.
11.	5.	3. 32. 48	53. 12. 0	23. 21. 0	— 2. 2	— 31. 12	— 4. 34 S.
12.	6.	3. 32. 48	53. 11. 44	23. 46. 18	— 2. 2	— 30. 28	+ 20. 44 N.
13.	5.	3. 32. 57	53. 13. 54	23. 39. 18	— 1. 53	— 28. 18	+ 13. 44 N.
14. *c.* Maïa.	3.	3. 33. 9	53. 16. 51	23. 40. 55	— 1. 41	— 25. 21	+ 15. 21 N.
15.	5.	3. 33. 12	53. 17. 44	23. 21. 0	— 1. 38	— 24. 28	— 4. 34 S.
16. *o.* Aſterope.	4.	3. 33. 13	53. 17. 54	23. 52. 18	— 1. 37	— 24. 18	+ 26. 44 N.
17. *o.*	4.	3. 33. 21	53. 19. 54	23. 51. 18	— 1. 29	— 22. 18	+ 25. 44 N.
18.	7.	3. 33. 31	53. 22. 24	23. 30. 38	— 1. 19	— 19. 48	+ 5. 4 N.
19.	7.	3. 33. 34	53. 23. 14	23. 30. 18	— 1. 16	— 18. 58	+ 4. 44 N.
20. *d.* Mérope.	3.	3. 33. 41	53. 24. 56	23. 15. 50	— 1. 9	— 17. 16	— 9. 44 S.
21.	9.	3. 33. 42	53. 25. 14	23. 25. 18	— 1. 8	— 16. 58	— 0. 16 S.
22.	5.	3. 33. 48	53. 26. 44	23. 34. 18	— 1. 2	— 15. 28	+ 8. 44 N.
23.	5.	3. 34. 2	53. 30. 14	22. 52. 18	— 0. 48	— 11. 58	— 33. 16 S.
24.	6.	3. 34. 2	53. 30. 30	23. 23. 20	— 0. 48	— 11. 42	— 2. 14 S.
25.	4.	3. 34. 20	53. 35. 4	23. 50. 18	— 0. 28	— 7. 8	+ 24. 44 N.
26.	5.	3. 34. 22	53. 35. 14	24. 7. 48	— 0. 28	— 6. 58	+ 42. 14 N.
27.	5.	3. 34. 28	53. 36. 44	23. 34. 48	— 0. 22	— 5. 28	+ 9. 14 N.
28.	5.	3. 34. 24	53. 36. 0	23. 17. 28	— 0. 26	— 6. 12	— 8. 6 S.
29.	8.	3. 34. 38	53. 39. 14	23. 27. 18	— 0. 12	— 2. 58	+ 1. 44 N.
30.	4.	3. 34. 39	53. 39. 24	23. 26. 18	— 0. 11	— 2. 48	+ 0. 44 N.
31.	8.	3. 34. 39	53. 39. 24	23. 2. 0	— 0. 11	— 2. 48	— 23. 34 S.
32.	5.	3. 34. 46	53. 41. 14	23. 58. 18	— 0. 4	— 0. 58	+ 32. 44 N.
33.	5.	3. 34. 47	53. 41. 24	23. 54. 0	— 0. 3	— 0. 48	+ 28. 26 N.
34.	4.	3. 34. 47	53. 41. 24	23. 5. 0	— 0. 3	— 0. 48	— 20. 34 S.
35.	4.	3. 34. 47	53. 41. 24	23. 0. 0	— 0. 3	— 0. 48	— 25. 34 S.
36.	4.	3. 34. 49	53. 42. 4	23. 12. 0	— 0. 1	— 0. 8	— 13. 34 S.
37. *η.* Alcïone.	3.	3. 34. 50	53. 42. 12	23. 25. 34	— 0. 0	— 0. 0	— 0. 0

Suite du Catalogue des soixante-quatre Étoiles des Pléïades, pour le 1.er Janvier 1786.

2°. Étoiles qui sont à l'orient d'Alcïone, ou qui passent après Alcïone par le Méridien.

NOMS des ÉTOILES.	GRANDEUR.	ASCENSION DROITE En temps.	ASCENSION DROITE En degrés.	DÉCLIN. boréale.	Différence avec η ou Alcïone. En ascension droite En temps.	Différence avec η ou Alcïone. En ascension droite En degrés.	Différence avec η ou Alcïone. En déclinais.
		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
37. η. Alcïone.	3.	3. 34. 50	53. 42. 12	23. 25. 34	Or. + 0. 0	+ 0. 0	— 0. 0
38.	4.	3. 34. 54	53. 43. 12	23. 37. 4	+ 0. 4	+ 1. 0	+ 11. 30 N.
39.	5.	3. 34. 54	53. 43. 14	22. 58. 0	+ 0. 4	+ 1. 2	— 27. 34 S.
40.	5.	3. 35. 6	53. 46. 14	22. 55. 30	+ 0. 16	+ 4. 2	— 30. 4 S.
41.	6.	3. 35. 18	53. 49. 4	22. 52. 30	+ 0. 28	+ 6. 52	— 33. 4 S.
42.	5.	3. 35. 23	53. 50. 29	23. 48. 18	+ 0. 33	+ 8. 17	+ 22. 44 N.
43.	6.	3. 35. 29	53. 51. 59	23. 39. 18	+ 0. 39	+ 9. 47	+ 13. 44 N.
44.	4.	3. 35. 42	53. 55. 30	23. 41. 18	+ 0. 52	+ 13. 18	+ 15. 44 N.
45.	4.	3. 35. 58	53. 59. 14	22. 42. 18	+ 1. 8	+ 17. 2	— 43. 16 S.
46. ρ.	7.	3. 36. 18	54. 4. 14	23. 44. 18	+ 1. 28	+ 22. 2	+ 18. 44 N.
47.	5.	3. 36. 20	54. 4. 44	22. 33. 48	+ 1. 30	+ 22. 32	— 51. 46 S.
48. ρ.	4.	3. 36. 23	54. 5. 29	23. 44. 18	+ 1. 33	+ 23. 17	+ 18. 44 N.
49.	5.	3. 36. 26	54. 6. 14	23. 9. 8	+ 1. 36	+ 24. 2	— 16. 26 S.
50. f. Atlas.	3.	3. 36. 30	54. 7. 15	23. 22. 59	+ 1. 40	+ 25. 3	— 2. 35 S.
51. h. Pleïone.	4.	3. 36. 31	54. 7. 32	23. 27. 42	+ 1. 41	+ 25. 20	+ 2. 8 N.
52.	6.	3. 36. 36	54. 8. 44	23. 36. 18	+ 1. 46	+ 26 32	+ 10. 44 N.
53.	4.	3. 36. 42	54. 10. 14	23. 12. 8	+ 1. 52	+ 28. 2	— 13. 26 S.
54.	6.	3. 36. 42	54. 10. 14	23. 35. 28	+ 1. 52	+ 28. 2	— 50. 6 S.
55.	5.	3. 36. 45	54. 10. 59	23. 54. 8	+ 1. 55	+ 28. 47	+ 28. 34 N.
56.	5.	3. 36. 57	54. 13. 59	23. 40. 18	+ 2. 7	+ 31. 47	+ 14. 44 N.
57.	5.	3. 36. 58	54. 14. 14	23. 31. 18	+ 2. 8	+ 32. 2	+ 5. 44 N.
58.	5.	3. 36. 58	54. 14. 14	22. 45. 8	+ 2. 8	+ 32. 2	— 40. 26 S.
59.	5.	3. 37. 6	54. 16. 14	23. 45. 18	+ 2. 16	+ 34. 2	+ 19. 44 N.
60.	4.	3. 37. 7	54. 16. 29	23. 1. 48	+ 2. 17	+ 34. 17	— 23. 46 S.
61.	4.	3. 37. 26	54. 21. 14	23. 10. 18	+ 2. 36	+ 39. 2	— 15. 16 S.
62.	4.	3. 37. 30	54. 22. 14	23. 54. 18	+ 2. 40	+ 40. 2	+ 28. 44 N.
63.	5.	3. 37. 46	54. 26. 14	23. 52. 18	+ 2. 56	+ 44. 2	+ 26. 44 N.
64.	4.	3. 38. 14	54. 33. 14	23. 17. 18	+ 3. 24	+ 51. 2	— 8. 16 S.

Le 9 Février 1783, la Lune éclipsera vingt-sept de ces Étoiles, *(Connoissance des Temps, page 24)*; & le 13 Décembre de l'année 1785, elle en éclipsera aussi trente-sept, *(Connoissance des Temps, page 164)*.

Présentement

Présentement je passe aux observations de Jupiter, qui forment la seconde & dernière partie de ce Mémoire.

Observations de Jupiter pour son opposition avec le Soleil, du 12 Mars 1779, faites à l'Observatoire royal au Quart-de-cercle mural de M. de la Hire.

JOURS des OBSERV. année 1779.	PASSAGES PAR LE MÉRIDIEN. Temps de la Pendule.		PASSAGES PAR LE MÉRIDIEN. Temps vrai.		HAUTEUR du centre de JUPITER, selon l'Instrument.
	β de la VIERGE.	JUPITER.	β de la VIERGE.	JUPITER.	
	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	D. M. S.
Fév. 28	13. 2. 14	13. 2. 55	12. 51. 26	12. 52. 7	45. 7. 5.
Mars 1.	12. 58. 21	12. 58. 33	12. 47. 46	12. 47. 58	45. 10. 1.
2.	12. 54. 28	12. 54. 11	12. 44. 6	12. 43. 49	45. 12. 57.
3.	12. 50. 36	12. 49. 50	12. 40. 26	12. 39. 41	45. 15. 53.
4.	12. 46. 42	52. 45. 29	12. 36. 46	12. 35. 33	45. 18. 53.
5.	12. 42. 48	12. 41. 7	12. 33. 6	12. 31. 24	45. 22. 0.
6.	12. 38. 53	12. 36. 44	12. 29. 25	12. 27. 15	45. 25. 10.
7.	12. 34. 59	12. 32. 21	12. 25. 44	12. 23. 6	45. 28. 20.
8.	12. 31. 4	12. 27. 58	12. 22. 3	12. 18. 57	45. 31. 30.
9.	12. 27. 8	12. 23. 34	12. 18. 22	12. 14. 48	45. 34. 40.
10.	12. 23. 12	12. 19. 10	12. 14. 41	12. 10. 39	45. 37. 50.
11.	12. 19. 17	12. 14. 46	12. 11. 1	12. 6. 30	45. 40. 55.
12.	12. 15. 22	12. 10. 23	12. 7. 22	12. 2. 22	45. 44. 5.
13.	12. 11. 28	12. 6. 0	12. 3. 43	11. 58. 15	45. 47. 15.
21.	11. 40. 22½	11. 31. 8	11. 34. 43½	11. 25. 29	46. 11. 30.
22.	11. 36. 29	11. 26. 47	11. 31. 6	1. 21. 24	46. 14. 15.
28	11. 13. 1	....	11. 9. 22		

Selon ces observations, Jupiter a été comparé seize jours avec l'Étoile β de la Vierge, puis cette Étoile elle-même a aussi été comparée au méridien avec le Soleil, le 28 Mars, jour

où elle n'étoit éloignée du parallèle du centre du Soleil que de 2′ 13″,5, ainſi avant que de rapporter la poſition de Jupiter à celle de β de la Vierge, je vais rapporter la poſition de β de la Vierge à celle du Soleil même, & avec d'autant plus de ſûreté que dans ce cas les meilleures Tables du Soleil, ſavoir celles de M. l'Abbé de la Caille & celles de M. Mayer, ne diffèrent entr'elles que de deux ſecondes.

La marche de ma pendule a été aſſez conſtante & aſſez uniforme pendant le mois entier de Mars : or, ſelon cette pendule, la différence des aſcenſions droites étoit de $11^h\ 9'\ 14''$, à raiſon de $23^h\ 56'\ 5''$ pour 360 degrés, ainſi la différence en temps vrai, $11^h\ 9'\ 14''$ réduite en degrés, donne .... $167^d\ 45'\ 51''$

Tandis que l'aſcenſion droite du Soleil étoit de	7. 2. 7.
Donc pour aſcenſion droite cherchée de β de la Vierge, on aura	174. 47. 58.
D'une autre part, ſelon la poſition déjà connue, & les réductions convenables, cette même aſcenſion droite, doit être de	174. 47. 38.
Alors j'ai cru devoir adopter pour vraie poſition celle qui tient le milieu entre les deux réſultats, ſavoir celle-ci	174. 47. 48.
De la poſition de β de la Vierge, déduite comme je viens de le faire de celle du Soleil même, il ſuit que pour vingt-neuf années, le mouvement des Étoiles en longitude, eſt de	+ 24. 30.
Tandis que ſelon mes obſervations & calculs des Étoiles des Pléïades, ce mouvement eſt de	+ 24. 25.

Et tandis que le mouvement adopté
depuis long-temps, eſt de........... + 24′ 20″.

Si donc j'avois une conjecture à faire quant à la quantité, dont eſt réellement le mouvement des Étoiles en longitude, c'eſt qu'on fait ce mouvement trop petit d'environ 5 ſecondes en vingt-neuf ans. Préſentement voici mes calculs & réſultats pour l'oppoſition de Jupiter, dont je viens de donner les obſervations : ces calculs & réſultats termineront ce Mémoire.

Calculs des Obſervations de Jupiter.

JOURS des OBSERVAT. année 1779.	DIFFÉR. des ASCENSIONS droites en degrés.	ASCENS. droites vraies du centre de JUPITER.	HAUTEURS du centre de JUPITER.		DÉCLINAIS. vraie du centre de JUPITER, boréale.
			APPARENTES.	VRAIES.	
	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.
Mars. 1	+ 3. 1	174. 50. 49	45. 5. 6	45. 4. 8	3. 54. 20 B.
2.	— 4. 5	174. 43. 43	45. 8. 2	45. 7. 4	3. 57. 16.
3.	— 11. 12	174. 36. 36	45. 10. 58	45. 10. 0	4. 0. 12.
4.	— 18. 18	174. 29. 30	45. 13. 58	45. 13. 0	4. 3. 12.
5.	— 25. 24	174. 22. 24	45. 17. 5	45. 16. 7	4. 6. 19.
6.	— 32. 31	174. 15. 17	45. 20. 15	45. 19. 17	4. 9. 29.
7.	— 39. 37	174. 8. 11	45. 23. 25	45. 22. 27	4. 12. 39.
8.	— 46. 43	174. 1. 5	45. 26. 35	45. 25. 37	4. 15. 49.
9.	— 53. 49	173. 53. 59	45. 29. 45	45. 28. 47	4. 18. 59.
10.	1. 0. 55	173. 46. 53	45. 32. 55	45. 31. 57	4. 22. 9.
11.	1. 8. 1	173. 39. 47	45. 36. 0	45. 35. 2	4. 25. 14.
12.	1. 15. 7	173. 32. 41	45. 39. 10	45. 38. 12	4. 28. 24.
13.	1. 22. 13	173. 25. 35	45. 42. 20	45. 41. 22	4. 31. 34.

Suite du calcul des Observations de Jupiter pour son opposition avec le Soleil.

JOURS des OBSERVATIONS, année 1779.		ASCENSION droite vraie du centre de JUPITER.	DÉCLINAIS. vraie du centre de JUPITER.	LONGITUDE géocentrique observée de JUPITER.	LONGITUDE de la TERRE.
	H. M. S. Temps vrai.	D. M. S.	D. M. S.	S. D. M. S.	S. D. M. S.
Mars. 11	12. 6. 30	173. 39. 47	4. 25. 14 B.	5. 22. 25. 58	5. 21. 18. 18.
12.	12. 2. 22	173. 32. 41	4. 28. 24	5. 22. 18. 13	5. 22. 17. 52.
13.	11. 58. 15	173. 25. 35	4. 31. 34	5. 22. 10. 27	5. 23. 17. 28.

De ces calculs il suit les résultats que voici :

Opposition de Jupiter observée avec le Soleil.

12 Mars 1779.

à 12^h $9'$ $28''$ temps vrai } du méridien de l'Observ. royal de Paris.
à 12. 19. 20. temps moyen }

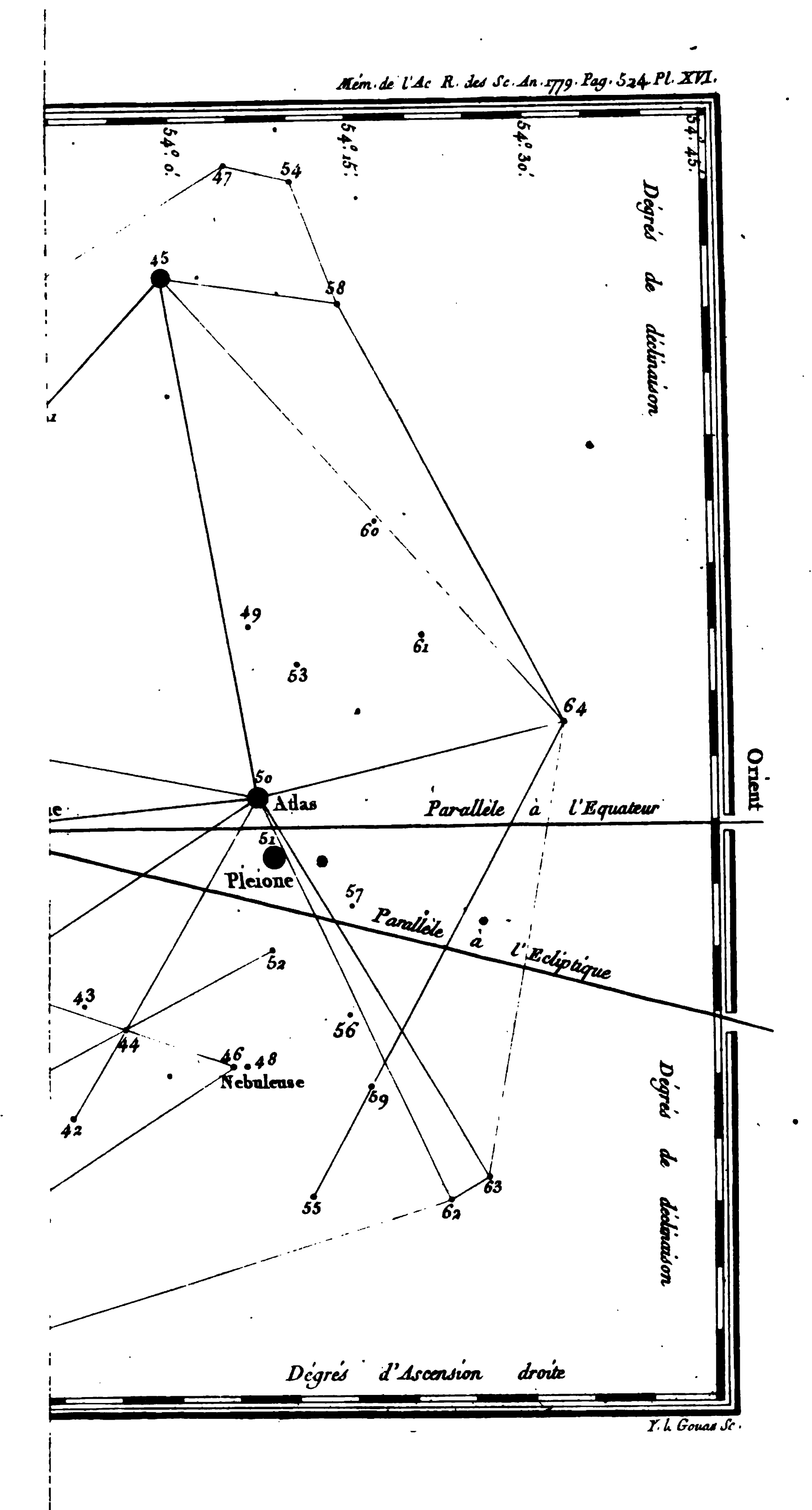
Alors la longitude héliocentrique de Jupiter étoit observée

Dans l'Écliptique .... de 5^s 22^d $18'$ $11''$.
Dans l'Orbite .... de 5. 22. 18. 26.

Tandis qu'elle étoit

Selon les Tables de M. Cassini. .. de 5^s 22^d $17'$ $23''$ }
Selon mes Tables .... de 5. 22. 22. 31. } dans l'orbite.
Selon les Tables de M. Wargentin, de 5. 22. 22. 58. }
Selon les Tables d'Halley ...... de 5. 22. 25. 30. }

Ainsi dans cette opposition, les Tables de M. Cassini sont celles qui approchent le plus de l'observation, & celles de


54° 0'
54° 15'
54° 30'
54° 45'
47
54
45
58
Dégrés de déclinaison
60
49
61
53
64
Orient
50
Atlas
Parallèle à l'Equateur
51
Pleione
57
Parallèle à l'Ecliptique
52
43
56
44
46
48
Nebuleuse
59
42
63
55
62
Dégrés de déclinaison
Dégrés d'Ascension droite
Y. L. Gouas Sc.

M. Halley ſont celles qui s'en éloignent davantage ; d'ailleurs les erreurs de chacune de ces Tables ſont fort éloignées d'être conſtamment les mêmes, car

Pour l'oppoſition du 23 Mars 1590.

L'erreur des Tables de M. Caſſini étoit de	+	10′ 21″
L'erreur de mes Tables étoit ſeulement de	+	1. 21.

Pour l'oppoſition du 1.er Février 1754.

L'erreur des Tables de M. Caſſini étoit de	—	6. 40.
L'erreur de mes Tables étoit ſeulement de	—	2. 31.

Pour l'oppoſition du 24 Avril 1733.

L'erreur des Tables de M. Wargentin étoit de	+	1. 1.
L'erreur de mes Tables étoit ſeulement de	+	0. 29.



MÉMOIRE
SUR LA
PLANÈTE DE HERSCHEL.

Par M. DE LA LANDE. *(a)*

Lû le 22 Décemb. 1781. Remis le 1.er Oct. 1782.

LA nouvelle Planète qui occupe les Aſtronomes depuis le mois d'Avril 1781, eſt une des choſes les plus ſingulières qu'on ait découvertes dans le Ciel, & l'on étoit bien loin de l'eſpérer. Depuis le temps que l'on cherche des Comètes, on n'en avoit jamais vu qui reſſemblât à une petite Étoile; on ne ſoupçonnoit jamais ce qui paroiſſoit une petite Étoile d'avoir un mouvement; d'ailleurs on y donnoit peu d'attention, le nombre des Étoiles de ſeptième grandeur eſt ſi prodigieux, qu'on auroit regardé comme impoſſible & inutile de les obſerver toutes & à pluſieurs repriſes, & cela eût été néceſſaire pour ſavoir s'il n'y en avoit pas quelqu'une qui eût un mouvement.

Lorſqu'on avoit déterminé pluſieurs petites Etoiles dans une région du Ciel, on croyoit ſuperflu d'obſerver les autres, puiſqu'il ſuffit d'avoir quelques points fixes dans chaque partie. Auſſi voit-on en comparant les catalogues de Flamſtéed, de Mayer, de Bradley, de la Caille, que pluſieurs Étoiles qui ſe trouvent dans les uns, ſont négligées dans les autres. Nous pouvions donc être encore bien des années ſans connoître la Planète que M. Herſchel vient de nous annoncer, ſi ſon habileté n'eût été ſecondée par un heureux haſard.

J'appelle le nouvel Aſtre *Planète* plutôt que *Comète:* il eſt

(a) Quoique ce Mémoire n'ait été lû qu'en 1781, l'Académie a cru pouvoir le publier dans ce volume, à cauſe de la nouveauté de l'objet, & de l'impatience que doivent avoir les Aſtronomes de ſavoir ce que l'on a fait à ce ſujet.

vrai que les limites de ces dénominations ne ſont plus les mêmes qu'autrefois, puiſque les Comètes ſont de véritables Planètes, & ces limites ſont encore plus confondues par l'obſervation dont il s'agit; mais il me ſemble naturel de réſerver le nom de *Comètes* aux Aſtres dont les apparitions ſont courtes, rares, qui ſont long-temps hors de la portée de nôtre vue, & qui ſe font remarquer par les queues, les chevelures & les nébuloſités qu'on a vues juſqu'à préſent dans toutes les Comètes. J'appelle auſſi le nouvel aſtre *Planète de Herſchel;* à l'honneur de celui à qui nous devons cette curieuſe découverte; il lui a donné le nom de *Georgium Sidus;* M. Bode propoſe de l'appeler *Uranus;* M. de Sivry, *Cybèle;* M. Proſperin, *Neptune;* mais quelle raiſon pourroit l'emporter ſur la reconnoiſſance que nous devons à l'Auteur, & ſur l'intérêt des Sciences qui demande qu'on excite l'émulation?

M. Herſchel *(b)*, Membre de la Société Royale de Londres, Muſicien, né à Hanovre en 1738, mais établi à Bath en Angleterre, s'occupe depuis dix ans, à faire des Téleſcopes, par goût & par curioſité, il y a réuſſi ſupérieurement; car M. Maskelyne, au mois de Juin 1782, ayant comparé un de ces téleſcopes de M. Herſchel avec le meilleur téleſcope de 6 pieds que l'on ait du célèbre Short, a trouvé celui de M. Herſchel fort ſupérieur. Dans une lettre que j'ai vue de M. Herſchel, il aſſure en avoir fait un qui groſſit quinze cents fois, & cela en donnant une grande ouverture au miroir par le moyen d'une courbure parabolique. Il parle d'un téleſcope de 20 pieds qui groſſit trois cents fois, dans ſes Obſervations ſur les taches de Jupiter & de Mars *(Philoſ. Tranſactions, 1781, pages 121 & 127)*. Il y parle d'un groſſiſſement de deux mille dix fois, &c. dont il a fait uſage à cette occaſion. *(Phil. Tranſ. 1781, page 492)*. Enfin, M. Magellan écrivoit au mois de Juin 1782, qu'il avoit vu un téleſcope

(b) On a écrit ce nom de dix façons différentes dans les Journaux, mais c'eſt d'après une lettre de M. Herſchel lui-même, que je l'écris ainſi, & d'après les Tranſactions philoſophiques de 1781: *Account of a Comet, by M. Herſchel, F. R. S.*

Newtonien de 7 pieds, fait par M. Herſchel, & qui groſſit ſix mille fois, il ajoute que l'Auteur eſt un prodige d'adreſſe & de patience, & qu'il vient d'obtenir du Roi une penſion de trois cents livres ſterling, & un logement à Windſor en conſidération du ſuccès étonnant auquel il eſt parvenu, & pour le mettre à portée de continuer à s'occuper de l'Aſtronomie. C'eſt à ce talent extraordinaire de M. Herſchel, pour la conſtruction des téleſcopes, que nous devons la découverte de la Planète qui fait l'objet de ce Mémoire.

Ce fut le 13 Mars 1781, que M. Herſchel, regardant avec un téleſcope de 7 pieds, les Étoiles qui ſont vers les pieds des Gemeaux, vit un petit Aſtre différent des Étoiles de même lumière, qui paroiſſoit plus large, & qu'il ſoupçonna être une Comète *(Philoſophical Tranſactions, 1781, p. 492)*; il regarda cet Aſtre avec un équipage qui groſſiſſoit neuf cents trente-deux fois, & il trouva que ſon diamètre étoit encore plus grand, tandis que celui des Étoiles ne changeoit pas; il le compara avec beaucoup de petites Étoiles, & il en donne la configuration dans ſon Mémoire *(Philoſ. Tranſ. 1781)*, avec la deſcription d'un micromètre de ſon invention: il fut aſſuré deux jours après, que ce n'étoit pas une Étoile, en voyant que cet Aſtre avoit changé de place; mais il avoit préſumé, dès la première vue, que ce n'étoit pas une Étoile, & cela me paroît ſurprenant, parce que dans ma lunette, qui groſſit cent vingt fois, cette Planète ne me paroît pas différente d'une Étoile de ſeptième grandeur; mais il ſeroit encore plus difficile de croire que M. Herſchel ſe fût aperçu de ſon mouvement, ſi quelque raiſon n'avoit fixé ſon attention ſur un auſſi petit Aſtre, confondu avec tant d'autres; il me paroît donc certain que M. Herſchel dut cette découverte à la grande force de ſon téleſcope.

Il en donna bientôt avis à M. Maskelyne, Aſtronome royal d'Angleterre; celui-ci ayant examiné les petites Étoiles auxquelles M. Herſchel avoit comparé la Planète, dès le 17 Mars, trouva que ce jour-là, à $10^h 40'$ temps moyen, elle étoit à $83^d 59' 44''$ d'aſcenſion droite, & à $23^d 33' 8''$ de

de déclinaiſon boréale; il s'aſſura du mouvement les jours ſuivans; je rapporterai ſes obſervations ci-après, *page 538*.

M. Maskelyne écrivit, dès les premiers jours d'Avril, cette nouvelle à Paris; M. Meſſier commença à obſerver la Planète le 16 Avril, & continua juſqu'à la fin d'Octobre; je rapporterai de même, ci-après, les obſervations de M. Meſſier.

M.rs le Monnier, Méchain, d'Agelet, Léveſque & moi, avons continué ces obſervations à Paris *(c)*, de même que M.rs Reggio & de Ceſaris à Milan, M. Slope à Piſe, M. Darquier à Toulouſe, M. Bode à Berlin, M. Wargentin à Stockolm, &c.

Auſſitôt qu'on eut à Paris quelques jours d'obſervations, on entreprit de calculer cet Aſtre, comme les Comètes ordinaires, dans une parabole; M.rs Méchain, l'abbé Boſcovich, le Préſident de Saron, de la Place, Lexell, firent diverſes tentatives, mais comme on ne penſoit pas à ſuppoſer cette Planète dix-huit fois plus loin que le Soleil, on repréſentoit fort bien quelques obſervations, & peu de jours après, l'écart étoit conſidérable.

M. le Préſident de Saron fut le premier qui, le 8 Mai, s'aperçut que cette Planète devoit être fort éloignée de nous; il l'eſtimoit au moins douze fois plus loin que le Soleil, & les calculs commencèrent à s'accorder beaucoup mieux.

M. l'abbé Boſcovich compoſa au commencement de Juin, un ſavant Mémoire, ou par une théorie ingénieuſe & ſimple; il montra qu'il y avoit quatre paraboles qui pouvoient ſatisfaire au petit mouvement qu'on avoit obſervé juſqu'alors. M. de la Place publia des Élémens, dans la Connoiſſance des Temps de 1784.

M. Lexell qui étoit alors en Angleterre, écrivoit vers le même temps qu'on repréſentoit fort bien ſon mouvement par un cercle qui avoit un rayon égal à dix-huit fois la diſtance

(c) Voyez le Journal de Paris, des 27 Avril, 29 Mai, 24 Juillet, 26 Décembre 1781, 22 Juillet 1782; le Journal des Savans, Juin 1781 & Février 1782; le Mercure des 4 Août 1781 & 6 Avril 1782.

du Soleil; dès-lors il me parut qu'on devoit lui donner le nom de *nouvelle Planète ;* le 24 Juillet, M. Lexell qui avoit calculé son mouvement dans différentes hypothèses paraboliques, vit que dans toutes les paraboles qui avoient depuis 14 jusqu'à 18 de distance périhélie, on trouvoit à peu-près le même accord entre le calcul & l'observation. On comprit alors qu'il falloit attendre que la Planète eût parcouru un arc plus étendu pour entreprendre de calculer son orbite.

Mais lorsque j'ai eu huit mois d'observations, la Planète ayant été en conjonction & en opposition, & la situation de la Terre nous l'ayant fait voir dans toutes les positions, avec un mouvement de plus de six degrés, j'ai cru que l'on pouvoit former des hypothèses au moins pour calculer sa route dans le cours de l'année 1782, voici le résultat de mes calculs qui ont assez bien réussi.

J'ai pris trois observations exactes, confirmées chacune par les précédentes & les suivantes, & dans lesquelles la Planète avoit été comparée à la même étoile *Propus* ou *H* des Gemeaux; la première & la dernière sont de M. Méchain, la seconde de M. Messier; je les ai calculées, & j'ai trouvé les résultats suivans. J'appelle *longitude héliocentrique moyenne de la Planète*, celle qui est corrigée de l'aberration & de la nutation, c'est à-dire qui est comptée de l'Équinoxe moyen, & telle qu'on la verroit s'il n'y avoit point d'aberration. Les lieux du Soleil sont calculés par les Tables de la Caille, mais sans y employer la nutation, afin qu'ils soient, ainsi que ceux de la Planète, comptés de l'Équinoxe moyen.

Temps moyen des Observations.	*25 Avril 1781, à 9h 47'.*	*31 Juillet 1781, à 15h 33'.*	*12 Décemb. 1781, à 10h 10'.*
Ascension droite observée....	85d 15' 27"	91d 7' 49"	91d 23' 31"
Déclinaison boréale observée...	23. 35. 34	23. 40. 25	23. 42. 47.
Longitude..................	2s 25. 39. 17	3s 1. 2. 7	3s 1. 16. 28.
Latitude boréale............	0. 11. 36	0. 12. 24	0. 14. 54.
Nutation à ajouter à la longitude observée...............	+ 10	+ 8	+ 7.
Aberration en longitude......	+ 19	+ 21	— 18.

Temps moyen des Observations.	*25 Avril 1781, à 9h 47'.*	*31 Juillet 1781, à 15h 33'.*	*12 Décemb. 1781, à 10h 10'.*
Longitude du Soleil comptée de l'Equinoxe moyen........	$1^s\ 5^d\ 58'\ 53''$	$4^s\ 9^d\ 7'\ 13''$	$8^s\ 21^d\ 21'\ 50''$
Logarithme de la dist. du Soleil..	0,003196	0,006272	9,992993.
Longit. héliocentrique moyenne calculée................	2. 27. 58. 56	2. 29. 9. 3	3. 0. 45. 31.
Latitude héliocentrique.......	0. 11. 59	0. 12. 55	0. 14. 8.

Ayant calculé la première & la dernière observation, je les ai réduites au Soleil, en supposant connue la distance de la Planète au Soleil, & calculant la parallaxe du grand orbe; cela m'a donné un mouvement vu du Soleil, dans l'espace de deux cents trente-un jours.

La même distance avec laquelle j'avois calculé la parallaxe du grand orbe, m'a donné la durée de la révolution par rapport aux Étoiles fixes, par la règle de Képler; j'en ai déduit le mouvement de la Planète en deux cents trente-un jours, par rapport aux Équinoxes moyens; le mouvement devoit être le même que celui qui étoit tiré des observations réduites au Soleil, si la distance supposée de la Planète au Soleil étoit bonne: tant que ma distance a été mal supposée, elle m'a donné une erreur sur les parallaxes annuelles, sur les longitudes héliocentriques & sur le mouvement que j'en avois déduit; d'un autre côté, la révolution de la Planète autour du Soleil, déduite de la même distance, étant défectueuse, me donnoit une erreur sur le mouvement dans l'espace de deux cents trente-un jours, & cette erreur étant différente de la première, je trouvois pour le mouvement deux quantités différentes.

J'ai donc fait varier la distance de la Planète, jusqu'à ce que le mouvement héliocentrique, calculé avec cette distance, fût le même que celui qui résultoit de l'intervalle des temps & de la durée de la révolution tirée de la distance; j'ai trouvé par-là qu'il falloit supposer la distance 18,931, & la révolution sidérale, 82 années $\frac{37}{100}$. Par-là le mouvement de la Planète, corrigé de l'aberration, de la précession & de

la nutation, c'eſt-à-dire réduit au mouvement moyen, par rapport aux Étoiles fixes, étoit de $2^d 46' 3''$ ou de $2^d 46' 35''$ par rapport aux Équinoxes, le même que par le calcul des parallaxes annuelles, en employant la diſtance 18,931.

Enſuite j'ai pris l'obſervation intermédiaire du 31 Juillet éloignée de la première de quatre-vingt-dix-ſept jours $\frac{24}{100}$, j'ai calculé avec les mêmes élémens la longitude géocentrique moyenne, & je l'ai trouvée de $3^s 1^d 2' 41''$, plus grande de 5 ſecondes ſeulement que celle qui étoit déduite de l'obſervation, & qui eſt de $3^s 1^d 2' 36''$, par rapport au lieu moyen de l'Équinoxe: cet accord eſt plus grand que celui que comportent les obſervations, dans leſquelles on a même négligé la différence de réfraction entre la Planète & l'Étoile. Ainſi il eſt inutile, quant à préſent, de chercher une autre courbe que le cercle pour repréſenter le mouvement de cette Planète. Le cercle ſuffira pour pouvoir prédire le cours du nouvel Aſtre d'ici à une année ou deux avec une exactitude ſuffiſante.

Pour cet effet il ſuffira de ſuppoſer la longitude héliocentrique pour le 1.[er] Janvier 1782 à midi, $3^s 0^d 59' 22''$, & le mouvement diurne par rapport aux Équinoxes de $43'',13$ ou de $4^d 22' 22''$ par an. Enſuite avec la longitude héliocentrique de la Planète & celle du Soleil, on cherchera la longitude géocentrique de la Planète par les méthodes ordinaires. J'ai négligé dans ces calculs la latitude qui n'eſt que de quelques minutes.

Ayant vu que cette hypothèſe s'accordoit ſi bien avec un intervalle de près de huit mois, j'ai calculé d'autres obſervations, antérieures, intermédiaires ou poſtérieures, & j'ai trouvé un accord aſſez ſatisfaiſant, de même que dans la conjonction & l'oppoſition déterminées par M. Méchain au 19 Juin & au 21 Décembre, & dans la ſtation qui eſt arrivée le 7 Octobre.

Voici trente-deux longitudes apparentes obſervées par M.[rs] Maskelyne, le Monnier, Meſſier, Méchain, d'Agelet, Léveſque & moi; elles ſont ſans corrections, excepté celles

de la conjonction & de l'opposition qui sont des longitudes moyennes corrigées de l'aberration & de la nutation; j'y ai joint l'erreur du calcul de mon hypothèse, ou ce qu'il faut appliquer à mon calcul pour l'accorder avec les observations.

ANNÉES, MOIS & JOURS.			TEMPS MOYEN.		LONGITUDE OBSERVÉE.				ERREUR.	
			H.	M.	S.	D.	M.	S.	M.	S.
1781.	Avril.	1.	10.	8	2.	24.	49.	30	+ 1.	28.
		6.	7.	45	2.	24.	57.	33	+ 1.	2.
		16.	9.	8	2.	25.	17.	20	+ 0.	18.
		25.	9.	47	2.	15.	39.	17	0.	0.
	Mai.	26.	8.	42	2.	27.	13.	4	— 0.	22.
Conj.	Juin.	19.	5.	31	2.	28.	38.	14	— 0.	9.
	Juillet.	20.	15.	11	3.	0.	27.	36	+ 0.	22.
		31.	15.	33	3.	1.	2.	7	— 0.	5.
	Octob.	5.	17.	12	3.	2.	54.	46	— 0.	12.
	Déc.	12.	10.	10	3.	1.	16.	28	0.	0.
Oppos.		21.	18.	3	3.	0.	52.	13	+ 0.	8.
1782.	Janv.	3.	7.	40	3.	0.	20.	15	+ 0.	9.
		18.	8.	16	2.	29.	44.	52	— 0.	9.
		26.	6.	10	2.	29.	29.	5	+ 0.	27.
	Févr.	12.	8.	27	2.	29.	2.	40	+ 0.	25.
		15.	6.	47	2.	28.	59.	40	+ 0.	27.
	Mars.	4.	7.	50	2.	28.	49.	38	+ 0.	3.
		11.	8.	57	2.	28.	50.	9	+ 0.	3.
		26.	10.	9	2.	29.	0.	29	+ 0.	26.
	Avril.	8.	7.	55	2.	29.	18.	13	+ 0.	22.
		19.	8.	17	2.	29.	39.	35	+ 0.	19.
		27.	8.	39	2.	29.	58.	23	+ 0.	20.
	Mai.	7.	8.	13	3.	0.	25.	8	+ 0.	45.
		24.	8.	44	3.	1.	17.	50	+ 0.	55.
		29.	9.	18	3.	1.	34.	0	+ 0.	35.
	Juillet.	18.	15.	22	3.	4.	32.	54	+ 2.	17.
		20.	15.	3	3.	4.	39.	18	+ 1.	57.
		21.	15.	0	3.	4.	42.	39	+ 1.	56.
	Août.	16.	16.	16	3.	6.	1.	54	+ 1.	36.
		23.	16.	30	3.	6.	19.	40	+ 2.	5.
		31.	15.	53	3.	6.	37.	41	+ 2.	11.
	Sept.	23.	19.	48	3.	7.	13.	39	+ 2.	26.

J'ai employé dans mon calcul l'aberration, qui est + 24 secondes vers la conjonction, & — 17 secondes vers l'opposition. Dans la plupart de ces observations, la Planète a été comparée avec l'étoile *Propus* ou *H* des Gemeaux, de cinquième grandeur; on trouve cependant des inégalités de 15 à 20 secondes dans la marche des observations, mais il est assez difficile de faire parcourir exactement à une étoile le fil d'un micromètre, & de s'assurer que les deux fils sont rigoureusement perpendiculaires l'un à l'autre.

Voyant que l'erreur de ma première hypothèse s'étoit accrue au mois de Juillet 1782 jusqu'à 2 minutes, j'ai voulu voir quel changement il faudroit y faire pour accorder l'observation du 21 Juillet 1782, avec celle du 25 Avril 1781, j'ai trouvé la distance 18,893, la révolution 82 ans $\frac{12}{100}$, le mouvement diurne par rapport aux Équinoxes 43",22, & la longitude héliocentrique moyenne le 1.er Janvier 1782, $3^s\ 1^d\ 1'\ 0''$. Mais cette nouvelle hypothèse donne 1' 27" de trop pour la longitude en opposition observée au mois de Décembre; cela annonce une inégalité réelle dans le mouvement de la Planète, puisque le même cercle ne peut représenter les observations extrêmes & les intermédiaires dans l'espace de quinze mois. Mais cette inégalité est si petite, qu'on ne peut espérer de la déterminer avec quelqu'exactitude, si ce n'est au bout de quelques années d'observations.

Cette distance que j'ai trouvée 18,931 & 18,893, seroit, suivant M. Lexell, 18,886; suivant M. Prospérin, 18,878; suivant M. Klinkenberg 18,809: M. Oriani dans les *Ephémérides de Milan*, fait cette distance de 20,873; mais on voit qu'il s'y est glissé une erreur considérable, relativement à la conjonction de la Planète.

J'ai fait aussi quelques essais pour déterminer l'inclinaison & le nœud de cette orbite, quoique la petitesse du mouvement en latitude rende cette détermination très-imparfaite.

Les latitudes observées le 25 Avril & le 12 Décembre 1781, 11' 36" & 14' 54", étant réduites au Soleil,

ſont de 11′ 59″ & 14′ 8″, avec ces deux latitudes & le mouvement en longitude ou l'arc de l'Écliptique, compris entre les deux cercles de latitude 2ᵈ 46′ 3″, on trouve la diſtance au nœud le 25 Avril 15ᵈ 4′, le lieu du nœud 2ˢ 12ᵈ 54′, & l'inclinaiſon 46 minutes.

Les latitudes du 16 Avril 1781 & du 26 Mars 1782, qui ſont de 11′ 48″ & 15′ 5″, & vues du Soleil 12′ 7″ & 15′ 10″, avec un arc parcouru de 4ᵈ 7′ 44″, donnent pour le lieu du nœud 2ˢ 12ᵈ 2′, avec une inclinaiſon de 44 minutes. Cette détermination eſt un peu plus exacte que la précédente, & peut ſuffire pour donner une idée de la ſituation de cette orbite, & du changement que la Planète éprouve quant à ſa latitude. On voit qu'elle a paſſé par ſon nœud il y a quatre ans, elle ſera dans ſa plus grande latitude boréale vers 1798.

Quant à la grandeur de cette Planète, elle paroît comme une Étoile de ſixième à ſeptième grandeur, & ce n'eſt que quand il fait très-beau temps, qu'on peut la voir à la vue ſimple. Elle eſt un peu moins brillante que l'étoile 132ᵉ du Taureau dans le Catalogue de Flamſtéed; elle n'a l'air que d'une Étoile, même dans une lunette qui groſſit cent cinquante fois. Son diamètre apparent a été trouvé de 4 à 5 ſecondes par M. Herſchel *(Philoſ. Tranſ. 1781, p. 494)*. M. Maskelyne l'eſtimoit de 3 ſecondes. Mais dans les diamètres meſurés, il y a toujours une partie à ôter pour l'effet de l'irradiation ou de l'aberration des lunettes: ſi l'on ſuppoſe que le diamètre apparent du diſque réel de la planète, ſoit de 3 ſecondes, on trouve qu'elle doit avoir neuf mille quatre cents ſoixante lieues de diamètre réel, c'eſt-à-dire trois fois & un tiers celui de la Terre.

Le mouvement moyen de la nouvelle Planète, eſt, ſuivant mon calcul, de 43 ſecondes par jour, mais en conjonction elle fait 3′ 36″ par jour, & en oppoſition elle rétrograde de 2′ 48″ par jour. Sa rétrogradation eſt d'environ quatre degrés & dure cent cinquante jours chaque année.

En comparant avec mon calcul l'obſervation du 4 Mars 1781, il me fut aiſé de voir que la Planète devoit être ſtationnaire le ſurlendemain. Car pour calculer le lieu de la Planète vue de la Terre, j'étois obligé d'ajouter la tangente de 42 degrés, avec celle du ſupplément de la demi-commutation $53^d\ 40'$, pour avoir la tangente d'un arc $50^d\ 45'$, qui ajouté avec $53^d\ 40'$ devoit faire l'élongation. Le ſupplément de la demi-commutation diminuoit de $29'\ 37''$ par jour, & le lieu du Soleil augmentoit de $59'\ 57''$, il falloit donc que l'arc $50^d\ 45'$ diminuât de $30'\ 20''$, afin que la diminution de l'élongation compensât exactement l'augmentation de la longitude du Soleil. En conſidérant la différence des logarithmes des tangentes, d'une minute à l'autre, vers $53^d\ 40'$, je voyois qu'elle étoit de 2647; or, $30'\ 20''$ ſont à $29'\ 37''$, comme 2647 à 2584. Ainſi la différence devoit être plus petite de 63 pour l'arc cherché; mais elle étoit dans le calcul du 4 Mars plus petite de 68, & je voyois qu'elle diminuoit de trois ou quatre parties chaque jour, ainſi je vis qu'elle ſeroit réduite à 63 le 6 au matin. En effet, je trouve que le 6 au ſoir à 7 heures 40 minutes, la Planète devoit être à $88^d\ 49'\ 33''$ de longitude, plus avancée d'une ſeconde que la veille à pareille heure; elle étoit alors à $3^f\ 12^d\ 25'\ 25''$ d'élongation. Elle a rétrogradé de $4^d\ 4'$ depuis le 7 Octobre 1781 qu'elle avoit été ſtationnaire, juſqu'au 6 Mars 1742. Au reſte, l'élongation du point de la ſtation peut ſe trouver aiſément par une formule très-ſimple que M. Lexell m'a envoyée à cette occaſion; car la diſtance 18,9 diviſée par la racine de 19,9, c'eſt-à-dire par la ſomme des deux diſtances de la Planète & de la Terre au Soleil, donne la tangente de l'angle $76^d\ 46'$, élongation au moment de la ſtation, en ſuppoſant les deux orbites circulaires & concentriques.

De-là il ſuit qu'en 1781, ayant quatre degrés de moins en longitude, cette Planète fut ſtationnaire le 2 Mars, à $83^d\ 57'$ d'aſcenſion droite, c'eſt-à-dire treize jours avant la première obſervation de M. Herſchel, en ſorte que ſi le haſard eût

eût dirigé son télescope vers cette Étoile onze jours plus tôt, il ne se seroit point aperçu de son mouvement, & peut-être cette découverte curieuse eût été perdue pour nous.

Pour calculer dès-à-présent la véritable orbite de cette Planète, il ne faudroit que retrouver quelque vestige de son apparition au temps où l'on a fait les catalogues d'Étoiles que nous avons & dans lesquels elle devroit se trouver.

M. Bode, Astronome de Berlin, qui a suivi la Planète depuis le mois d'Août 1780, a donné un Mémoire à ce sujet dans le premier volume de ses Éphémérides Allemandes pour 1784, imprimé au mois de Septembre 1781; il y rapporte d'abord une hypothèse circulaire, dans laquelle il suppose la distance 18,928. Il dit ensuite dans ce Mémoire, que l'Étoile 964 du Catalogue de Mayer, indiquée pour 1756, a $348^d\ 0'\ 2''$ d'ascension droite, & $6^d\ 2'\ 3''$ de déclinaison, pourroit bien être la Planète de Herschel; M. Bode n'a trouvé aucune Étoile dans ce point-là, quelque recherche qu'il ait faite avec sa lunette; mais il faudroit savoir dans quelle année & dans quel mois Mayer avoit fait l'observation de cet Astre, pour avoir une position exacte & dont on put faire usage.

Au mois d'Avril 1782, M. Bode a fait sur cette Planète un second Mémoire destiné au troisième volume des Mémoires de la Société des Physiciens de Berlin, & qui sera aussi dans ses Éphémérides pour 1785; il observe que Tycho dans son Catalogue, place une Étoile de la sixième grandeur au-dessus de l'Étoile μ de la queue du Capricorne, *n.°* 27 de son Catalogue. Hévélius ne put la retrouver, & c'est-là en effet que notre Planète devoit être en 1587, suivant le calcul de M. Bode; mais notre Planète est bien petite pour avoir été observée par Tycho-Brahé.

On pouvoit sur-tout examiner les étoiles du Zodiaque de la Caille, vers le point équinoxial où la Planète devoit être à la fin de 1761 & au commencement de 1762, temps où cet habile Observateur travailloit à son Catalogue d'Étoiles zodiacales, imprimé dans les Éphémérides de 1765 à 1784.

MOIS & JOURS.		TEMPS VRAI.			ASCENSION DROITE.			DÉCLINAISON.		
		H.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.	S.
Mai.	28	8.	49.	30	87.	5.	3	23.	37.	57.
Juillet.	17	15.	11.	25	90.	19.	17	23.	40.	11.
	18	15.	4.	20	90.	22.	54	23.	40.	17.
	19	15.	14.	8	90.	26.	30	23.	40.	18.
	20	15.	5.	7	90.	30.	5	23.	40.	21.
	21	14.	45.	0	90.	33.	28	23.	40.	22.
	24	15.	8.	14	90.	44.	3	23.	40.	26.
	26	15.	6.	11	90.	51.	3	23.	40.	27.
	29	15.	21.	49	91.	1.	6	23.	40.	27.
	30	15.	19.	46	91.	4.	24	23.	40.	25.
	31	15.	32.	31	91.	7.	38	23.	40.	25.
Août.	2	15.	30.	52	91.	14.	12	23.	40.	24.
	3	15.	18.	25	91.	17.	22	23.	40.	25.
	4	15.	9.	30	91.	20.	29	23.	40.	26.
	8	15.	36.	24	91.	32.	56	23.	40.	23.
	12	15.	36.	6	91.	44.	41	23.	40.	22.
	15	15.	52.	28	91.	53.	12	23.	40.	22.
	16	15.	55.	28	91.	55.	51	23.	40.	17.
	21	15.	16.	45	92.	8.	49	23.	40.	14.
	26	16.	32.	6	92.	21.	7	23.	40.	8.
Septembre.	5	15.	33.	28	92.	41.	15	23.	40.	0.
	10	16.	20.	18	92.	49.	58	23.	39.	59.
	14	15.	53.	42	92.	55.	36	23.	39.	57.
	15	15.	33.	57	92.	56.	59	23.	39.	57.
	28	15.	30.	44	93.	8.	39	23.	39.	57.
Octobre.	5	17.	24.	32	93.	10.	50	23.	40.	0.
	7	17.	17.	55	93.	11.	2	23.	40.	5.
	10	17.	34.	22	93.	10.	41	23.	40.	11.
	17	10.	1.	35	93.	8.	26	23.	40.	15.
	22	15.	50.	12	93.	4.	29	23.	40.	25.

Une chute effroyable a interrompu le cours des Observations de M. Messier, le 6 Novembre 1781.

Observations de M. Méchain, à Paris.

On a marqué d'un *d* les observations que l'on croit un peu moins exactes que les autres.

MOIS & JOURS.	TEMPS MOYEN.	ASCENSION DROITE apparente.	DÉCLINAISON.
	H. M. S.	*D. M. S.*	*D. M. S.*
1781. Avril. 25	9. 47. 0	85. 15. 27	23. 35. 34.
Mai. 5	9. 2. 0	85. 45. 34	23. 36. 36.
7	9. 6. 0	85. 52. 1	23. 36. 46.
Décembre. 8	10. 5. 0	91. 34. 30	23. 42. 37. *d.*
9	8. 54. 50	91. 32. 14 *d.*	23. 42. 42.
10	10. 13. 14	91. 29. 10	23. 42. 40.
12	10. 10. 9	91. 23. 31	23. 42. 47.
14	9. 38. 38	91. 18. 19 *d.*	23. 43. 0.
20	8. 58. 30	91. 1. 10	23. 43. 5.
22	9. 14. 40	90. 55. 47	23. 43. 5.
23	9. 13. 12	90. 52. 35 *d.*	23. 43. 6.
29	8. 12. 30	90. 36. 0	23. 43. 12.
1782. Janv. 3	7. 40. 0	90. 22. 2	23. 43. 17.
6	8. 6. 10	90. 14. 8	23. 43. 21.
18	8. 16. 30	89. 43. 25	23. 43. 25.
26	6. 10. 0	89. 26. 14	23. 43. 27.
Février. 1	7. 20. 46	89. 14. 20	23. 43. 25.
15	6. 47. 30	88. 54. 1	23. 43. 12.
16	6. 29. 0	88. 53. 0	23. 43. 12.
17	6. 29. 46	88. 52. 6	23. 43. 12.
18	6. 27. 0	88. 51. 3	23. 43. 16.
20	6. 32. 0	88. 49. 13	23. 43. 13. $\frac{1}{2}$
21	6. 29. 0	88. 48. 23	23. 43. 12.
Mars. 4	6. 52. 0	88. 43. 10	23. 43. 12.
11	8. 47. 0	88. 43. 42	23. 43. 12.
16	9. 0. 0	88. 46. 0	23. 43. 6.
Avril. 4	9. 37. 0	89. 7. 37	23. 43. 11.
Mai. 7	9. 26. 0	90. 27. 38	23. 43. 11.
13	9. 1. 0	90. 46. 43	23. 43. 8.
Août. 16	16. 16. 0	96. 35. 4	23. 36. 4.
21	16. 19. 0	96. 49. 5	23. 35. 32.
23	16. 30. 0	96. 54. 27	23. 35. 27. *d.*

Observations de M. d'Agelet, faites à Paris, à l'École Royale militaire, avec le Mural de 7 pieds ½ de rayon, qui appartient à M. Bergeret.

MOIS & JOURS.	TEMPS VRAI.	ASCENSION DROITE apparente.	DÉCLINAISON APPARENTE.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.
1782. Janv. 26	9. 43. 38	89. 25. 29	23. 43. 31.
Février. 6	8. 33. 31	89. 5. 56	23. 43. 28.
8	8. 25. 23	89. 2. 39	23. 43. 22.
13	8. 5. 17	88. 56. 0	23. 43. 21.
16	7. 53. 30	88. 52. 52	23. 43. 16.
17	7. 49. 34	88. 51. 48	23. 43. 16.
27	7. 11. 5	88. 44. 41	23. 43. 12.
Mars. 4	6. 42. 30	88. 43. 24	23. 43. 8.
8	6. 37. 44	88. 43. 14	23. 43. 9.
11	6. 26. 46	88. 43. 57	23. 43. 10.
12	6. 23. 9	88. 44. 16	23. 43. 6.
13	6. 19. 30	88. 44. 25	23. 43. 7.
15	6. 12. 19	88. 45. 28	23. 43. 9.

Observations de M. Wargentin, faites à Stockolm.

Les trois dernières ont été faites à Upsal.

MOIS & JOURS.	TEMPS VRAI.	LONGITUDE.	LATITUDE.
	H. M.	S. D. M. S.	D. M. S.
1781. Sept. 14	11. 50	3. 2. 41. 46	....
30	9. 53	3. 2. 53. 41	0. 14. 5,9.
Octobre. 16	8. 56	3. 2. 53. 15	0. 14. 9.
Novembre. 3	8. 38	3. 2. 36. 24	0. 14. 45.
23	7. 29	3. 2. 1. 5	0. 15. 2,6.
Décembre. 9	6. 27	3. 1. 23. 55	0. 15. 24,7.
1782. Janv. 1	7. 46	3. 0. 25. 34	0. 15. 29.
23	5. 49	2. 29. 34. 29	0. 15. 37.
Février. 11	5. 38	2. 29. 3. 34	0. 17. 34.
27	6. 21	2. 28. 51. 13	0. 17. 15.
Mars. 6	5. 53	2. 28. 49. 43	0. 15. 10.
17	8. 31	2. 28. 52. 39	0. 15. 16.
25	8. 12	2. 28. 59. 20	0. 15. 9.
Avril. 2	9. 12	2. 29. 9. 1	0. 15. 17.
6	7. 47	2. 29. 14. 59	0. 15. 15.
16	8. 38	2. 29. 23. 15	0. 17. 3.
28	10. —	3. 0. 0. 57	....
Mai. 6	10. 37	3. 0. 22. 34	0. 15. 5.
7	10. 31	3. 0. 25. 19	0. 14. 54.

Il y a une suite d'Observations dans les Éphémérides de Milan, pour 1783, qui vont du 12 Mai au 23 Octobre 1781.

Observations de M. Jean-René Lévesque, faites au Collége royal, à Paris.

MOIS & JOURS.		TEMPS MOYEN.	ASCENSION DROITE apparente.	DÉCLINAIS. APPARENTE.	ERREUR de mon hypot. sur la LONGITUD.
1782. Sept.	2	14h 50′	97d 18′ 44″	23d 34′ 35″	+ 2′ 24″
	4	13. 57	97. 22. 48	. . . .	+ 2. 21.
	5	15. 38	97. 24. 59	23. 33. 55	+ 2. 23.
	6	15. 12	97. 26. 57	23. 33. 48	+ 2. 18.
	8	16. 9	97. 30. 31	23. 33. 47	+ 2. 2.
	9	16. 3	97. 32. 50	23. 33. 47	+ 2. 29.
	10	16. 12	97. 34. 38	23. 33. 47	+ 2. 27.
	13	16. 6	97. 39. 44	23. 33. 33	+ 2. 29.
	16	15. 48	97. 44. 22	23. 33. 11	+ 2. 26.
	23	15. 48	97. 53. 18	23. 33. 11	+ 2. 26.
	25	14. 0	97. 55. 32	23. 33. 8	+ 2. 38.

Ces observations ont été faites avec la lunette achromatique de 3 pieds ½, dont j'ai donné les dimensions dans le quatrième volume de mon *Astronomie, page 664,* garnie d'un nouveau micromètre de M. Mégnié.

M. Lévesque, dont j'ai publié plusieurs fois les calculs, s'occupe actuellement des observations, avec autant de succès que de courage, dans mon observatoire du Collége royal. Je viens d'y placer, au mois de Septembre 1782, un mural de trois pieds de rayon, dont M. Godin a donné la description dans nos Mémoires de 1731, & qui a long-temps été dans une maison où M. Godin, M. de Fouchy & M. Bouguer ont habité successivement, rue des Postes, près l'Estrapade.

Voilà tout ce que j'ai pu faire jusqu'à présent sur un Astre qui occupera long-temps les Astronomes, & dont il sera souvent parlé dans nos Mémoires, jusqu'à ce qu'on ait déterminé tous ses élémens, & qu'on connoisse bien l'orbite de la *Planète de Herschel.*

OBSERVATION

OBSERVATION

Relative au second Mémoire contenu dans ce volume, page 385, *sur le moyen de dissoudre la Platine par l'Acide nitreux.*

Par M. TILLET.

IL a été dit vers la fin de ce Mémoire, *pag. 435 & 436,* que *l'acide marin déphlogistiqué, par la distillation de cet acide sur la manganèse, attaque vivement, à l'aide de la chaleur, les précipités de platine .... & parvient en assez peu de temps à les dissoudre, &c.* ce fait qui est bien constant, demande une explication : lorsqu'on distille au bain de sable de l'acide marin sur la manganèse, la plus grande partie de cet acide qui passe dans le ballon, est plus foible que celle qui reste encore dans la cornue, & dont la manganèse est pénétrée. Si, pour obtenir cette dernière portion de l'acide marin, on verse dans la cornue une certaine quantité d'acide vitriolique, alors l'acide marin le plus concentré se dégage de la manganèse; & c'est cette portion plus concentrée de ce dernier acide, dont j'ai fait usage pour dissoudre des précipités de platine & même des lames d'or fin, quoique ce métal soit plus capable, en cet état, de résister à l'action de l'acide que la platine précipitée de la dissolution par l'acide nitreux, & réduite à un état pulvérulent.

Mais j'ai reconnu que cette dernière portion d'acide marin, distillée sur la manganèse & plus concentrée que la première, n'étoit pas pure; qu'elle contenoit une petite quantité d'acide vitriolique, & que ce n'étoit qu'à la faveur de ce mélange qu'elle attaquoit vivement l'or & la platine, en acquérant ainsi la grande propriété de l'eau régale. Je n'ai pas pu douter que l'énergie de cet acide marin déphlogistiqué ne fût dûe à son mélange avec un peu d'acide vitriolique,

quelque concentré que fût le premier de ces acides, lorſque par des expériences répétées, j'ai vu que la première portion d'acide marin déphlogiſtiqué qui paſſe d'abord dans le ballon, ſans l'intermède de l'acide vitriolique, n'a preſque point d'action ſur l'or ni ſur la platine, & en acquiert au contraire une très-conſidérable ſur ces deux métaux dès qu'on y joint un peu d'acide vitriolique concentré.

En verſant une certaine quantité de ce dernier acide ſur la portion d'acide marin retenue dans la manganèſe, on n'eſt pas ſûr exactement de la quantité d'acide vitriolique qui paſſe dans la diſtillation; & alors le mélange des deux acides peut produire plus ou moins d'effet, ſuivant les proportions dans leſquelles ce mélange ſe trouve fait après la diſtillation.

Il eſt plus ſimple, lorſqu'on a une fois diſtillé l'acide marin ſeul ſur la manganèſe, d'y mêler une quantité déterminée d'acide vitriolique concentré, & par ce moyen de varier avec préciſion les mélanges dans toutes les proportions qu'on juge à propos: c'eſt celui que j'ai employé dans un grand nombre d'expériences où j'ai eu pour but la diſſolution de l'or & de la platine. La combinaiſon des deux acides a été à-peu-près telle que je l'aurois obtenue par la diſtillation; & d'ailleurs ces acides étant deſtinés à ſupporter enſemble, dans un matras, une forte ébullition, ils devoient s'y combiner auſſi parfaitement qu'ils l'auroient fait dans une cornue & à la chaleur modérée d'un bain de ſable.

Une trop grande quantité d'acide vitriolique, telle qu'une partie égale en volume à celle de l'acide marin déphlogiſtiqué, met obſtacle à la diſſolution; un tiers même du premier de ces acides ſur deux tiers du ſecond, ne la permet que juſqu'à un certain point: mais un ſixième ſeulement d'acide vitriolique concentré ſur cinq ſixièmes d'acide marin déphlogiſtiqué, m'a paru une proportion aſſez convenable pour que le mélange diſſolve entièrement les précipités de platine, enlève à l'or fin réduit en lames minces plus de la moitié de ſon poids, & puiſſe bientôt le diſſoudre en total, ſi on

expoſe de nouveau la portion d'or qui reſte à l'action du même diſſolvant.

S'il y a un inconvénient, pour la diſſolution qu'on veut obtenir, à faire entrer trop d'acide vitriolique dans le mélange des deux acides, on ne court aucun riſque de n'en employer qu'un neuvième, en volume comme je l'ai dit, ou même un douzième pour compoſer le diſſolvant, parce que l'acide marin s'évapore beaucoup plus vîte pendant l'ébullition que l'autre acide, & ſe réduit peu-à-peu à la quantité où il doit être pour attaquer fortement l'or & la platine, en acquérant ſimplement de l'énergie par l'acide vitriolique, & ſans que ce dernier acide y domine.

Pendant qu'un mélange d'acide marin déphlogiſtiqué & d'acide vitriolique concentré, fait dans des proportions convenables, a la plus grande action ſur l'or fin réduit en lames, & ſur les précipités de platine, il n'en a qu'une très-foible & à peine ſenſible ſur la platine ductile & réduite en lames fort minces : ici ce dernier métal, dans un certain état, réſiſte à un diſſolvant très-actif; & l'or fin, dans ce même état, n'y réſiſte pas : là, comme je l'ai prouvé dans mon Mémoire, l'acide nitreux pur diſſout parfaitement la platine ductile, à la faveur du mélange de l'or & de l'argent avec cette même platine, & laiſſe abſolument intact l'or qui faiſoit partie des trois métaux.

J'ai tenté inutilement de faire attaquer l'or fin par un mélange d'un ſixième d'acide vitriolique concentré, & de cinq ſixièmes d'acide marin dans ſon état ordinaire, pourvu de ſon phlogiſtique & tiré du même flacon duquel étoit ſorti celui que j'avois diſtillé ſur la manganèſe : l'or fin en lame que j'ai employé pour cette expérience, n'a pas ſouffert le moindre déchet; la liqueur, quoique réduite à moitié ou environ, n'a pas acquis la couleur jaune & foncée qui annonce la diſſolution du métal, & la lame d'or avoit conſervé tout ſon brillant métallique.

J'ai répété cette même expérience en employant un autre acide fumant, très-concentré & qui, au moment de ſon

mélange avec un ſixième d'acide vitriolique, eſt entré dans une ſi grande effervefcence que, par l'effet d'un bouillonnement ſubit, une partie de la liqueur a jailli avec impétuoſité & s'eſt diſperſée, en forme de pluie, autour du vaſe qui la contenoit. De ce mélange, ſi violent en apparence, il n'eſt réſulté aucun indice ſenſible de diſſolution; tandis qu'elle a lieu conſtamment, comme je l'ai dit, quand l'acide marin, déphlogiſtiqué parfaitement, entre dans le mélange dont l'effervefcence eſt aſſez modérée dans l'inſtant où il ſe fait. Je n'ai perdu en effet, dans l'expérience dont il s'agit ici, qu'un cent vingt-huitième de grain ſur l'or fin que j'ai employé, quoique la liqueur ait bouilli long-temps dans un matras, à feu nu & ſe ſoit trouvé réduite à moitié, à la fin de l'opération: on pourroit même attribuer avec vraiſemblance la cauſe d'une perte ſi légère, ſur le poids de l'or, à toute autre choſe que l'action des deux acides combinés.

Je dois faire obſerver ici qu'il faut être attentif à la qualité de l'acide marin qu'on ſe propoſe de diſtiller ſur la manganèſe, afin qu'étant uni à l'acide vitriolique, il opère ſûrement la diſſolution. J'ai reconnu, par ma propre expérience, qu'un acide marin bon en lui-même, très-concentré & propre à différens uſages, étant ainſi préparé, par l'intermède de la manganèſe, & joint à un ſixième d'acide vitriolique, n'a guère plus d'action quelquefois ſur l'or & la platine, que s'il eût été employé dans ſon état ordinaire & ſans avoir reçu cette préparation. Il paroît néceſſaire que cet acide ſoit très-pur & dépouillé de toute ſubſtance capable de paſſer avec lui dans la diſtillation, & par ſa nature, de rendre abſolument inutile l'effet que produit ſur lui la manganèſe.

L'acide marin qui, au ſortir de cette diſtillation, a une odeur vive & piquante, qui prend enſuite une légère teinte de couleur brune, n'a pas acquis, ou n'a que très-foiblement la propriété de diſſoudre l'or & la platine, à l'aide de l'acide vitriolique; au lieu qu'il m'a paru l'avoir acquiſe certainement, lorſqu'après la diſtillation, il eſt blanc comme l'eau diſtillée, & exhale une odeur douce & aſſez agréable.

Je me borne à ces faits dans l'explication qu'exigeoit l'endroit de mon Mémoire que j'ai cité : ils donneront lieu sans doute à d'autres expériences sur ce même sujet, & conduiront à des recherches plus délicates que celles dont il s'agit ici. En considérant la nouvelle eau régale dont je viens de parler, & dans la composition de laquelle l'esprit de nitre n'entre point, on se trouve porté à croire que l'acide marin est l'agent principal dans les dissolutions opérées par sa combinaison, soit avec l'acide vitriolique, soit avec l'acide nitreux, puisque ceux-ci ne peuvent, ni réunis, ni séparés, produire ce grand effet sur certains métaux, tandis que l'acide marin uni à l'un ou à l'autre détermine bientôt la dissolution, & semble n'avoir besoin que d'être aidé dans son action, dont le principe dissolvant réside en lui, & se manifeste sur le champ à la faveur d'une petite quantité d'un autre acide, tel que l'acide vitriolique, qui anime, en quelque sorte ce principe & sert à le développer.

Comme l'action plus ou moins vive qu'exerce sur l'or & la platine, l'acide marin combiné avec une certaine quantité d'acide vitriolique, paroît dépendre beaucoup de l'intermède par lequel on a obtenu le premier de ces acides, du degré de concentration auquel on l'a porté, de la pureté dont il est, & de la qualité, peut-être, de la manganèse sur laquelle on l'a distillé, je me propose de continuer les expériences que j'ai commencées à ce sujet, de chercher le point précis où l'acide marin jouit de la plus grande énergie, pour concourir, avec l'acide vitriolique, à la dissolution des deux métaux, & de mettre sous les yeux de l'Académie les détails de cette opération, si je peux parvenir à la rendre aussi simple en elle-même, que constante dans toute l'étendue de l'effet que j'en ai vu résulter plusieurs fois.



OBSERVATIONS BOTANICO-MÉTÉOROLOGIQUES,

Faites au château de Denainvilliers, proche Pithiviers en Gâtinois, pendant l'année 1778.

Par M. DU HAMEL.

AVERTISSEMENT.

LES Obſervations météorologiques ſont diviſées en ſept colonnes, de même que les années précédentes. On s'eſt toujours ſervi du thermomètre de M. de Reaumur, & on part du point zéro, ou du terme de la glace: la barre à côté du chiffre indique que le degré du thermomètre étoit au-deſſous de zéro; quand les degrés ſont au-deſſus, il n'y a point de barre; o déſigne que la température de l'air étoit préciſément au terme de la congélation.

Il eſt bon d'être prévenu que dans l'Automne, quand il a fait chaud pluſieurs jours de ſuite, il gèle, quoique le thermomètre, placé en dehors & à l'air libre, marque 3 & quelquefois 4 degrés au-deſſus de zéro; ce qui vient de ce que le mur & la boîte du thermomètre ont conſervé une certaine chaleur; c'eſt pourquoi on a mis dans la ſeptième colonne, *Gelée*.

Les Obſervations ont été faites à huit heures du matin, à deux heures après midi, & à onze heures du ſoir.

Nota. Les Obſervations du baromètre, à commencer du 1.er du mois de Janvier, ont été faites ſur un baromètre callé ſur celui de l'Obſervatoire, qui eſt 3 lignes plus haut que celui dont nous nous ſervions les années précédentes.

JANVIER.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces*	*lignes*	
1.	N.	— 1 ½.	0 ½.	— 2.	27.	8	couvert & neigeux.
2.	O.	1.	1.	1.	27.	10	couvert & neige.
3.	S. O.	1.	½.	3.	27.	9	beau avec nuages.
4.	S. E.	3.	0.	½.	27.	7	couvert & bruine.
5.	N.	1.	0.	3.	27.	9	neigeux.
6.	S.	4 ½.	— 2.	2.	28.	0	couvert.
7.	N.	2.	0.	2.	28.	0	*idem.*
8.	N.	5 ½.	4.	5 ½.	28.	0	mat. brouil. l'ap. m. beau avec nuag.
9.	N.	2 ½.	0.	1 ½.	27.	11	couvert.
10.	S. E.	2.	0.	1 ½.	27.	9	couvert & bruine.
11.	O.	1 ½.	— ¼.	2.	27.	10	couvert; le soir neige.
12.	E.	2.	1 ½.	5 ¼.	27.	6	couv. mat. l'ap. m. beau avec nuag.
13.	S.	3 ½.	2.	0.	27.	3	brouillard.
14.	E.	4.	5.	5.	26.	9	pluvieux & vent.
15.	S. O.	4.	7.	6.	27.	0	pl. grand vent; ton. très-fort à 4h s.
16.	S.	5.	8 ½.	4 ½.	27.	5	venteux & nuageux.
17.	S.	3 ½.	4 ½.	4.	27.	7	brouillard.
18.	S.	3.	5.	5.	27.	5	couvert & bruine.
19.	S.	5.	8.	5.	27.	6	couvert.
20.	S.	1 ½.	5.	5.	27.	7	couvert & venteux.
21.	S. O.	4 ½.	7.				grand vent & pluie.
22.	S. O.	3 ½.	6.	4.	27.	4	pluvieux & grand vent.
23.	S. O.	4.	7.	5.	27.	4	venteux & nuageux.
24.	S.	5.	9.	7.	27.	3	couvert.
25.	S.	5.	8.	6.	27.	4	*idem.*
26.	N.	0.	1.	— 1 ½.	27.	9 ½	couvert & grand vent.
27.	N.	— 3 ½.	0.	2 ½.	27.	8	beau avec nuages.
28.	N.	1 ½.	½.	2 ½.	27.	10	beau.
29.	N.	3.	0.	2 ½.	27.	11	*idem.*
30.	E.	2.	— 0 ½.	½.	27.	11	couvert; le soir bruine.
31.	E.	2.	0.	½.	27.	10	couvert & bruine.

Il eſt tombé beaucoup de neige au commencement de ce mois, cela a empêché le peu de gelée qui eſt venue, de pénétrer ſi avant dans la terre; le 15, à quatre heures & demie du ſoir, eſt venu un grand coup de vent, & il a tonné un très-fort coup.

On a continué, vers la fin de ce mois, à parer les vignes; l'eau commençoit à pénétrer dans les terres.

La rivière d'Eſſonne a été d'une moyenne hauteur.

Le blé s'eſt vendu au marché, vingt-une livres le ſac; l'orge, huit livres dix ſous; l'avoine, ſept livres dix ſous; le vin de la récolte de 1777, s'eſt vendu juſqu'à ſoixante-cinq livres le poinçon.

FÉVRIER.

FÉVRIER.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom. pouces	lignes	État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	E.	— 1.	0.	— ½.	27.	11½	brouillard.
2.	S. E.	1¾.	— ½.	1¼.	28.	1	brouillard & givre.
3.	E.	2½.	½.	1½.	28.	2	*idem.*
4.	N. E.	2¾.	½.	½.	27.	10	brouillard & givre avec verglas.
5.	E.	1½.	5.	1.	27.	8	beau avec nuages.
6.	E.	2½.	5.	5½.	27.	6	couvert & bruine.
7.	S.	3½.	7.	3.	27.	9	couvert.
8.	S.	0.	7.	1½.	27.	8	beau.
9.	N. E.	0.	5½.	3½.	27.	10	beau avec nuages.
10.	N.	2½.	7.	2.	27.	10	couvert; le ſoir brouillard.
11.	N.	½.	2¼.	1.	28.		couvert.
12.	N.	0.	1.	½.	28.	½	*idem.*
13.	N.	— ½.	2½.	— ½.	28.	½	beau avec nuages.
14.	O.	— 1.	½.	1.	27.	4	neige & vent.
15.	N.	1.	2.	½.	27.	3	*idem.*
16.	N. O.	½.	1½.	— 1½.	27.	0	beau avec nuag. neigeux dans la nuit.
17.	O.	2¼.	1.	— ½.	27.	1	neigeux.
18.	O.	2.	2.	0.	27.	4	couvert & neige.
19.	O.	1.	3.	— ½.	27.	6	neige; l'après midi beau avec nuages.
20.	S. O.	2.	3½.	0.	27.	8	beau avec nuages; le ſoir neige.
21.	S. O.	0.	4.	2.	28.	0	couvert.
22.	S.	2.	5½.	5.	28.		couvert & bruine.
23.	S.	5.	7.	4.	27.	7	grand vent.
24.	S. O.	2½.	6.	0.	27.	4	grand vent & nuageux; le ſoir neige.
25.	N. O.	— 1.	2½.	1.	27.	3	grand vent & neige.
26.	N. O.	2.	0.	— 1.	27.	6	couvert & neigeux.
27.	S.	3½.	2.	1½.	27.	5	beau avec nuag. neigé dans la mat.
28.	S.	2.	5.	3½.	27.	2	couvert; il a neigé dans la nuit.

Ce mois a été froid & humide : il eſt ſurvenu de grands brouillards au commencement, avec de la gelée, ce qui a occaſionné une ſi grande quantité de givre que beaucoup de branches d'abres ont été caſſées.

Le milieu & la fin ont été fort inconſtans : il eſt tombé tantôt de la pluie, tantôt de la neige qui fondoit à meſure qu'elle tomboit, ce qui a rendu la terre ſi molle que l'on n'a pu labourer pour faire les mars ; on n'a fait commencer les labours qu'à la fin du mois, & en général on n'a pas fait grand ouvrage à la campagne durant ce mois.

MARS.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.	État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.		
1.	S.	2.	6.	4.	27. 2	pluvieux.
2.	S.	2.	6½.	3.	27. 1	beau & nuageux.
3.	N.	2½.	8.	4.	27. 1	pluvieux.
4.	N.	3½.	3½.	2.	27. 2	couvert & grand vent.
5.	N. O.	1.	2½.	1½.	27. 3	couvert & bruine.
6.	N.	½.	4½.	2.	27. 5	beau avec nuages.
7.	N. O.	½.	2½.	2.	27. 5	couvert & bruine.
8.	N. O.	½.	3.	3½.	27. 5	couvert.
9.	N. O.	2.	4.	2½.	27. 6	*idem.*
10.	N. O.	1½.	3½.	2½.	27. 8	couvert & bruine.
11.	N. O.	1½.	4½.	3½.	27. 9	couvert.
12.	N.	2.	6½.	3.	27. 10½	*idem.*
13.	N.	— 2½.	6.	2.	28. 0	beau avec vent.
14.	N.	1½.	8.	1.	27. 11½	*idem.*
15.	N.	0.	3.	0.	27. 11	beau & nuageux.
16.	N	— 1½.	7.	2.	27. 11	beau avec nuages.
17.	N.	1.	8½.	2½.	27. 11½	beau, & le soir Aurore boréale.
18.	S.	1.	12.	6½.	27. 10	beau.
19.	E.	2.	14.	6½.	27. 7½	*idem.*
20.	S.	5.	10½.	8.	27. 5½	couvert; le soir pluie.
21.	S.	5.	8½.	10.	27. 5½	couvert & pluvieux.
22.	S.	8.	12.	8.	27. 5	pluvieux & grand vent.
23.	S.	7.	8.	6.	27. 4	pluie & grand vent.
24.	S. O.	7½.	8½.	4½.	27. 3	pluv. & grêle; soir il a ton. & gr. vent.
25.	N.	4.	8½.	3½.	27. 5	pluie & grand vent.
26.	N.	0.	5.	½.	28. 0	beau, nuag. vent, gel. à gl. aur. bor.
27.	N.	— 1.	8½.	2.	28. 1	beau; il a gelé à glace.
28.	S. E.	1½.	9½.	6.	28. 1	*idem.*
29.	S. O.	5½.	11½.	8.	28. ½	couv. & nuag. il a bruiné dans la m.
30.	S.	5½.	13½.	10.	28. 0	couvert, vent & pluie.
31.	S.	8.	10½.	9½.	27. 11½	couvert & grand vent.

Ce mois a été au commencement froid & humide : on n'a commencé à labourer pour les mars qu'à la fin de Février, après que l'eau qui avoit été produite par la neige a eu imbibé les terres, & on a continué durant ce mois. Vers le milieu il eſt venu des beaux jours, & on en a profité pour ſemer les avoines : les vignerons ont taillé la vigne au commencement de ce mois; ils n'ont point trouvé la moëlle du ſarment noire.

Le blé de la récolte de 1777 s'eſt vendu au marché vingt-trois livres le ſac.

Le vin, tant de la récolte de 1776 que de la récolte de 1777, s'eſt vendu, l'un dans l'autre, ſoixante livres le poinçon.

L'avoine, ſept livres dix ſous le ſac.

La rivière d'Eſſonne a un peu augmenté.

Il y a eu des abricotiers en fleurs, à la fin du mois; cependant rien n'avoit encore pouſſé. La campagne étoit encore comme à Noël; on ne voyoit point d'hirondelles.

AVRIL.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.	État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	S.	8½.	12.	7.	27. 9	beau avec des nuag. le mat. bruine.
2.	S.	4.	19.	12.	27. 5	le matin brouillard, ensuite beau.
3.	S. O.	8½.	16.	11.	27. 8	vent, nuag. le soir écl. & ton. éloig.
4.	S.	8½.	16.	10.	27. 8	couvert le soir, pluie.
5.	S.	7½.	13.	8.	27. 10	couv. & beau avec nuag. l'apr. midi.
6.	S.	5.	17½.	11½.	27. 9	beau.
7.	S.	7.	19.	14.	27. 10	beau, il a tonné & écl. l'après-midi.
8.	N.	9½.	21.	14.	27. 9½	beau, apr. m. ton. au loin, écl. le soir.
9.	E.	9.	17.	11½.	27. 10	nuag. tombé quelques gout. d'eau.
10.	S. E.	9½.	19½.	12.	27. 11	beau, le soir ton. éclairs & pluie.
11.	N.	9.	19.	10.	27. 11	beau.
12.	N.	9.	18.	12.	27. 11	*idem.*
13.	N. O.	8.	17.	11.	27. 8	nuageux.
14.	N.	6½.	½.	5.	27. 8½	couvert & vent froid.
15.	S.	5.	7½.	4.	27. 6	pluvieux.
16.	N.	2½.	7.	3.	27. 7	gelée bl. le mat. couvert, de la grêle.
17.	N.	0½.	9.	6.	27. 8	gelée bl. le mat. couvert l'apr. midi.
18.	O.	1½.	10.	8½.	27. 10	*idem.*
19.	O.	2½.	12½	8.	27. 10	gelée blanc. le matin, ensuite beau.
20.	N. O.	5.	11½.	5.	27. 6	pluvieux.
21.	O.	4.	8½.	5.	27. 3	nuageux avec de la grèle & gr. vent.
22.	N.	3.	6.	4.	27. 4	pluvieux, il a tonné l'après-midi.
23.	N.	2½.	7.	4½.	27. 6	le matin pluv. & l'apr. midi couv.
24.	N.	2.	9½.	6.	27. 6	couv. & vent fr. gelée bl. le matin.
25.	N.	2.	7½.	5.	27. 9	couvert & bruine.
26.	N.	4½.	7½.	5½.	27. 4	*idem.*
27.	S.	4½.	13½.	7½.	27. 4	nuageux & pluvieux.
28.	S.	5.	14½.	9.	27. 4	beau avec des nuages.
29.	S. O.	9.	14.	10½.	27. 3	*idem.*
30.	S.	8.	13½.	9½.	27. 2½	pluvieux.

Le 2 de ce mois on a vu des hirondelles qui ne venoient que d'arriver. Le 3, il a éclairé le soir de tous côtés.

Le rossignol a commencé à chanter à Denainvilliers le 24. Durant ce mois il a tonné, éclairé & grêlé, l'air étoit cependant froid. Depuis le 16 jusqu'au 20, il a gelé à glace les matins, ce qui a un peu gâté les vignes qui avoient été *marées** principalement celles qui étoient les plus avancées.

Vers la fin du mois il est venu des pluies froides qui ont un peu fait jaunir les blés.

Le 23, les cerisiers étoient en fleurs; à la fin du mois les pruniers étoient aussi fleuris.

En général ce mois a été froid & humide, avec de grands vents, cependant les avoines & orges, malgré le *froid*, ont bien levé.

---

* Cela signifie *vignes fumées avec les marcs.*

MAI.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.	État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	S.	8.	14.	9.	27. 6	pluvieux; il est tombé de la grêle.
2.	S. O.	7½.	13.	12.	27. 6	nuageux.
3.	S. E.	9.	21.	16.	27. 5	*idem.*
4.	S.	13.	14.	11.	27. 7	pluvieux.
5.	S. O.	7.	15.	10.	27. 11	beau avec des nuages & bruine.
6.	S.	8.	15.	11.	27. 11	beau avec des nuages.
7.	S.	9½.	15.	12.	27. 10	pluvieux.
8.	O.	9.	15½.	10.	27. 10	beau avec des nuages.
9.	O.	9.	15½.	12.	27. 11	le matin couv. & l'apr. midi pluie.
10.	N.	8½.	22.	12.	28. 0	beau; il a gelé blanc le matin.
11.	E.	10.	21.	14.	27. 10	beau.
12.	O.	10.	20.	12.	27. 8	*idem.*
13.	S.	9.	17.	12½.	27. 7½	beau avec nuag. a écl. le soir & plu.
14.	S. O.	9½.	14.	10.	27. 10	pluvieux.
15.	S. O.	8.	15.	11½.	28. 0	le matin pluie, l'apr. midi nuageux.
16.	S. O.	10.	16½.	12½.	28. 0	couv. avec quelq. ray. de s. l'ap. m.
17.	S.	11.	19.	15.	27. 9	beau avec des nuages & du vent.
18.	O.	10.	15.	9.	27. 10	beau avec du vent.
19.	S. O.	6.	17½.	10.	28. 1	beau; v. gel. bl. le m. dans les vall.
20.	N.	7.	19.	12.	28. 1	beau.
21.	N.	9.	20.	13.	27. 11	*idem.*
22.	N.	12.	22.	13.	27. 9	beau, le soir il a éclairé.
23.	N.	10.	13½.	9.	27. 10	pluie le mat. nuag. le soir.
24.	N.	9½.	17.	11½.	27. 8½	beau avec des nuages & du vent.
25.	S.	10½.	15.	11.	27. 8	nuageux, il a tonné & plu.
26.	S. O.	11.	17.	11½.	27. 8	couvert & nuageux.
27.	O.	10½.	11.	9.	27. 9½	pluvieux & venteux.
28.	N. O.	9½.	14.	9.	28. 0	couvert & vent.
29.	N. O.	9½.	15.	12½.	27. 11	couvert; le soir pluie.
30.	N.	11.	17½.	11½.	27. 10	beau avec des nuages.
31.	N. E.	11.	19½.	13.	27. 10	beau avec du vent.

Il eſt venu au commencement de ce mois des pluies froides & des brouillards qui ont fait couler les fruits, principalement la cériſe & les prunes; il y a des endroits où il y en a eu fort peu de noué.

Le temps a été froid & humide, cependant on a ſorti les orangers; le 18, voyant que la ſaiſon avançoit, on a ſemé les féves, pommes de terre de la ſeconde ſaiſon, & autres légumes; au commencement & à la fin du mois les vignes ne montroient pas beaucoup de raiſins, à cauſe de la gelée du mois d'Avril.

Le vin de la récolte de 1776 & 1777, s'eſt vendu, l'un dans l'autre, ſoixante-huit livres, & ſoixante & douze livres le poinçon.

Le blé a valu dix-huit & dix-neuf livres le ſac ou le ſetier, meſure de Paris, peſant 240 livres.

L'avoine, ſix livres dix ſous le ſac.

JUIN.

JUIN.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	O.	10.	23.	14.	28.	0	beau.
2.	O.	12.	17.	12.	27.	11	nuageux & vent.
3.	S.	11.	14.	11.	27.	9	pluie & vent.
4.	S. O.	10.	12.	7.	27.	9	beau avec des nuages & pluie.
5.	S.	7.	16½.	10.	27.	9	beau avec nuages.
6.	N.	10.	17.	10.	27.	6	couvert; le ſoir, pluie & tonnerre.
7.	S.	10.	14.	10.	27.	8½	mat. pluie, enſuite beau avec nuag.
8.	S. O.	10½.	17½.	11.	27.	11	beau avec nuages.
9.	S.	10½.	17.	13.	28.	0	*idem.*
10.	O.	11.	19.	14.	28.	0	*idem.*
11.	E.	12½.	21.	14.	28.	0	beau.
12.	E.	12½.	21.	15.	28.	0	beau avec du vent.
13.	N.	23.	13.	16.	28.	1	*idem.*
14.	N.	12.	23.	15.	28.	½	beau avec nuages.
15.	N. O.	11.	16.	11.	27.	11½	beau avec nuages & du vent.
16.	N. O.	7½.	15½.	11.	27.	10½	couv. gel. bl. pluie, tonn. grêl. le ſ.
17.	N. O.	8.	16.	12.	27.	11	gel. bl. le matin, nuageux, vent.
18.	N. O.	10½.	12.	13.	27.	11	pluvieux.
19.	N.	12.	20½.	13½.	27.	11	couv. le ſoir bruine, tonné au loin.
20.	N.	11.	19½.	16.	28.		beau avec nuages.
21.	N.	12.	19½.	12.	28.	½	beau avec du vent.
22.	N.	12.	20.	16.	28.	0	beau.
23.	N.	16.	24.	16.	27.	11	beau avec du vent.
24.	E.	16½.	26.	16½.	27.	9	beau, l'apr. m. écl. & ton. au loin.
25.	N. O.	15.	21.	16.	27.		beau avec des nuages & du vent.
26.	S.	15½.	23.	17½.	27.	11½	beau.
27.	S. O.	16.	25.	16.	27.	9	beau, vent; ſoir tonn. écl. pluie.
28.	S.	14½.	19.	14.	27.	9	beau avec nuag. & vent; ſoir pluie.
29.	S.	14.	19½.	13.	27.	9	couv. & bruine, il a tonné au loin.
30.	S.	14.	20½.	15.	27.	11	nuag. tombé quelq. gouttes d'eau.

Le commencement de ce mois a été venteux & l'air froid, les pluies qui sont tombées les mois passés ont fait lever des chardons dans les avoines ; les blés se sont raccommodés, ils n'étoient plus si jaunes ; les sainfoins nouveaux n'étoient point forts, mais les vieux étoient bons & assez hauts ; on les a fauchés le 10 & le temps a été assez propre pour les sécher & les enlever : il y a eu quelques jours de pluie, mais cela ne les a point gâtés, on les a serrés bons.

Vers la fin du mois on demandoit de l'eau pour les orges & les avoines qui ont épié fort bas vers le milieu du mois ; dans la plupart des avoines il s'en est trouvé de brûlées.

Le 23, les vignes étoient en pleine fleur, & le temps chaud & sec leur étoit favorable.

La rivière d'Essonne a été fort basse durant ce mois.

JUILLET.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.	État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	S. O.	14½.	17½.	14½.	27. 11	beau avec vent.
2.	N.	14½.	21.	17.	28.	beau.
3.	S. O.	15.	25.	18.	27. 11	beau avec vent.
4.	S. O.	15½.	25.	21½.	27. 11	beau.
5.	S.	18.	29½.	22.	27. 9½	beau; le soir il a éclairé & tonné.
6.	S.	18½.	23½.	20.	27. 10	beau avec nuages.
7.	S.	13½.	15½.	15½.	27. 10½	pluvieux; la nuit a été orageuse.
8.	S. O.	14.	20½.	14½.	28. 0	beau avec nuages; l'ap. m. il a plu.
9.	N.	13½.	17½.	16.	28. 0	beau avec nuages.
10.	N.	15.	22½.	17.	28. 0	beau.
11.	N. O.	15.	22.	16.	28. 0	*idem.*
12.	N.	16.	23½.	18.	28. ½	*idem.*
13.	N.	16½.	23½.	18.	28. 0	*idem.*
14.	N.	17.	27½.	20½.	27. 10½	*idem.*
15.	N.	17.	27½.	20½.	27. 11	beau avec vent.
16.	N.	17½.	27½.	21.	27. 10½	beau; brouillard le matin.
17.	N. O.	17.	21.	15½.	27. 11½	beau avec vent.
18.	N.	15.	20.	16.	27. 10	beau avec nuages & vent.
19.	N.	17½.	24½.	21.	27. 7	beau.
20.	S.	17.	20.	11½.	27. 6	le mat. il a tonné, ensuite vent & pl.
21.	S.	11½.	11½.	12½.	27. 9	pluvieux & venteux.
22.	S. O.	13½.	17½.	14.	27. 10	beau avec nuages.
23.	S.	14.	19.	15½.	27. 10	beau avec nuages & du vent.
24.	S.	17.	23.	17.	27. 9	couvert & vent.
25.	S. E.	13½.	20½.	15.	27. 10	beau avec nuages.
26.	N.	14.	22.	15½.	27. 9	beau avec nuages; le soir éclairs.
27.	S.	15.	21.	15.	27. 10	beau avec vent; tonné & plu la nuit.
28.	S. O.	13.	20.	14.	27. 11½	beau avec vent.
29.	S.	13.	17.	13.	27. 9	couvert, vent & pluie.
30.	S.	13.	19½.	13.	27. 10	couvert, pluie, & il a tonné au loin.
31.	S.	12½.	19½.	13.	27. 10	couvert & pluie.

Au commencement de ce mois il a paru un grand nombre de papillons blancs, principalement dans les avenues, la terre en étoit couverte; on a commencé à ſerrer les ſeigles le 17; ils étoient aſſez hauts & bien grénés.

Le 27, on a commencé la moiſſon des fromens; il eſt venu des foudres de vent vers la fin du mois qui ont bouleverſé les blés & les avoines dans les endroits où ils étoient forts, & fait tomber beaucoup de fruits: on a commencé à faucher les avoines le 19.

Les faucheurs ont preſque tous *ſanglé* les avoines & les orges; ils n'ont pas pu faire des ondins *, à cauſe du bouleverſement cauſé par les vents; les avoines n'étoient point hautes ni drues; les orges étoient bons; le temps a été favorable pour ſerrer les pois & veſces qui étoient aſſez bons; les raiſins étoient preſque à leur groſſeur à la fin du mois.

La rivière d'Eſſonne a toujours été baſſe; les noix, à la fin du mois, étoient en cerneaux bons à manger.

* On appelle *ſangler* les avoines, lorſqu'en les fauchant, on met tous les épis d'un même côté; & on appelle *faire des ondins* lorſqu'on les bechevette.

AOUST.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du Ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	S.	11½.	17½.	12.	28.	0	beau avec nuages.
2.	E.	12.	19.	15.	28.	1	beau.
3.	N.	12.	22½.	16.	28.	0	*idem.*
4.	N.	13½.	24½.	17½.	27.	11	beau avec du vent.
5.	S.	17½.	27½.	21.	27.	9½	beau.
6.	N.	16½.	28½.	20½.	27.	9½	*idem.*
7.	N. O.	16.	28.	20½.	27.	9	beau l'ap. m. couv. le ſoir, ton. pl.
8.	N.	16.	23½.	15.	27.	11	nuageux; le ſoir éclairs.
9.	N.	11½.	21.	15½.	28.	0	beau.
10.	N.	14½.	23.	18.	28.	0	*idem.*
11.	N.	17.	26.	19.	27.	11	*idem.*
12.	N.	14½.	23.	28.	28.	0	*idem.*
13.	E.	15½.	29.	21.	27.	8½	*idem.*
14.	O.	18.	25.	18½.	27.	10	couvert & vent.
15.	N.	12½.	16½.	15.	28.	1	le mat. pluv. l'ap. m. beau avec n.
16.	N.	14½.	20.	14.	28.	2	beau avec nuages & du vent.
17.	N.	15½.	22.	14.	28.	1	beau avec du vent.
18.	N.	12.	24.	17.	28.	0	beau.
19.	N.	14.	26½.	19.	28.	0	*idem.*
20.	N.	14.	26½.	18.	27.	11½	*idem.*
21.	N.	14.	25½.	18½.	27.	11	*idem.*
22.	N.	14½.	27.	20.	27.	11	*idem.*
23.	N.	13.	22½.	17.	28.	1½	*idem.*
24.	N.	13½.	23.	17½.	28.	3	*idem.*
25.	N.	14.	25.	18.	28.	2	*idem.*
26.	N.	14.	24.	17.	28.	0	beau avec du vent.
27.	N.	11.	17½.	12½.	28.	0	beau avec grand vent.
28.	N.	10½.	17.	13½.	28.	1	beau avec du vent.
29.	N.	12.	19.	14½.	28.	1	beau & vent.
30.	N.	8.	19.	13½.	27.	10	beau; le ſoir vent.
31.	N. O.	9½.	15.	8½.	28.	0	beau & vent.

Le 6, on a vu des raiſins tournés; le 4, on a *fini la* moiſſon des froments ſans une goutte d'eau, & tout auſſi-tôt on a levé les avoines ſans qu'elles aient eu d'eau : comme elles étoient toutes *ſanglées*, les roſées du matin les ont aſſez mouillées; il n'en a pas été de même en terre noire, on les a miſes en *ondins* en les fauchant, & comme en ondins elles ont plus d'épaiſſeur, la roſée n'a pu les enfondre; on attendoit de la pluie pour les enlever, & comme il n'eſt point tombé d'eau il en reſtoit encore à enlever à la fin de ce mois.

Les fromens étoient d'une bonne hauteur, & le grain rendoit beaucoup; il en falloit dix-huit gerbes pour en faire une mine, au lieu que l'année dernière il en falloit juſqu'à trente gerbes: les avoines ont été auſſi bien grenées, mais peu épaiſſes.

Il a paru ſur les haies & ſur les arbres des fourreaux de chenilles en grande quantité, cauſés par ces papillons blancs qu'on avoit eus au commencement de Juillet.

Il a fait une grande ſéchereſſe & de grandes chaleurs durant ce mois, de ſorte que tous les légumes ont péri dans les jardins, & beaucoup de raiſins ont été grillés aux vignes.

SEPTEMBRE.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.	État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	N. O.	5.	15.	9$\frac{1}{2}$.	27. 11	beau.
2.	N. O.	7.	16$\frac{1}{2}$.	11.	27. 9	couvert, & le ſoir pluie.
3.	N. O.	10.	19.	13$\frac{1}{2}$.	27. 9	beau.
4.	N.	11.	20.	13.	27. 10	*idem.*
5.	N.	7.	18$\frac{1}{2}$.	11$\frac{1}{2}$.	27. 10	*idem.*
6.	N.	8.	18.	11$\frac{1}{2}$.	27. 8$\frac{1}{2}$	beau & vent; gel. bl. dans la nuit.
7.	N.	8.	19.	13$\frac{1}{2}$.	27. 7$\frac{1}{2}$	*idem.*
8.	N.	7$\frac{1}{2}$.	17$\frac{1}{2}$.	9$\frac{1}{2}$.	27. 10	beau avec vent; le ſoir bruine.
9.	S. E.	7$\frac{1}{2}$.	19.	11.	27. 10$\frac{1}{2}$	beau.
10.	N.	7$\frac{1}{2}$.	18$\frac{1}{2}$.	12.	27. 8.	beau avec nuages.
11.	S.	11.	13.	9.	27. 8$\frac{1}{2}$	couv. & vent avec argues de pluie.
12.	S.	10.	15.	13.	27. 8	grand vent & couvert.
13.	N.	11.	19.	11.	27. 8	mat. pl. l'ap. midi beau avec nuages.
14.	N.	10.	15.	11$\frac{1}{2}$.	27. 11	couv. vent & bruine; le ſoir éclairs.
15.	N.	10.	18$\frac{1}{2}$.	14.	27. 11	beau avec nuages.
16.	N.	10.	22.	15.	27. 9$\frac{1}{2}$	beau; le ſoir éclairs.
17.	S.	10$\frac{1}{2}$.	12.	9.	27. 10$\frac{1}{2}$	pluvieux.
18.	N.	5.	15.	9.	28. 1	le matin gelée blanche, enſuite beau.
19.	N.	5$\frac{1}{2}$.	15.	8$\frac{1}{2}$.	27. 10	beau; gelée blanche le matin.
20.	N.	5.	17$\frac{1}{2}$.	10.	28. 2	*idem.*
21.	N.	7.	15$\frac{1}{2}$.	10.	28. 1	beau; le ſoir aurore boréale.
22.	N.	7$\frac{1}{2}$.	18.	12.	28. 1	beau.
23.	N.	8$\frac{1}{2}$.	18$\frac{1}{2}$.	13.	27.	*idem.*
24.	N.	8$\frac{1}{2}$.	21$\frac{1}{2}$.	14.	27. 10	*idem.*
25.	O.	10.	21.	12$\frac{1}{2}$.	27. 8$\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
26.	S.	9.	13$\frac{1}{2}$.	13.	27. 5	pluvieux.
27.	S. O.	9$\frac{1}{2}$.	11$\frac{3}{4}$.	8.	27. 7	pluie & vent.
28.	N.	8$\frac{1}{2}$.	11$\frac{1}{2}$.	4.	28. 0	beau avec vent.
29.	N.	2.	11.	4$\frac{1}{2}$.	28. 1	beau; gelée blanche le matin.
30.	N.	2$\frac{1}{2}$.	13.	5.	27. 9	*idem.*

Comme il eſt venu un peu d'eau à la fin du mois, on en a profité pour lever les avoines des terres noires, qui étoient encore dans les champs.

On a commencé auſſi à labourer à demeure (qui eſt la dernière façon que l'on donne à la terre, pour enſuite ſemer les blés), vers le milieu du mois.

On a commencé les vendanges le 22 ; les raiſins étoient gros, mais les ſéchereſſes du mois dernier ont fait un peu de tort, & les raiſins grilloient en mûriſſant ; cependant les vignes ont rendu plus du double que l'année dernière ; on a récolté quatre poinçonnées de vendanges par arpent ; le vin étoit de bonne qualité.

Les hirondelles ſont parties avant la Saint-Michel, il n'en paroiſſoit plus aucune à la fin du mois.

On a commencé à ſemer les ſeigles dans ce même temps.

OCTOBRE.

OCTOBRE.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	O.	6.	11 ½.	13.	27.	9	pluvieux; il a tonné l'après-midi.
2.	S. O.	6 ½.	11 ½.	7.	27.	7	pluie & vent.
3.	S.	9.	11 ½.	7 ½.	27.	5	pluie le matin; l'après-midi couvert.
4.	N. O.	8.	12.	7 ½.	27.	7	beau avec nuages; le soir pluie.
5.	N. O.	5.	12.	8.	27.	7	beau avec nuages.
6.	N.	8 ½.	14.	13.	27	3	le matin pluv. le soir écl. sans tonn.
7.	S.	10.	20.	13.	27.	3 ½	beau, nuag. soir écl. foudre de vent.
8.	S.	9.	14 ½.	8 ½.	27.	5	couvert & bruine.
9.	S.	9.	10 ½.	10.	27.	3	pluvieux.
10.	S.	9.	11.	10.	27.	6	*idem.*
11.	S.	8.	10.	6 ½.	27.	8	nuageux; le soir pluie.
12.	E.	5 ½.		6 ½.	27.	9	beau avec nuages.
13.	N. E.	5 ½.	10 ½.	4 ½.	27.	7	*idem.*
14.	N.	4.	8 ½.	6 ½.	27.	4	couvert & venteux.
15.	N.	4 ½.	9.	4 ½.	27.	6	beau.
16.	N.	4 ½.	8 ½.	2.	27.	9	*idem.*
17.	N.	— ½.	6.	½.	27.	9	*idem.*
18.	N.	— 1 ½.	7 ½.	1 ½.	27.	9	*idem.*
19.	N.	— 1.	8.	5.	27.	5	nuageux; le soir pluie.
20.	S.	5 ½.	10 ½.	9.	27.	6	pluvieux.
21.	S.	7.	10 ½.	8 ½.	27.	7	*idem.*
22.	S. O.	5 ½.	10.	6 ½.	27.	8 ½	couvert & bruine.
23.	S. O.	9.	11.	11.	27.	6	pluie & vent.
24.	S. O.	11.	15.	13 ½.	27.	5	*idem.*
25.	N. O.	9.	11 ½.	8 ½.	27.	5	pluvieux.
26.	N.	5 ½.	7 ½.	4.	27.	10	couvert.
27.	N. E.	2.	8 ½.	7.	27.	9	beau.
28.	S. E.	8.	11.	10 ½.	27.	8	couvert & bruine.
29.	S.	9 ½.	13.	9.	27.	11	pluie le matin; l'après-midi couvert.
30.	S.	9.	11 ½.	8 ½.	28.	1	couvert.
31.	S. E.	4 ½.	12.	10.	27.	9	couvert, & le soir pluie.

Le commencement de ce mois a été humide; le vin n'a pas beaucoup bouilli dans les cuves à cause des pluies qui sont venues à la fin de l'autre mois, qui ont un peu mouillé le raisin aux vignes; cependant le vin avoit belle couleur, & étoit de bonne qualité, ce qui ne pouvoit guère être autrement, parce que les raisins étoient très-mûrs.

Le safran n'a pas mal donné, mais il a sorti de terre fort tard, & la récolte n'a été abondante que vers le 22 ou le 23 de ce mois: il étoit nécessaire qu'il vînt de la pluie, car comme il ne pouvoit pas en sortir, à cause de la sécheresse, il auroit péri en terre; moyennant ces pluies, il a fait très-bon labourer & semer les blés, même dans les terres noires où il n'en restoit pas beaucoup à faire à la fin de ce mois, & les premiers faits étoient dans le même temps fort bien levés; a rentré les orangers le 20.

La rivière d'Essonne a un peu augmentée dans ce mois.

NOVEMBRE.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre.			Barom.		État du ciel.
		Matin.	Midi.	Soir.			
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces*	*lignes*	
1.	S. O.	$4\frac{1}{2}$.	$12\frac{1}{2}$.	5.	28.	2	beau.
2.	S. E.	$2\frac{1}{2}$.	10.	$4\frac{1}{2}$.	28.	1	*idem.*
3.	E.	$1\frac{1}{2}$.	10.	$6\frac{1}{2}$.	27.	8	*idem.*
4.	S.	6.	11.	8.	27.	6	couvert; le ſoir pluie.
5.	S.	6.	$8\frac{1}{2}$.	$7\frac{1}{2}$.	27.	4	pluie & vent.
6.	S. O.	$5\frac{1}{2}$.	10.	$7\frac{1}{2}$.	27.	4	*idem.*
7.	S. O.	$2\frac{1}{2}$.	$8\frac{1}{2}$.	6.	27.	6	beau avec nuages.
8.	S. O.	$4\frac{1}{2}$.	8.	$5\frac{1}{2}$.	27.	8	beau avec nuag. pluie dans la nuit.
9.	O.	$5\frac{1}{2}$.	$7\frac{1}{2}$.	$6\frac{1}{2}$.	27.	5	pluvieux.
10.	O.	$5\frac{1}{2}$.	7.	5.	27.	6	*idem.*
11.	S. O.	$9\frac{1}{2}$.	$11\frac{1}{2}$.	$7\frac{1}{2}$.	27.	3	*idem.*
12.	N. O.	$4\frac{1}{2}$.	7.	$3\frac{1}{2}$.	27.	7	couvert.
13.	S. O.	0.	7.	4.	27.	9	beau.
14.	E.	3.	$7\frac{1}{2}$.	6.	27.	7	couvert, & pluie dans la nuit.
15.	S. O.	6.	9.	8.	27.	7	pluvieux.
16.	S.	8.	10.	9.	27.	8	couvert; le ſoir pluie.
17.	S.	$6\frac{1}{2}$.	10.	8.	27.	7	couvert; pluie ſur le ſoir.
18.	S.	$7\frac{1}{2}$.	8.	4.	27.	8	pluvieux.
19.	O.	$3\frac{1}{2}$.	$6\frac{1}{2}$.	$5\frac{1}{2}$.	27.	10	couvert.
20.	S.	4.	$7\frac{1}{2}$.	5.	27.	11	couvert; le ſoir pluie.
21.	S.	4.	7.	5.	27.	11	couvert.
22.	S.	3.	5.	4.	27.	11	*idem.*
23.	S.	$5\frac{1}{2}$.	$9\frac{1}{2}$.	$10\frac{1}{2}$.	27.	$10\frac{1}{2}$	pluie & grand vent.
24.	S.	10.	11.	10.	27.	$9\frac{1}{2}$	pluie & vent.
25.	S. O.	10.	10.	7.	28.	1	couvert.
26.	S. O.	$6\frac{1}{2}$.	8.	5.	28.	0	couvert & brouillard.
27.	S.	6.	$9\frac{1}{2}$.	$6\frac{1}{2}$.	27.	$9\frac{1}{2}$	pluie & grand vent.
28.	S.	4.	$8\frac{1}{2}$.	$5\frac{1}{2}$.	28.	0	beau.
29.	S.	4.	$5\frac{3}{4}$.	$4\frac{1}{2}$.	27.	9	couvert.
30.	O.	5.	6.	$1\frac{1}{2}$.	27.	$11\frac{1}{2}$	beau; il a plu dans la nuit.

Ce mois a été très-humide, on a bien fait d'avoir ſemé les blés le mois dernier dans les bonnes terres, car ceux qui ne l'avoient point encore fait daus les terres noires, n'ont pu finir dans ce mois.

Le ſafran ſec s'eſt vendu le 17 de ce mois, trente francs la livre.

On a commencé à donner à la terre des labours d'entre-hiver; on a auſſi tiré les échalas dans les vignes, & on leur a donné la première façon que l'on nomme *parage*.

La rivière d'Eſſonne a été fort haute, elle a débordé, ce qui vient des grandes pluies qui ſont tombées.

Il n'y a pas eu beaucoup de fruits cette année; mais plus de pommes que de poires: point de prunes, parce que, comme on l'a fait remarquer, au mois de Mai, il avoit noué fort peu de fleurs.

DÉCEMBRE.

Jours du Mois.	Vents.	Thermomètre. Matin.	Midi.	Soir.	Barom.		État du ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces	lignes	
1.	N. O.	— 1½.	3.	2.	27.	9	beau.
2.	E.	1½.	2.	3½.	27.	4	couvert; le soir pluie.
3.	S. E.	3.	7.	5½.	27.	0	couvert; le soir pluie & vent.
4.	S.	4½.	7½.	5.	27.	2	pluvieux & grand vent.
5.	S.	4.	6½.	6½.	27.	0	pluvieux.
6.	S.	4½.	7.	6½.	27.	5	couvert; le soir pluie.
7.	S.	9.	10.	7½.	27.	7	pluvieux & grand vent.
8.	S.	4½.	9.	8½.	27.	10	couvert & grand vent.
9.	S.	7½.	10.	7.	27.	11	couvert & bruine.
10.	S.	3½.	8½.	7½.	27.	8½	couvert; le soir pluie.
11.	S.	5½.	10.	8½.	28.	9½	couvert.
12.	S. E.	5.	9½.	8.	27.	4½	beau.
13.	S.	8½.	9½.	6½.	27.	5½	pluvieux & venteux.
14.	S.	6½.	8.	10.	28.	5½	pluvieux & grand vent.
15.	S. O.	6.	7.	3.	27.	10	couvert.
16.	O.	1.	4½.	4.	28.	2	*idem.*
17.	O.	3.	6.	5.	28.	3	*idem.*
18.	O.	4.	6.	3½.	28.	3	*idem.*
19.	S. E.	½.	5.	3.	28.	2	*idem.*
20.	S.	3.	5½.	5.	28.	2	pluvieux.
21.	N.	4.	5½.	4.	28.	3	couvert.
22.	N. E.	3.	4.	2½.	28.	2	*idem.*
23.	S. E.	1½.	1½.	1.	28.	3	couvert; le soir bruine.
24.	N.	1½.	3½.	3½.	28.	4	*idem.*
25.	N.	½.	4½.	1.	28.	4½	beau.
26.	N.	0.	3.	0.	28.	6	*idem.*
27.	N.	— 1.	— ½.	— 1.	28.	3½	beau; l'après-midi brouillard.
28.	S.	1½.	½.	1½.	28.	0	grand brouillard.
29.	S. O.	1½.	5.	7.	27.	7	pluvieux & venteux.
30.	O.	2.	4.	3.	27.	9	couvert & bruine.
31.	O.	6.	7.	5.	27.	3½	pluvieux & grand vent.

Les ouvrages ont été interrompus, tant pour les voitures que pour labourer, parce que la terre étoit trop molle.

Les blés étoient très-beaux, les pluies qui sont tombées ont fait pousser beaucoup d'herbes. Le blé de la récolte de 1778, s'est vendu au marché dix-huit livres le sac, mesure de Pithiviers. Le vin de la même récolte s'est vendu soixante livres le poinçon.

La rivière d'Essonne étoit d'une moyenne hauteur.

OBSERVATIONS sur la quantité d'Eau de pluie tombée en l'année 1778.

JANVIER	1 pouc.	0 lignes	17 48.es			
FÉVRIER	0.	9.	26	2 pouc.	11 lignes	45 48.es
MARS	1.	2.	2			
AVRIL	2.	1.	1			
MAI	1.	8.	42	4.	4.	47.
JUIN	0.	7.	4			
JUILLET	1.	7.	22			
AOÛT	0.	7.	44	3.	6.	46.
SEPTEMBRE	1.	3.	28			
OCTOBRE	1.	4.	37			
NOVEMBRE	2.	4.	42	5.	6.	5
DÉCEMBRE	1.	8.	22			
TOTAL DE LA PLUIE tombée pendant l'année 1778				16 pouc.	5 lignes	47 48.es



MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ Royale des Sciences établie à Montpellier, ont envoyé à l'Académie le Mémoire suivant, pour entretenir l'union intime qui doit être entre elles, comme ne faisant qu'un seul Corps, aux termes des Statuts accordés par le Roi, au mois de Février 1706.

DESCRIPTION

Du petit Volcan éteint, dont le sommet est couvert par le village & le château de Montferrier, à une lieue de Montpellier.

Par M. DE JOUBERT.

Les Naturalistes de notre siècle sont les premiers qui se soient aperçus que plusieurs provinces de France avoient éprouvé dans des temps reculés l'explosion des feux souterrains par les volcans.

Mrs de Malesherbes & Guettard parcourant l'Auvergne en 1751, reconnurent plusieurs produits volcaniques dans les matériaux préparés pour engraver les chemins, & dans les pierres employées pour les bâtimens ; les bornes & les *butterones* distribuées dans les environs de Clermont, furent pour eux de nouvelles indications *(a)*. Ils furent conduits

(a) Sur quelques montagnes de la France qui ont été des Volcans ; par M. Guettard. *Voy. Mémoires de l'Académie, année 1752, page 27.*

par des payſans au lieu de l'extraction de ces pierres; *ils s'y* confirmèrent dans l'opinion de l'ancienne exiſtence d'un volcan. Cette conviction s'accrut en eux dans les courſes qu'ils firent ſur les autres montagnes des environs de Clermont, le Puy-Dôme & autres pareilles. M. Guettard de retour à Paris, annonça à l'Académie des Sciences, les volcans éteints de l'Auvergne. M. Deſmareſt a viſité & décrit le même pays; en 1763 & 1764 il a déterminé la nature des différentes productions volcaniques qui s'y trouvent, notamment des laves compactes ou *baſaltes*, dont il a le premier fait connoître l'origine dans les ſéances particulières de l'Académie *(b)*. M. Guettard, en 1770, n'a éprouvé aucune difficulté à s'exprimer nettement ſur ce point, en diſant que M. Deſmarets avoit découvert les baſaltes en Auvergne. L'ancien incendie & commotion de pluſieurs parties de la France, qui nous ſont démontrés par ces *monumens* indubitables, ne ſe trouvent cependant indiqués ni par les Hiſtoriens, ni dans les ouvrages des Naturaliſtes antérieurs à ce ſiècle. Il s'eſt préſenté depuis d'autres prétendans à la découverte. M. de Franjat en a refuſé la gloire à M. Guettard, dans ſon livre ſur les volcans du Vivarais; mais elle lui eſt bien aſſurée par le témoignage très-probant & très-circonſtancié, que M. de Maleſherbes lui a donné, & par la juſtice qui lui a été rendue en Auvergne. J'ai été témoin dans le voyage que j'y fis avec lui, il y a deux ans, qu'on s'eſt rappelé l'étonnement qu'y avoit cauſé le premier jugement qu'il avoit porté ſur les volcans de cette contrée.

On n'a pas conteſté à M. Montet l'avantage d'avoir *découvert* & annoncé les volcans du Languedoc; ces Naturaliſtes ont inſtruit & dirigé les voyageurs; nos montagnes ſont viſitées par les obſervateurs de la Nature. On s'efforce de

(b) Note du Mémoire de M. Montet, pour l'année 1760, ſur un grand nombre de Volcans éteints en Languedoc: Mémoire ſur l'origine du Baſalte; par M. Deſmareſt, *Mém. de l'Acad. année 1771*, *page 476*. Second Mémoire ſur les Sciences & les Arts, *tome ſecond*; neuvième Mémoire ſur le Baſalte des Anciens & des Modernes, *page 276*.

trouver les traces & les produits des feux souterrains, on cherche à déterminer les époques des éruptions, on en calcule le nombre, on en mesure la direction & l'étendue, & on analyse les matières vomies. On conjecture sur les rapports & la liaison de ces bouches qui se laissent approcher aujourd'hui sans danger ni crainte; & on n'est plus étonné de rencontrer fréquemment en Languedoc les pétroles & les sources d'eaux chaudes. Chaque voyageur ajoute quelque chose à ce que les descriptions précédentes lui avoient appris, & sans rien enlever au mérite de la découverte, on perfectionne tous les jours les détails de l'observation.

Le petit volcan de Montferrier est du nombre de ceux que M. Montet a indiqués. Personne depuis lui ne s'en est occupé; j'ai cru que je mériterois des reproches si, après avoir visité deux fois les volcans du Vélay & du Vivarais, j'omettois d'observer celui qui est le plus près de nous; je me suis applaudi d'avoir fait précéder l'examen des grands volcans; ce que j'y ai vu m'a rendu sensibles des objets qui auroient pu m'échapper à Montferrier; l'éruption paroît avoir été de peu de durée, tout y est resserré & en petit volume.

Soit que les éruptions volcaniques soient sorties des montagnes déjà remarquables par leur élévation, soit que les monticules ne se soient formés que par une boursouflure que le feu souterrain a élevée dans des vallons, l'aspect de tout volcan non altéré par des révolutions postérieures, présente même de très-loin la forme d'un cône tronqué; lorsque la montagne s'est ouverte pour vomir les matières rejetées à la suite des ébranlemens intérieurs, son sommet s'est recouvert de cendres ou de petits fragmens de terres cuites & de ponces; l'orifice du volcan s'en est garni successivement, & ces corps légers sont retombés en talus, à mesure qu'ils n'ont pas eu de base; de-là la forme conique que ces montagnes acquièrent. Lorsque la vallée a vu élever au milieu d'elle la boursouflure dont le sommet s'est rompu pour vomir les flammes, la forme conique est dûe à la boursouflure elle-même, qui ne fait que se revêtir des matières légères que

le volcan rejette. C'eſt par la conſtitution des terreins environnans, autant que par celle de la montagne elle-même, que l'on peut déterminer quel étoit l'état du pays antérieurement à l'exploſion.

Il ſuffit du premier coup-d'œil jeté ſur le canton de Montferrier, pour juger que l'élévation ſur laquelle le village & le château ſont bâtis, eſt diſcordante avec les côteaux voiſins, & qu'on ne peut rapporter ſon exiſtence à la même origine.

La vallée de Montferrier s'étend du nord au midi, elle a été creuſée par la rivière qui y coule dans cette direction & qu'on appelle le Lez, en latin *Ledum.* Cette rivière a rompu par ſon cours ſucceſſif un banc de cailloux roulés, la plupart calcaires, offrant par intervalles une eſpèce de poudingue, coloré par de l'ocre martiale brune : cette rupture a laiſſé en forme d'élévation à l'eſt & à l'oueſt, les extrémités de ce banc, par le creuſement ſucceſſif qui a même attaqué les couches de pierre calcaire, ſur leſquelles ce banc eſt poſé. L'action de la rivière a donné à la vallée la forme d'un arc de cercle renverſé; c'eſt au tiers de cet arc que s'élève le monticule volcanique; il a pour baſe la pierre calcaire qui conſtitue l'état commun du pays, à ſix lieues au-deſſus vers le nord, & à moins de demi-lieue vers le midi.

Cette pierre préſente des couches parallèles entr'elles, d'environ un pied d'épaiſſeur; elle eſt d'un gris-foncé dans l'intérieur, & elle ſe caſſe preſque toujours en parallélogrammes; la couche de poudingue ſe trouve au-deſſus, & dans la direction de l'arc de cercle; la ſommité du monticule qui excède cette direction, eſt toute volcanique, c'eſt d'après la face du monticule au midi, que je fais cette deſcription.

L'inclinaiſon des couches de pierre calcaire & du poudingue, eſt généralement d'un très-petit angle, & dirigée du nord au midi en allant de Montpellier à Montferrier; on la voit conſtante juſque vers le pont où eſt le poteau de la Seigneurie, & qui traverſe une vallée allant de l'eſt à l'oueſt. On eſt ſurpris que les couches de pierre calcaire ſoient inclinées ſur le bord de cette vallée rapidement &

en sens contraire du midi au nord, & que vis-à-vis & au monticule de Montferrier, les mêmes couches s'inclinent au contraire du nord au midi & aussi rapidement. La même vallée absorbe l'extrémité des unes & des autres; d'après cet aspect qui doutera que cette vallée de l'est à l'ouest, n'ait été formée par un affaissement? elle est au bas du volcan, elle a pu en être le foyer dont l'explosion s'est dirigée obliquement du midi vers le nord; le vide produit par l'éruption & les tremblemens qui l'ont préparée, ont dû occasionner la rupture des couches de pierre calcaire, dont la masse s'est inclinée en sens contraire vers ce foyer, en entraînant dans la même chute les parties les plus voisines.

L'état de la montagne de Montferrier confirme cette conjecture: sa face au midi est, comme il vient d'être dit, composée de couches de pierre calcaire & de la couche de poudingue qui forment ensemble les deux tiers de l'élévation: le tiers supérieur est volcanique; au contraire, tout est volcanique dans la face qui regarde le nord, depuis la sommité jusqu'au bas. L'explosion du volcan a donc été dirigée très-obliquement du midi vers le nord; elle a soulevé la masse des pierres constitutives du terrein pour les incliner vers le midi. Il en a résulté une grande ouverture, dans laquelle s'est faite la boursouflure qui a élevé le monticule au-dessus du terrein originaire. Dans la partie de l'ouest, les matières vomies ont recouvert l'ancien sol & se sont étendues vers le monticule de poudingue. Le côté de l'est présente une face plus étendue en profondeur, parce qu'il regarde le milieu de la vallée, les deux tiers supérieurs sont volcaniques; il est possible que la formation des terrasses pour descendre du château à la rivière, ait occasionné dans une portion l'enlèvement de quelque couche primitive, & que dans quelques endroits nous ne voyons qu'un intérieur dégagé des pierres calcaires qui le recouvroient; cette conjecture est indiquée par la forme des laves qui paroissent, sur-tout vers le bas, avoir été moulées sur des corps qui ont présenté des cavités.

On remarque dans tous les volcans, tant exiſtans qu'*éteints*, que le ruiſſeau de laves ne renverſe rien, & que le moindre obſtacle l'arrête: il enveloppe les corps qui offrent le moins de réſiſtance, de-là vient la variété des matières hétérogènes & les plus altérables au feu, que nous trouvons intactes dans les produits des volcans. La lave s'adapte ſur la ſurface des corps qu'elle rencontre, elle s'introduit dans leurs fentes juſques à ce qu'elle parvienne à les ſurmonter & à les envelopper.

L'éruption du volcan de Montferrier s'eſt contenue dans le terrein même du monticule; tout indique qu'elle n'a pas été de longue durée, & qu'elle ne s'eſt pas réitérée: c'eſt du côté de l'oueſt que ſe trouvent les ruiſſeaux les plus conſidérables de lave compacte; j'en ai aperçu deux d'environ cinq à ſix toiſes de large. La lave compacte qui a coulé du côté du nord y occupe moins d'étendue; cette lave à laquelle on donne proprement le nom de *baſalte*, eſt le produit de l'éruption dans ſa plus grande force; elle a ſillonné les premières matières vomies, dont le volume eſt enveloppé: ces premières matières ſont graveleuſes & le plus ſouvent incohérentes.

Elles ont cependant pris une conſiſtance très-ſolide dans la partie de l'oueſt qui n'a pas été le lieu du premier dépôt de l'éruption, il paroît que cette partie ne s'eſt garnie que la dernière; auſſi a-t-elle reçu les matières les plus compactes. C'eſt le canton le plus élevé, c'eſt l'extrémité ſupérieure de l'arc de la vallée, & le monticule volcanique n'a pu y verſer que quand il a eu acquis ſa plus grande *élévation*. Cette eſpèce de lave y offre le coup-d'œil d'une brèche ou d'un poudingue à petites maſſes, elle ſe rapproche de celle qui forme les montagnes aux environs du Puy en Vélay. Un ſédiment volcanique d'un brun clair y réunit des grains gros au plus comme des noiſettes, d'une lave noire rarement poreuſe, d'une lave très-compacte brune, d'une eſpèce de brique rougeâtre & peu dure, de chryſolite & de ſchorl; tous ces corps ſont mélangés & liés par ce ſédiment.

Dans la partie du midi & de l'eſt, ce produit de l'éruption eſt uni par une autre matière. Le ſpath s'eſt introduit dans les intervalles des globules & dans les fentes des maſſes de cette eſpèce de gravier. Lorſque les fentes ſe ſont trouvées trop grandes, le ſpath n'a fait qu'encroûter les parois, & il a formé dans le vide ſa criſtalliſation en pyramides trièdres: cette formation ſpathique n'eſt dûe nullement au volcan, elle eſt très-poſtérieure.

Le gravier volcanique qui conſtitue la partie ſeptentrionale du monticule, n'a éprouvé aucune réunion, il ſe détache & s'ameublit aiſément.

Depuis la porte du village qui regarde entre le nord & l'eſt, juſqu'au portail de la Paroiſſe, s'élève une maſſe de lave compacte noirâtre, refendue verticalement en vrais priſmes baſaltiques; les maiſons & l'égliſe ſont fondées ſur cette lave; près la porte & dans l'intérieur du village, les baſaltes s'élèvent au-deſſus du ſol de cinq à ſix pieds; les bornes qui ont été poſées au dehors de la porte, ont été détachées de cette maſſe; ces priſmes varient dans le nombre de leurs faces, comme dans toutes les chauſſées des Géans. De pareils priſmes d'un volume médiocre & même très-petit, ſe trouvent épars dans les terres labourées des environs de ce ſommet du volcan. Aucune recherche n'a pu me faire découvrir à jour la place du cratère, & tout indique qu'on a profité du ſommet tronqué du monticule, pour y bâtir les maiſons; l'inclinaiſon des couches primitives ſoulevées du nord au midi, l'abondance & la qualité de la lave graveleuſe ſur la face du nord, les courans de lave compacte de l'oueſt & du nord, la direction & la réunion de ces courans vers le lieu où eſt le village, concourent à prouver que les maiſons nous cachent la bouche de ce volcan. Elle n'a pas dû laiſſer une cavité après l'éruption, dès que l'éboulement obſervé aux limites de la terre de Montferrier, en a rempli l'eſpace où l'inflammation avoit formé le vide; les matières fondues & ſoulevées dans le cratère, n'ont pu redeſcendre dans le foyer qui avoit été comblé par l'ébou-

lement; l'explosion a donc dû être interceptée, & les *laves* se sont trouvées arrêtées dans la bouche; c'est ainsi que l'éruption paroît avoir pris fin.

Il n'est pas aussi facile de donner l'époque dans laquelle ce volcan s'est formé. L'histoire & les pierres du pays, prouvent que la mer a séjourné non-seulement à Montferrier, mais six lieues plus haut vers le nord. Le schiste & le granit ne se trouvent qu'entre Saint-Hypolite & la Salle, & ne s'étendent vers l'ouest qu'au-dessus de Ganges, ce qui donne au moins la même distance au nord. L'abandon que la mer nous a fait de tout ce pays, ne remonte donc pas à l'époque la plus ancienne, & Montferrier est beaucoup plus près des côtes actuelles de la mer, que des montagnes que la Méditerranée a autrefois respectées. Le banc de poudingues que nous avons déjà décrit, & qui traversoit anciennement le terrein de la vallée de Montferrier, est encore une formation marine. Les cailloux roulés qui le constituent y ont été portés & rangés par le courant qui règne & régna toujours sur nos côtes de l'est à l'ouest. Il seroit donc possible que le volcan de Montferrier se fût formé dans le séjour que la mer a fait dans cette contrée; il est cependant plus vraisemblable qu'il n'a brûlé qu'après la retraite de la mer. Le banc de poudingues paroît avoir été rompu, & la vallée étoit déjà formée avant l'explosion; l'aspect des lieux semble l'indiquer. Il auroit absolument pu se faire qu'un courant de la mer eût creusé la vallée, comme il a séparé les deux masses de la montagne voisine, dite de *Saint-Loup;* mais la direction de ce courant ne porte pas vers *Montferrier*, & la rivière qui coule dans la vallée, est un agent naturel plus vraisemblable. Je crois donc que cette rivière, dite *le Lez*, a successivement rompu le banc de poudingues élevé par la mer, & a creusé ensuite les pierres qui avoient été le produit des premiers dépôts, & que dans les progrès de ce creusement, les eaux ont trouvé accès dans l'intérieur, & se sont portées sur les matières inflammables; je supposai, à ma première visite de ce volcan, qu'il y avoit eu un

amas de pyrites ; mais mes dernières obſervations m'induiſent à penſer que les pyrites ont pu n'y pas exiſter ; j'ai obſervé dans un puits de cinq à ſix toiſes, que j'ai vu creuſer vers l'oueſt, hors du village, que la maſſe de lave étoit traverſée à environ vingt pieds en profondeur, par un banc d'un à deux pieds d'épaiſſeur, qui avoit l'apparence d'argile ; la lave le porte & le couvre ; il s'en eſt trouvé des maſſes rejetées avec le gravier qui couvre la face du nord, & les fragmens de cette même couche ſont répandus dans tout le monticule. C'eſt une terre graſſe au toucher, & qui a le coup-d'œil d'argile ocreuſe ; l'examen chimique a prouvé qu'elle contient un tiers en argile, & le ſurplus en terre calcaire, avec la préſence d'un peu de fer. Ce mélange forme une vraie marne, laquelle pouſſée au feu, a donné un verre noir.

L'état préſent de cette couche indique qu'elle a pu, avant la formation du volcan, être une véritable argile tenant du fer & que ſa décompoſition a été la cauſe de l'inflammation. Cette décompoſition a produit la ſéparation de l'acide vitriolique. Cet acide en abandonnant l'argile, & en ſe portant ſur la terre ocreuſe, répandue généralement dans le canton, a pu former une combinaiſon pyriteuſe dont l'inflammation a cauſé l'éruption du volcan ; c'eſt peut-être auſſi de cette même couche, primitivement argileuſe, que ſont ſortis ces corps vitreux que nous apercevons au milieu des laves, & par petits rognons ; ils ſont quelquefois mélangés de parties marneuſes.

FIN.

